Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Пухликов, Два неравенства для последовательности раздутий, *Матем. заметки*, 2015, том 97, выпуск 6, 947–950

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10666>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 02:25:47

Два неравенства для последовательности раздутий

А. В. Пухликов

1. Кратности и дискрепантности. Пусть $o \in S$ – росток неособой поверхности, $o \in C$ – росток эффективного 1-цикла на S , а E – простой дивизор над точкой o , т.е. $E \subset \tilde{S}$ – неприводимая (рациональная) кривая на гладкой поверхности $\tilde{S}$, снабженной бирациональным морфизмом $\varphi: \tilde{S} \rightarrow S$, причем $\varphi(E) = o$. Морфизм φ мы можем и будем считать композицией раздутий лежащих друг над другом точек:

$$\varphi = \varphi_{1,0} \circ \varphi_{2,1} \circ \cdots \circ \varphi_{K,K-1},$$

где $\varphi_{i,i-1}: S_i \rightarrow S_{i-1}$ есть раздутие точки $x_{i-1} \in S_{i-1}$ с исключительным дивизором

$$E_i = \varphi_{i,i-1}^{-1}(x_{i-1}) \subset S_i, \quad E_i \cong \mathbb{P}^1.$$

Здесь $x_0 = o$ и $x_{i-1} \in S_{i-1}$ есть центр простого дивизора E на S_{i-1} , а последний исключительный дивизор E_K есть E (т.е. φ – разрешение дискретного нормирования ord_E ; см., например, [1; гл. 2]).

Предполагаем, что $a(E, S) \geq 2$, так что и $K \geq 2$. Пусть $C^i \subset S_i$ – собственный прообраз эффективного 1-цикла C на S_i . Положим

$$\mu_i = \text{mult}_{x_{i-1}} C^{i-1},$$

так что

$$C^i = \varphi_{i,i-1}^* C^{i-1} - \mu_i E_i.$$

Цель настоящей заметки – установить два неравенства, связывающие элементарные кратности μ_i , число $\text{ord}_E \varphi^* C$ (полную кратность 1-цикла C относительно нормирования ord_E) и дискрепантности $a(E, S_i)$ относительно “нижних этажей” разрешения φ . Эти неравенства полезны в трехмерной бирациональной геометрии.

Для того чтобы компактно сформулировать основные результаты статьи, положим

$$p_i = \text{ord}_E \varphi_{K,i}^* E_i, \quad i = 1, \dots, K,$$

где

$$\varphi_{K,i} = \varphi_{i+1,i} \circ \cdots \circ \varphi_{K,K-1}: S_K \rightarrow S_i.$$

(Вообще, композицию $\varphi_{i+1,i} \circ \cdots \circ \varphi_{j,j-1}$ для $j > i$ традиционно обозначают символом $\varphi_{j,i}$ и полагают $\varphi_{i,i} = \text{id}_{S_i}$ для единообразия обозначений.) Имеют место следующие утверждения.

ТЕОРЕМА 1. *Справедливо неравенство*

$$p_1 \mu_2 + \mu_1(a(E, S_2) + 1) \geq \text{ord}_E \varphi^* C. \quad (1)$$

ТЕОРЕМА 2. *Справедливо неравенство*

$$\mu_1(a(E, S_1) + 1) \geq \text{ord}_E \varphi^* C. \quad (2)$$

Мы докажем эти факты индукцией по K . При $K = 2$ неравенство (1) принимает вид

$$\mu_1 + \mu_2 \geq \text{ord}_E \varphi^* C,$$

но $\text{ord}_E \varphi^* C = \mu_1 + \mu_2$ в этом случае, а неравенство (2) принимает вид

$$2\mu_1 \geq \text{ord}_E \varphi^* C,$$

что также выполнено тривиальным образом. Поэтому можем считать неравенства (1) и (2) выполненными для дивизора E над поверхностью S_i при $i = 2, \dots, K - 2$. Теперь переформулируем неравенства (1), (2) в терминах ориентированного графа, связанного с последовательностью раздутий $\varphi_{i,i-1}$.

