Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. А. Калякин, Функции Ляпунова в теоремах обоснования асимптотики, *Матем. заметки*, 2015, том 98, выпуск 5, 695–709

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10667>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 15:47:58

Функции Ляпунова в теоремах обоснования асимптотики

Л. А. Калякин

Для нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений рассматривается формальное асимптотическое решение в окрестности особой точки. Решается проблема существования точного решения с такой асимптотикой и устойчивости этого решения. Основным инструментом исследования является функция Ляпунова для системы, линеаризованной на формальном решении.

Библиография: 18 названий.

DOI: 10.4213/mzm10667

1. Постановка задачи. Цель данной заметки состоит в выделении класса задач, в которых обоснование асимптотики на бесконечности получается вместе с доказательством устойчивости соответствующего точного решения.

Один из способов анализа нелинейных динамических систем вида

$$\frac{dx}{dt} = \mathbf{a}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^p, \quad t > t_0 \quad (1.1)$$

состоит в построении степенных рядов, которые формально удовлетворяют уравнениям. Конструкции в виде сходящихся рядов, которые приводят к аналитическим решениям, здесь особо не выделяются и не обсуждаются. Основные результаты относятся к асимптотике вблизи особой точки, где решение заведомо неаналитическое. Заменой времени t дело можно свести к рядам по обратным степеням в окрестности бесконечности; например,

$$\mathbf{x}(t) \approx \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{x}_k t^{-\alpha_k}, \quad \alpha_k \uparrow \infty, \quad k \rightarrow \infty. \quad (1.2)$$

Структура рядов может быть более сложной и включать логарифмы и экспоненты от t , см. [1]–[3]; коэффициенты часто (но не всегда) берутся постоянными. Сходимость рядов не гарантируется, и связь таких конструкций с настоящими решениями устанавливается путем интерпретации их, как асимптотических разложений в стиле Пуанкаре. Обоснование сводится к доказательству теоремы существования (обычно локальной) и к оценке остатка. Для общих нелинейных систем такие доказательства выглядят довольно сложно [3]–[5]. И хотя практическое значение обычно имеют лишь главные члены асимптотики, точные утверждения для полных разложений вызывают интерес как теоретиков так и прикладников.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 14-11-00078).

ПРИМЕР. Описание начального этапа захвата в авторезонанс при учете слабой диссипации приводит к следующей системе уравнений [6]:

$$\frac{d\rho}{dt} = -\gamma\rho + t \cos \psi, \quad \rho \left[\frac{d\psi}{dt} - \rho^2 + \nu^2 t \right] = -t \sin \psi, \quad \gamma, \nu^2 = \text{const} > 0. \quad (1.3)$$

Авторезонансу соответствуют решения с неограниченно растущей компонентой $\rho(t)$. Асимптотическое решение строится в виде рядов

$$\rho(t) \approx \rho_{-1} t^{1/2} + \rho_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n t^{-n/2}, \quad \psi(t) \approx \psi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n t^{-n/2}, \quad t \rightarrow \infty. \quad (1.4)$$

Коэффициенты вычисляются по рекуррентным формулам, которые извлекаются из уравнений (1.3) путем приравнивания выражений при одинаковых степенях t . На первых двух шагах получаются соотношения

$$\rho_{-1} = \nu, \quad \psi_0 = \pm \frac{\pi}{2}, \quad \rho_0 = \pm \frac{1}{2} \nu^2, \quad \psi_1 = \pm \gamma \nu.$$

На этом пути находятся две серии коэффициентов $\rho_n = \rho_n^{\pm}$, $\psi_{n+1} = \psi_{n+1}^{\pm}$ и строятся два формальных решения. Для системы (1.3) возможны и другие, похожие конструкции с неограниченно растущей компонентой $\psi(t)$.

Постановка проблемы. Формальное решение в виде степенного ряда типа (1.2) обычно не содержит произвольных констант, и соответствующее точное решение может оказаться единственным¹. Однако иногда такой ряд представляет асимптотику семейства решений. Разные решения семейства оказываются экспоненциально близкими на бесконечности, и поэтому степенная асимптотика для них будет одинаковой. Ниже рассматриваются задачи, в которых приближения типа (1.2) дают асимптотику семейства, которое соответствует общему решению. В примере (1.3) это случается при выборе формального решения с $\psi_0 = \pi/2$.

