Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. А. Зуев, Одна задача о раскраске графа, *Матем. заметки*, 2015, том 97, выпуск 6, 942–944

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10665>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 12:45:16

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Одна задача о раскраске графа

Ю. А. Зуев

Постановка задачи. Вершины и ребра простого n -вершинного графа $G(V, E)$ раскрашиваются в m цветов.

Раскраска вершин и ребер графа $G(V, E)$ в одно и то же множество цветов называется *правильной раскраской графа*, если не существует ребра, обе вершины которого окрашены в цвет ребра.

Для каждого графа $G(V, E)$ при любой раскраске его вершин в $m \geq 2$ цветов существует, очевидно, раскраска его ребер в те же m цветов, дающая правильную раскраску графа. Для заданного графа $G(V, E)$ можно поставить вопрос, для любой ли раскраски его ребер в m цветов существует раскраска его вершин, приводящая к его правильной раскраске? Или, напротив, существует такая раскраска ребер, для которой никакая раскраска вершин не дает правильной раскраски графа?

В настоящей заметке эта задача рассматривается для полного n -вершинного графа K_n . Поставленная в форме игры двух лиц, где один из играющих раскрашивает ребра, а другой – вершины графа K_n , данная задача для частных значений m и n предлагалась на Московской математической олимпиаде в 2005 г. [1; с. 66].

Для полного n -вершинного графа K_n и m красок определим предикат $P(m, n)$ следующим образом:

$$P(m, n) = \begin{cases} 0, & \text{если для любой раскраски ребер графа } K_n \text{ существует} \\ & \text{раскраска его вершин, дающая правильную раскраску графа } K_n, \\ 1, & \text{если существует такая раскраска ребер графа } K_n, \text{ что никакая} \\ & \text{раскраска его вершин не приводит к правильной раскраске графа } K_n. \end{cases}$$

В данной заметке изучается поведение предиката $P(m, n)$ в зависимости от m и n .

ТЕОРЕМА 1. Для каждого натурального m существует такое натуральное $v(m)$, что $P(m, n) = 1$ при $n \geq v(m)$ и $P(m, n) = 0$ при $n < v(m)$.

Функция $v(m)$ строго монотонно возрастает по m и имеет квадратичный порядок роста $v(m) = \Theta(m^2)$.

Если q – степень простого числа такая, что $m \leq q - 1$, то $v(m)$ удовлетворяет двойному неравенству

$$\frac{m^2}{2e} + 2 \leq v(m) \leq q^2,$$

где $e = 2,71\dots$ – основание натурального логарифма.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко видеть, что $P(m, n + 1) \geq P(m, n)$ и $P(m + 1, n) \leq P(m, n)$, т.е. предикат монотонно не убывает по n и монотонно не возрастает по m .

(i) Докажем существование строго монотонно возрастающей функции $v(m)$, определенной в условии теоремы. Покажем, что

$$P(m+1, 2n) \geq P(m, n).$$

Пусть $P(m, n) = 1$. Реберную раскраску графа K_{2n} составим из двух графов K_n , ребра каждого из которых раскрашены в m цветов так, что правильной раскраски вершин в m цветов не существует, а все ребра между ними окрасим в $(m+1)$ -й цвет. Ясно, что никакая раскраска вершин K_{2n} в $m+1$ цветов не приведет к правильной раскраске, т.е. $P(m+1, 2n) = 1$. Теперь из очевидного $P(1, 2) = 1$ вытекает, что $P(m, 2^m) = 1$. Отсюда с учетом того, что при $n \leq m$ выполнено $P(m, n) \leq P(n, n) = 0$, следует существование монотонно неубывающей функции $v(m)$.

Покажем, что $v(m)$ строго монотонно возрастает по m . Пусть $v(m) = n$. Тогда

$$P(m, n-1) = 0, \quad P(m, n) = 1.$$

Но $P(m+1, n) = 0$, так как правильную раскраску графа K_n в $m+1$ цветов можно получить, раскрашивая $n-1$ его вершин в m цветов и используя $(m+1)$ -й цвет для n -й вершины. Поэтому $v(m+1) > v(m)$, т.е. $v(m)$ строго монотонно возрастает по m . Определим порядок ее роста.

(ii) Нижняя оценка для $v(m)$ получается вероятностным методом с использованием *локальной леммы Ловаса* (см. [2; с. 83]). Согласно этой лемме, если в произвольном вероятностном пространстве задано конечное множество событий $\{A_i\}$, вероятность каждого из которых не превышает $p < 1$, каждое событие зависит от не более чем d других событий и имеет место соотношение $epd \leq 1$, где $e = 2, 71 \dots$ – основание натурального логарифма, то $P(\bigcap_i \bar{A}_i) > 0$, т.е. событие $\bigcap_i \bar{A}_i$ осуществимо.