2. Ориентированный граф разрешения φ . Стандартным образом (см. например, [2] или [1; глава 2]) определим ориентированный граф Γ , вершины которого суть $E_1, \dots, E_K$, и ориентированное ребро (стрелка) соединяет E_i с E_j (обозначение: $i \rightarrow j$), если $i > j$ и

$$B_{i-1} \in E_j^{i-1}$$

(справа стоит собственный прообраз исключительной прямой $E_j \subset S_j$ на S_{i-1}). Всегда $(i+1) \rightarrow i$. Граф Γ обладает двумя следующими комбинаторными свойствами:

- 1) для индексов $i > j > k$ из $i \rightarrow k$ следует, что $j \rightarrow k$;
- 2) из вершины E_i могут исходить не более двух стрелок.

Оба свойства очевидны.

Для $i > j$ полагаем: p_{ij} есть число путей в Γ из E_i в E_j ; $p_{ii} = 1$ по определению; для $i < j$ имеем $p_{ij} = 0$. Очевидно,

$$p_i = \text{ord}_E \varphi_{K,i}^* E_i = p_{Ki}$$

в смысле последнего определения. Теперь неравенства (1) и (2) принимают вид

$$p_1 \mu_2 + \mu_1 \left(\sum_{i=3}^K p_i + 1 \right) \geq \sum_{i=1}^K p_i \mu_i, \quad (3)$$

$$\mu_1 \left(\sum_{i=2}^K p_i + 1 \right) \geq \sum_{i=1}^K p_i \mu_i \quad (4)$$

соответственно. В этом виде и будем их доказывать.

Числа путей p_i обладают хорошо известным свойством: для любого $i < K$ имеем равенство

$$p_i = \sum_{j \rightarrow i} p_j.$$

Также хорошо известно, что для любого $i < K$ имеет место неравенство

$$\mu_i \geq \sum_{j \rightarrow i} \mu_j.$$

Из последнего неравенства легко получается следующее утверждение: существуют целые неотрицательные числа $a_1, \dots, a_K \in \mathbb{Z}_+$ такие, что для любого $i = 1, \dots, K$ справедливо равенство

$$\mu_i = \sum_{j=i}^K p_{ji} a_j,$$

однако нам здесь оно не нужно. Поскольку элементарные кратности μ_i не возрастают, $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots$, очевидным образом справедливо неравенство

$$\mu_1 \left(\sum_{i=1}^K p_i \right) \geq \sum_{i=1}^K p_i \mu_i, \quad (5)$$

которое несколько слабее, чем (3) и (4). Легко проверить, что для случая общего положения, когда граф Γ есть цепь, $p_1 = \dots = p_K$, неравенство (5) не может быть усилено: оно превращается в равенство при $\mu_1 = \dots = \mu_K$. В этом случае неравенства (3), (4) и (5) совпадают. Разница между этими неравенствами появляется в тех случаях, когда граф Γ не есть цепь и эта разница тем сильнее, чем больше в графе Γ дополнительных стрелок $i \rightarrow j$ для $i \geq j+2$.

3. Начальный отрезок графа Γ . Очевидно, имеет место один из следующих двух случаев:

- $p_1 = p_2$, так что нет стрелки из вершины E_3 в E_1 ;
- вершины E_i , $i \in \{3, \dots, k\}$, и, кроме вершины E_2 , только эти вершины, соединены стрелкой с E_1 , так что $p_1 = p_2 + \dots + p_k$.

Докажем неравенство (3) в первом случае. Из неравенства (4), примененного к подграфу с вершинами $E_2, \dots, E_K$ и поверхности S_1 вместо S (предположение индукции) получаем оценку

$$p_1\mu_1 + \sum_{i=2}^K p_i\mu_i \leq p_1\mu_1 + \mu_2 \left(\sum_{i=3}^K p_i + 1 \right),$$

так что (3) будет установлено, если

$$p_1\mu_1 + \mu_2 \left(\sum_{i=3}^K p_i + 1 \right) \leq p_1\mu_2 + \mu_1 \left(\sum_{i=3}^K p_i + 1 \right).$$

Но последнее неравенство следует из того, что $\mu_1 \geq \mu_2$ и верна оценка

$$p_1 \leq \sum_{i=3}^K p_i + 1;$$

см. лемму 2.7 в [1; гл. 2]. Этим доказательство оценки (3) в первом случае завершено.