Есть разные способы доказательства устойчивости решения с заданной асимптотикой. Один из них состоит в исследовании асимптотики общего решения вблизи выделенного. Например, часто используются формулы типа ВКБ-приближений [7]–[10]. Реализация такого подхода в нелинейных задачах оказывается весьма громоздкой и бывает крайне затруднительной в случае экспоненциальных асимптотик [6]. Между тем, практический интерес представляет не асимптотика общего, а устойчивость одного, выделенного решения. Свойство устойчивости по Ляпунову тем более важно, что оно обеспечивает анализ математической модели при негладких и случайных возмущениях [11]–[13], что не доступно асимптотическим методам. Поэтому для приложений более востребованным направлением выглядит доказательство устойчивости без обращения к общему решению.

Обычно устойчивость исследуется отдельно от построения и обоснования асимптотики. При этом в доказательстве устойчивости, например, при конструировании функции Ляпунова может использоваться асимптотика вместо точного решения [14]. Однако такие доказательства выглядят, как условные утверждения, поскольку

¹ Иногда среди коэффициентов обнаруживаются произволы, которые оказываются константами интегрирования в соответствующих семействах решений.

предполагают наличие теорем обоснования. Между тем, доказательство устойчивости и обоснование асимптотики можно объединить, как указывалось в [1]. Этот подход реализуется здесь в случае, когда устойчивость экспоненциальная.

Исходными объектами в данной работе являются система дифференциальных уравнений (1.1) и асимптотическое решение (АР) степенного типа. Под АР понимается последовательность вектор-функций $\{\mathbf{X}_n(t)\}$ и показателей $\alpha_n \uparrow \infty$, $n = 0, 1, 2, \dots$, со свойствами

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{n+1}(t) - \mathbf{X}_n(t) &= o(t^{-\alpha_n}), \quad t \rightarrow \infty, \\ \frac{d\mathbf{X}_n}{dt} &= \mathbf{a}(\mathbf{X}_n, t) + \mathbf{R}_n(t), \quad t > t_0, \quad \mathbf{R}_n(t) = o(t^{-\alpha_n}), \quad t \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (1.5)$$

В качестве АР часто используется последовательность частичных сумм рядов типа (1.2). Однако, конструкция АР может быть более сложной [15]; от структуры функций $\{\mathbf{X}_n(t)\}$ предъявляемые ниже результаты не зависят. В дальнейшем полагаем $\mathbf{X}_n(t) = \mathbf{X}(t)$, и индекс n будем по возможности опускать для уменьшения громоздкости формул.

Ставятся вопросы:

- 1) о существовании точного решения системы (1.1) с асимптотикой

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}(t) + \mathcal{O}(t^{-n+s}) \quad \text{при } t \rightarrow \infty;$$

- 2) об устойчивости такого решения.

Обоснование асимптотики сводится к оценке остатка $\mathbf{x}(t) - \mathbf{X}(t)$ через величину невязки $\mathbf{R}(t)$. Для дифференциальных уравнений порядок убывания остатка иногда не совпадает с порядком убывания невязки. Это видно из банального примера $x' = -nt^{-n-1}$, в котором решение $x = t^{-n}$ убывает медленнее правой части. В общем случае остаток оценивается через $\mathcal{O}(t^{-n+s})$ со сдвигом порядка на величину $s \geq 0$. Число s характеризует как свойства исходной системы так и эффективность используемых оценок. Главное требование при получении таких оценок – независимость сдвига s от n , т.е. от выбора АР.

Основной результат состоит в доказательстве:

- 1) существования точного решения с указанной асимптотикой;
- 2) его устойчивости для определенного класса задач; класс задач выделяется условиями на линеаризованную систему.

Главное требование накладывается на матрицу $\partial_{\mathbf{x}}\mathbf{a}(\mathbf{X}(t), t)$. Предполагается, что ее собственные значения $\lambda_j(t)$ имеют отрицательные действительные части, не слишком быстро стремящиеся к нулю при $t \rightarrow \infty$. Дополнительные ограничения формулируются в виде условий на собственные векторы этой матрицы. Фактически выделяются задачи, в которых устойчивость определяется свойствами линейной части системы в окрестности формального решения. Если здесь вместо формального использовать точное решение, то подобные результаты хорошо известны [12].