Для произвольной фиксированной окраски ребер графа K_n определяем вероятностное пространство следующим образом. Окрашиваем каждую вершину графа K_n независимо и равновероятно в один из m цветов. Для каждого ребра $e = \{v_i, v_j\} \in E(K_n)$ определим событие A_e : “ребро e и вершины v_i, v_j окрашены в один цвет”. Тогда событие $\bigcap_{e \in E(K_n)} \bar{A}_e$ соответствует правильной раскраске. Для каждого A_e имеем $P(A_e) = 1/m^2$. Событие A_e может зависеть лишь от событий $A_{e'}$ для смежных с e ребер e' , а их $2(n-2)$. При $2em^{-2}(n-2) \leq 1$ условия локальной леммы Ловаса выполнены, а значит, правильная раскраска существует. Отсюда получаем $v(m) > m^2/(2e) + 2$.

(iii) Верхняя оценка для $v(m)$ получается с использованием идеи, изложенной в [1; с. 381]. Пусть q – степень простого числа. Покажем, что

$$P(q-1, q^2) = 1.$$

Для этого достаточно определить такую раскраску ребер графа K_{q^2} , для которой никакая раскраска вершин не приводит к правильной раскраске K_{q^2} . Вершины графа K_{q^2} отождествим с точками конечной аффинной плоскости порядка q . Имеем q^2 точек, в координатном виде задаваемых парами (x, y) , где $x, y \in GF(q)$, и $q^2 + q$ прямых, в координатном виде задаваемых уравнениями вида $y = ax + b$ (q^2 прямых) и $x = c$ (q прямых). Разобьем множество прямых на $q+1$ подмножеств – направлений. Множество прямых вида $y = ax + b$ разбивается на q направлений, каждое из которых задается значением коэффициента a , прямые второго вида задают еще одно направление. Каждое направление содержит q прямых. Прямые одного направления не пересекаются (параллельны) и покрывают все точки плоскости. Через каждые две точки проходит единственная прямая, поэтому каждое ребро графа принадлежит ровно одному направлению.

Из $q+1$ направлений произвольно выберем $q-1$. Для каждого выбранного направления возьмем отдельный цвет и раскрасим ребра каждого выбранного направления в цвет направления. Ребра двух оставшихся направлений окрасим произвольным образом. Покажем, что для данной раскраски ребер графа K_{q^2} никакая раскраска его вершин не приведет

к его правильной раскраске. В самом деле, при раскраске q^2 точек в $q - 1$ цветов найдется цвет, используемый более q раз. Рассмотрим направление этого цвета. На одной из q его прямых найдутся две точки, окрашенные в данный цвет, т.е. обе вершины соответствующего ребра будут окрашены в цвет ребра. Отсюда

$$P(q - 1, q^2) = 1.$$

Для произвольного числа цветов m , положив $q = 2^{\lceil \log_2(m+1) \rceil}$, имеем

$$m \leq q - 1, \quad q^2 < 4(m + 1)^2.$$

Это дает $P(m, 4(m + 1)^2) = 1$. Откуда $v(m) \leq 4(m + 1)^2$. Этим порядок роста $v(m)$ установлен, и теорема полностью доказана.

В качестве непосредственного следствия из теоремы получаем следующие оценки для числа красок m в зависимости от числа вершин n графа K_n .

СЛЕДСТВИЕ. Если $m > \sqrt{2e(n - 2)}$, то $P(m, n) = 0$. Если $m < q$, где q – любая степень простого числа такая, что $q^2 \leq n$, то $P(m, n) = 1$.

В задаче, рассматриваемой в [1], число вершин $n = 200$. Положив $q = 13$, получаем, что для любого числа красок $m < 13$ существует такая раскраска ребер графа K_{200} , для которой никакая раскраска его вершин не приводит к правильной раскраске графа.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Р.М. Федоров, А.Я. Каннель-Белов, А.К. Ковальджи, И.В. Яценко, *Московские математические олимпиады 1993–2005 г.*, МЦНМО, М., 2008. [2] Н. Алон, Дж. Спенсер, *Вероятностный метод*, Бином. Лаборатория знаний, М., 2007.

Ю. А. Зуев

Московский государственный университет
технологий и управления им. К.Г. Разумовского
E-mail: yuri_zuev@mailfrom.ru

Поступило

05.12.2014