Рассмотрим второй случай. Здесь $p_2 = \dots = p_{k-1}$ и

$$\mu_1 \geq \mu_2 + \dots + \mu_k.$$

Неравенство (3) переписывается в виде

$$(p_2 + \dots + p_k)\mu_2 + \mu_1 \left(\sum_{i=k+1}^K p_i + 1 - p_2 \right) \geq p_2\mu_2 + \dots + p_k\mu_k + \sum_{i=k+1}^K p_i\mu_i.$$

С учетом все той же леммы 2.7 в [1; гл. 2] заключаем, что (3) следует из неравенства

$$p_k\mu_2 + \mu_{k-1} \left(\sum_{i=k+1}^K p_i + 1 - p_2 \right) \geq \sum_{i=k}^K p_i\mu_i$$

(поскольку $\mu_1 \geq \mu_{k-1}$). В свою очередь, последнее неравенство следует из оценки

$$\mu_{k-1} \left(\sum_{i=k}^K p_i + 1 \right) \geq \sum_{i=k-1}^K p_i\mu_i,$$

поскольку $p_2 = p_{k-1}$ и $\mu_2 \geq \mu_{k-1}$; однако последняя оценка есть в точности (4) для укороченного графа с вершинами $E_{k-1}, \dots, E_K$.

Таким образом, рассматривая начальный отрезок графа Γ , мы показали, что неравенство (3) следует из неравенства (4) для поверхности S_i , где $i \geq 1$.

4. Доказательство неравенства (4). Снова рассмотрим начальный отрезок графа Γ . Если $p_1 = p_2$, т.е. вершина E_3 не соединена с E_1 стрелкой, то неравенство (4) следует из оценки

$$\mu_2 \left(\sum_{i=3}^K p_i + 1 \right) \geq \sum_{i=2}^K p_i\mu_i,$$

которая представляет собой неравенство (4) для поверхности S_1 , и очевидного неравенства $\mu_1 \geq \mu_2$. Поэтому, как и в п. 3, предположим, что $i \rightarrow 1$ для $i = 3, \dots, k$. Поскольку $\mu_1 \geq \mu_2 + \dots + \mu_k$, неравенство (4) следует из оценки

$$(\mu_2 + \dots + \mu_k) \left(\sum_{i=k+1}^K p_i + 1 \right) \geq p_2 \mu_2 + \dots + p_k \mu_k + \sum_{i=k+1}^K p_i \mu_i. \quad (6)$$

Применяя лемму 2.7 из [1; гл. 2], оценим левую часть последнего неравенства снизу числом

$$p_{k-1} \left(\sum_{i=2}^{k-1} \mu_i \right) + \mu_k \left(\sum_{i=k+1}^K p_i + 1 \right).$$

Поскольку $p_2 = \dots = p_{k-1}$, неравенство (6) вытекает из оценки (4) для поверхности S_k . Доказательство теорем 1 и 2 закончено.

5. Заключительные замечания. Неравенствам теорем 1 и 2 можно придать следующий вид.

ТЕОРЕМА 3. *Предположим, что $\mu_1 \leq n$. Тогда справедливы оценки*

$$\begin{aligned} (p_1 - p_2) \mu_2 + n \left(\sum_{i=3}^K p_i + 1 \right) &\geq \sum_{i=3}^K p_i \mu_i + p_1 n, \\ p_2 (\mu_1 - \mu_2) + n \left(\sum_{i=3}^K p_i + 1 \right) &\geq \sum_{i=3}^K p_i \mu_i + p_1 n. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Элементарная проверка с учетом леммы 2.7 из [1; гл. 2] показывает, что первое и второе неравенства теоремы 3 следуют из оценок (3) и (4) соответственно. Доказательство закончено.

Неравенства теоремы 3 очень полезны для изучения групп бигулярных автоморфизмов некоторых аффинных трехмерных многообразий, являющихся дополнениями обильных дивизоров в трехмерных многообразиях Фано. Для этих задач эффективны методы бирациональной геометрии: бигулярный автоморфизм аффинного дополнения рассматривается как бирациональный автоморфизм проективного многообразия, бигулярный на заданном дополнении. Подробности будут приведены в другой работе, посвященной указанным задачам.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A. Pukhlikov, *Birationally Rigid Varieties*, Math. Surveys Monogr., **190**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2013. [2] В. А. Исковских, Ю. И. Манин, *Матем. сб.*, **86**:1 (1971), 140–166.

А. В. Пухликов

University of Liverpool, United Kingdom

E-mail: pukh@liv.ac.uk

Поступило

18.10.2014