На границу t_0 рассматриваемого промежутка $t \in (t_0, \infty)$ накладываются ограничения в теореме существования, и значение t_0 может оказаться больше, чем в исходной постановке (1.5). Это обстоятельство не играет роли в анализе асимптотики и устойчивости при $t \rightarrow \infty$, и потому мы сразу будем считать, что $t_0 > 0$ достаточно велико и не меняется в последующих утверждениях.

2. Редукция задачи. Как обычно, обоснование асимптотики сводится к исследованию задачи для остатка. Точное решение ищется в виде суммы

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}(t) + t^{-\alpha_n} \mathbf{Y}(t).$$

Уравнение для новой искомой вектор-функции $\mathbf{Y}(t)$ получается из (1.1) с учетом тождества (1.5):

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = t^{\alpha_n} [\mathbf{a}(\mathbf{X} + t^{-\alpha_n} \mathbf{Y}, t) - \mathbf{a}(\mathbf{X}, t)] + \alpha_n t^{-1} \mathbf{Y} + \mathbf{F}(t), \quad \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^p, \quad t > t_0. \quad (2.1)$$

Здесь

$$\mathbf{F}(t) = t^{\alpha_n} \mathbf{R}(t) = o(1), \quad t \rightarrow \infty.$$

Для обоснования достаточно доказать существование хотя бы одного решения с умеренным ростом на бесконечности $\mathbf{Y}(t) = \mathcal{O}(t^s)$ ($s \geq 0$ не зависит от выбора АР).

Центральную роль в дальнейшем играет соответствующее однородное уравнение

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = t^{\alpha_n} [\mathbf{a}(\mathbf{X} + t^{-\alpha_n} \mathbf{y}, t) - \mathbf{a}(\mathbf{X}, t)] + \alpha_n t^{-1} \mathbf{y}, \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^p, \quad t > t_0, \quad (2.2)$$

для которого точка $\mathbf{y} = 0$ является положением равновесия. Исходное уравнение для остатка (2.1) будет рассматриваться как возмущение уравнения (2.2). Таким образом, приходим к задаче об устойчивости равновесия относительно постоянно действующего возмущения. Основным инструментом, который используется ниже, является функция Ляпунова для системы (2.2). Наличие функции Ляпунова обеспечивает не только устойчивость, но и теорему существования глобального решения для возмущенной системы (2.1). Такой подход, конечно, не нов [16], [13].

В окрестности равновесия $\mathbf{y} = 0$ уравнение (2.2) выгодно преобразовать путем выделения линейной части и диагонализации ее в главном члене асимптотики. С этой целью вводится матрица, в общем случае не симметричная:

$$\mathcal{A}(t) = \left. \frac{\partial \mathbf{a}(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{X}(t)},$$

и система (2.2) переписывается в виде уравнения для вектор-столбца

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathcal{A}(t)\mathbf{y} + \mathbf{a}_1(\mathbf{y}, t) + \alpha_n t^{-1} \mathbf{y}, \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, \quad t > t_0.$$

Нелинейные (в асимптотике при $\mathbf{y} \rightarrow 0$) члены содержатся в векторе

$$\mathbf{a}_1(\mathbf{y}, t) \stackrel{\text{def}}{=} t^{\alpha_n} [\mathbf{a}(\mathbf{X} + t^{-\alpha_n} \mathbf{y}, t) - \mathbf{a}(\mathbf{X}, t)] - \mathcal{A}(t)\mathbf{y}.$$

Пусть матрица $\mathcal{A}(t)$ соответствует оператору простой структуры [17], так что она приводится к диагональной форме:

$$\mathcal{T}^{-1}(t)\mathcal{A}(t)\mathcal{T}(t) = \Lambda(t) \equiv \{\text{diag } \lambda_j(t)\}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Для диагонализации используется фундаментальная матрица $\mathcal{T}(t)$, составленная из правых собственных векторов матрицы $\mathcal{A}(t)$. Диагональная матрица Λ состоит

из собственных значений $\lambda_j(t)$. Нормировку собственных векторов и соответственно матриц $\mathcal{T}(t)$, $\mathcal{T}^{-1}(t)$ можно выбирать разными способами. Для дальнейшего удобно считать, что компоненты обратной матрицы $\mathcal{T}^{-1}(t)$, составленной из левых собственных векторов, ограничены при $t \rightarrow \infty$. Понятно, что для матрицы $\mathcal{T}(t)$ покомпонентная ограниченность такой нормировкой не гарантируется (см. Дополнение).

Матрица $\mathcal{T}(t)$ используется для замены переменных: $\mathbf{y} = \mathcal{T}\mathbf{z}$. Для новой искомой вектор-функции $\mathbf{z}(t)$ получается система, которую будем называть *приведенной*:

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = \Lambda(t)\mathbf{z} + \alpha_n t^{-1}\mathbf{z} - \mathcal{M}(t)\mathbf{z} + \mathbf{b}(\mathbf{z}, t), \quad \mathbf{z} \in \mathbb{C}^p, \quad t > t_0. \quad (2.3)$$

Дополнительное слагаемое с матрицей $\mathcal{M}(t) = \mathcal{T}^{-1}(t)\mathcal{T}'(t)$ в линейной части возникает из-за производной $\mathcal{T}'(t)$. Нелинейное слагаемое определяется формулой

$$\mathbf{b}(\mathbf{z}, t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{T}^{-1}(t)(t^{\alpha_n}[\mathbf{a}(\mathbf{X} + t^{-\alpha_n}\mathcal{T}(t)\mathbf{z}, t) - \mathbf{a}(\mathbf{X}, t)]) - \Lambda(t)\mathbf{z} \quad (2.4)$$

и будет мало:

$$\mathbf{b}(\mathbf{z}, t) = \mathcal{O}(|\mathbf{z}|^2) \quad \text{при } \mathbf{z} \rightarrow 0,$$

если исходная система была достаточно гладкая: $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) \in C^2$ в окрестности АР.

Приведенная конструкция зависит от выбора АР $\mathbf{X} = \mathbf{X}_n(t)$, и ко всем введенным объектам следовало бы навесить индекс n .

3. Ограничения. Основные ограничения касаются матрицы $\mathcal{A}(t)$ и формулируются в терминах собственных значений. Требуется, чтобы их действительные части были отрицательны:

$$\exists \lambda_0 > 0: \quad \operatorname{Re} \lambda_j(t) \leq -\lambda_0 \quad \forall t > t_0, \quad j = 1, \dots, n. \quad (3.1)$$

Это, довольно грубое условие обычно накладывает ограничение лишь на выбор главных членов АР, и для его проверки не требуется вычисление старших поправок. Так, в примере (1.4) выбор $\psi_0 = \pi/2$ обеспечивает требование (3.1) независимо от остальных коэффициентов АР.

В случае диагональной системы

$$\frac{dz}{dt} = \Lambda(t)\mathbf{z}$$

условия (3.1) гарантируют экспоненциальное убывание любой компоненты решения:

$$|z_j(t)| = \exp\left(\int \lambda_j(t) dt\right) \leq \mathcal{O}(\exp(-\lambda_0 t)), \quad t \rightarrow \infty, \quad j = 1, \dots, n.$$

Добавка к выделенной диагональной части более младшего слагаемого $\alpha_n t^{-1}\mathbf{z}$ не проявляется в подобной оценке.

В общей ситуации линейная часть системы (2.3) не диагонализуется полностью, что проявляется в наличии слагаемого с множителем $\mathcal{M}(t) \not\equiv 0$. Однако, в известных примерах матрица $\mathcal{M}(t)$ оказывается подчиненной диагональной матрице $\Lambda(t)$.

Ниже используется подобное требование “подчиненности” в форме условия на действительную часть квадратичной формы

$$\exists m < \lambda_0: \quad -\operatorname{Re}(\mathbf{z}^* \mathcal{M}(t) \mathbf{z}) \equiv -\operatorname{Re}(\mathbf{z}^* \mathcal{T}^{-1}(t) \mathcal{T}'(t) \mathbf{z}) \leq m |\mathbf{z}|^2 \quad \forall t > t_0, \quad \mathbf{z} \in \mathbb{C}^p. \quad (3.2)$$

Здесь $\mathbf{z}^*$ – вектор-строка, транспонированная и комплексно сопряженная к вектор-столбцу $\mathbf{z}$. Требование (3.2) представляет собой ограничение на исходную систему и АР. Иногда бывает легче проверить более грубое достаточное условие

$$\exists m < \lambda_0: \quad \|\mathcal{T}^{-1}(t) \mathcal{T}'(t)\| \leq m \quad \forall t > t_0.$$

Здесь и всюду ниже считается, что норма матрицы определена через норму векторов, [17; с. 410]. В качестве нормы (модуля) вектора берется эрмитова норма, связанная со скалярным произведением $|\mathbf{z}| = \sqrt{(\mathbf{z}, \mathbf{z})} = \sqrt{\mathbf{z}^* \mathbf{z}}$.

Оставшиеся слагаемые в системе (2.3) являются существенно нелинейными в окрестности равновесия. Для них предполагается наличие оценки:

$$\exists M_b, \kappa \geq 0: \quad |\mathbf{b}(\mathbf{z}, t)| \leq M_b \exp(\kappa t) |\mathbf{z}|^2 \quad \forall t > t_0, \quad |\mathbf{z}| < 1. \quad (3.3)$$

Такое ограничение с экспоненциально растущим множителем может показаться слишком слабым для устойчивости. Однако, из структуры уравнения (2.3) можно понять, что, если линейная часть имеет экспоненциально убывающие решения, то в полной системе вблизи равновесия нелинейности могут допускать экспоненциально растущие множители с показателем $\kappa < \kappa_0$ не слишком большим. Критическим оказывается значение $\kappa_0 \stackrel{\text{def}}{=} (\lambda_0 - m)$.

Отметим, что в примере (1.3) при выборе $\psi_0 = \pi/2$ действительная часть собственных значений $\lambda_j(t)$ оказывается строго отрицательной, матрица $\mathcal{T}^{-1}(t) \mathcal{T}'(t) = \mathcal{O}(t^{-1})$ стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$, а нелинейная часть $|\mathbf{b}(\mathbf{z}, t)| \leq M_b t^k |\mathbf{z}|^2$ содержит степенной рост по t с показателем $k = 1/4$. Наличие неограниченно растущего множителя t^k в последней оценке провоцируется наличием растущих коэффициентов в исходной системе. От этого множителя можно было бы избавиться заменой переменных $\mathbf{z} = t^{-k} \tilde{\mathbf{z}}$ (в общем случае (3.3) нужна замена с экспоненциальным множителем). Однако, чтобы не загромождать изложение излишним преобразованием, выгодно внести растущий множитель в функцию Ляпунова.

4. Устойчивость в приведенной системе. Функция Ляпунова для приведенной системы (2.3) берется в виде квадратичной формы с весовым множителем:

$$U_\nu(\mathbf{z}, t) = \exp(2\nu t) |\mathbf{z}|^2 \equiv \exp(2\nu t) \mathbf{z}^* \mathbf{z}.$$

Значение $\nu \geq 0$ в показателе экспоненты уточняется ниже; оно зависит от свойств исходной системы. Такая структура удобна при наличии растущих множителей в нелинейном слагаемом. Вычисление полной производной этой функции вдоль траектории системы (2.3) приводит к формуле

$$\left. \frac{dU_\nu}{dt} \right|_{(2.3)} = 2 \exp(2\nu t) \operatorname{Re} \left[\sum_{j=1}^n \lambda_j |z_j|^2 - \mathbf{z}^* \mathcal{M}(t) \mathbf{z} + \mathbf{z}^* \mathbf{b}(\mathbf{z}, t) + \nu |\mathbf{z}|^2 \right]. \quad (4.1)$$

Вся оставшаяся часть данного раздела сводится к выяснению условий, при которых эта производная будет отрицательной.

Положительно определенную квадратичную форму для U_ν можно было бы взять в общей форме и формулировать ограничения на исходную систему неявно в виде требования отрицательности производной (4.1), как это сделано в [12; с. 109]. Однако, имея в виду дальнейшее использование функции Ляпунова, представляется выгодным предъявить условия в явной форме.

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполнены условия (3.1)–(3.3) и показатель $\kappa \geq 0$ в оценке нелинейности (3.3) не слишком большой: $\kappa < \kappa_0 \stackrel{\text{def}}{=} (\lambda_0 - m)$. Тогда равновесие $\mathbf{z} = 0$ в системе (2.3) экспоненциально устойчиво, и для функции Ляпунова $U_\nu(\mathbf{z}, t)$ с показателем ν из промежутка $\nu \in [\kappa, \kappa_0)$ имеет место неравенство

$$\left. \frac{dU_\nu}{dt} \right|_{(2.3)} \leq -\gamma U_\nu(\mathbf{z}, t), \quad \gamma = \lambda_0 - m - \nu > 0, \quad (4.2)$$

на любой траектории системы (2.3) с начальной точкой $(\mathbf{z}_0, t_0)$, удовлетворяющей неравенству

$$|\mathbf{z}_0| < \frac{\lambda_0 - m - \nu}{2M_b} \exp(-\nu t_0). \quad (4.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия (3.3) вытекает неравенство

$$|\mathbf{z}^* \mathbf{b}(\mathbf{z}, t)| \leq M_b \exp(\kappa t) |\mathbf{z}|^3 \leq M_b \exp((\kappa - \nu)t) U_\nu^{1/2}(\mathbf{z}, t) |\mathbf{z}|^2.$$

Если значение ν выбрать с условием $\nu \geq \kappa$, то это неравенство позволяет оценить производную, определяемую формулой (4.1), следующим образом:

$$\left. \frac{dU_\nu}{dt} \right|_{(2.3)} < -2U_\nu(\mathbf{z}, t) [\lambda_0 - m - \nu - M_b U_\nu^{1/2}]. \quad (4.4)$$

Если выбрать ν так, чтобы $\lambda_0 - m > \nu \geq \kappa$, то выражение в скобках будет положительным при всех достаточно малых U_ν .

Формально требуемое неравенство (4.2) получается отсюда, если выбрать начальную точку так, чтобы

$$\sqrt{M_b U_\nu(\mathbf{z}_0, t_0)} < \frac{\lambda_0 - m - \nu}{2}.$$

Последнее соотношение эквивалентно условию (4.3) и гарантирует отрицательность производной (4.4) вблизи начального момента. Поскольку $U_\nu(\mathbf{z}, t)$ оказывается убывающей вдоль траектории, то неравенство $\sqrt{M_b U_\nu(\mathbf{z}, t)} < (\lambda_0 - m - \nu)/2$ сохраняется в последующие моменты, что приводит к (4.2).

Таким образом, функция $U_\nu(\mathbf{z}, t)$ убывает вдоль всей траектории системы (2.3). Поскольку $|\mathbf{z}|^2 = \exp(-2\nu t) U_\nu(\mathbf{z}, t)$, $\nu \geq 0$, то равновесие $\mathbf{z} = 0$ асимптотически устойчиво. Более того, из неравенства (4.2) вытекает, что функция Ляпунова вдоль траектории мажорируется решением дифференциального уравнения

$$\frac{du}{dt} = -\gamma u(t).$$

Мажоранта записывается в виде оценки

$$U_\nu(\mathbf{z}, t)|_{(2.3)} \leq C \exp(-\gamma t)$$

с константой $C = \text{const}$, зависящей от траектории. Отсюда и с учетом определения функции U вытекает экспоненциальная оценка на траектории

$$|\mathbf{z}(t)|^2 \leq C \exp(-(\lambda_0 - m + \nu)t) \quad \forall \nu < \lambda_0 - m.$$

Теорема доказана.

5. Постоянно действующие возмущения. Построенная выше функция Ляпунова неограниченно растет по времени. Поэтому в задаче о постоянно действующих возмущениях формальная ссылка на известные результаты оказывается невозможной. Ниже предлагается подходящая модификация теоремы Малкина [11] для таких случаев. Рассматривается общая постановка задачи. Результаты для системы (2.3) получаются как следствие.

В классе комплекснозначных функций рассматривается система уравнений

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = \mathbf{A}(\mathbf{z}, t), \quad \mathbf{z} \in \mathbb{C}^p. \quad (5.1)$$

Пусть $\mathbf{A}(\mathbf{0}, t) \equiv \mathbf{0}$, так что точка $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ – положение равновесия. Соответствующая возмущенная задача имеет вид

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = \mathbf{A}(\mathbf{z}, t) + \mu \mathbf{g}(\mathbf{z}, t), \quad \mathbf{z}|_{t=t_0} = \mathbf{z}_0. \quad (5.2)$$

Здесь μ – комплексный параметр, измеряющий величину возмущения. В общей ситуации точка $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ не является равновесием системы (5.2). Обсуждается вопрос о траектории возмущенной системы: остается ли она вблизи точки $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ при малых $|\mu|$ и $|\mathbf{z}_0|$? Класс допустимых вектор-функций $\mathbf{A}(\mathbf{z}, t)$ и возмущений $\mathbf{g}(\mathbf{z}, t)$ определяется требованием существования локального решения задачи Коши при любых начальных данных в окрестности равновесия. Считается, что эти вектор-функции непрерывны по $\mathbf{z}, t$. Факт существования глобального решения (при всех $t > t_0$) устанавливается параллельно с устойчивостью. При этом ключевую роль играет функция Ляпунова.

В определении устойчивости, которое соответствует Малкину, для возмущения используется равномерная норма $\|\mathbf{g}\| = \sup_{\mathbf{z}, t} |\mathbf{g}(\mathbf{z}, t)|$ в окрестности равновесия, например, при $|\mathbf{z}| < 1, t \geq t_0$ и соответствующий шар $\|\mathbf{g}\| < M$. Ввиду выделенного в системе (5.2) множителя μ достаточно рассмотреть шар единичного радиуса. Как для возмущения, так и для решения может использоваться другая норма, например, весовая $\sup_{t > t_0} \|t^{-s} \mathbf{z}(t)\|$. Напомним определение устойчивости.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Равновесие $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ в системе (5.1) *устойчиво* при $t > t_0$ относительно постоянно действующих возмущений, если при

$$\forall \varepsilon \quad \exists \delta, \Delta > 0 \quad \forall |\mathbf{z}_0| < \delta \quad |\mu| < \Delta, \quad \|\mathbf{g}\| < 1$$

решение уравнений (5.2) с начальными данными $\mathbf{z}(t_0) = \mathbf{z}_0$ обладает свойством

$$|\mathbf{z}(t)| < \varepsilon \quad \forall t > t_0.$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть в окрестности равновесия существует непрерывно дифференцируемая функция $U(\mathbf{z}, t)$ со свойствами

$$\exists M_0, M_1 > 0: \quad |\mathbf{z}|^2 v(t) \leq U(\mathbf{z}, t) \leq M_0 |\mathbf{z}|^2 v(t), \quad \left| \frac{\partial U}{\partial \mathbf{z}} \right| \leq M_1 \frac{U}{|\mathbf{z}|} \quad \forall |\mathbf{z}| < 1, \quad t > t_0,$$

где $v(t) \geq v_0 > 0$ – неубывающая положительная функция, и

$$\exists \gamma > 0: \quad \left. \frac{dU}{dt} \right|_{(5.1)} \leq -\gamma U.$$

Тогда

- 1) при малых $|\mu|$ для возмущенной системы (5.2) с непрерывной функцией $\mathbf{g}(\mathbf{z}, t)$ и с начальными данными из окрестности нуля существует глобальное решение задачи Коши;
- 2) равновесие устойчиво относительно такого класса постоянно действующих возмущений.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. На множестве непрерывных возмущений зафиксируем в равномерной норме шар единичного радиуса

$$\|\mathbf{g}\| = \sup_{|\mathbf{z}| < 1, t > t_0} |\mathbf{g}(\mathbf{z}, t)| < 1.$$

Пусть $\mathbf{z} = \mathbf{z}(t)$ – решение уравнения (5.2) с одной из таких функций $\mathbf{g}$ и с начальным условием $\mathbf{z}|_{t=t_0} = \mathbf{z}_0$. Такое решение существует, по крайней мере, локально.

Вычислим производную функции Ляпунова вдоль траектории этого решения, т.е. в силу системы (5.2):

$$\left. \frac{dU}{dt} \right|_{(5.2)} = \left. \frac{dU}{dt} \right|_{(5.1)} + \mu \frac{\partial U}{\partial \mathbf{z}} \mathbf{g}(\mathbf{z}, t).$$

Каждое слагаемое в этом соотношении является действительной функцией.

Задав произвольное число $\varepsilon > 0$, оценим производную в кольце $\delta < |\mathbf{z}| < \varepsilon$ при всех $t > t_0$. В силу наложенных в теореме ограничений получаем

$$\left. \frac{dU}{dt} \right|_{(5.2)} \leq -\gamma U + |\mu| M_1 \frac{U}{|\mathbf{z}|} < -\left(\gamma - M_1 \frac{|\mu|}{\delta}\right) U.$$

Если параметр μ выбрать достаточно малым, производная будет отрицательная

$$\left. \frac{dU}{dt} \right|_{(5.2)} < 0 \quad \forall |\mu| < \Delta = \frac{\delta \gamma}{M_1}, \quad \delta < |\mathbf{z}| < \varepsilon, \quad t > t_0.$$

Поскольку производная отрицательна, то функция $U(\mathbf{z}, t)$ обязана убывать вдоль траектории в цилиндрическом слое $\delta < |\mathbf{z}| < \varepsilon$, $t > t_0$.

На внутренней и внешней границах слоя эта функция имеет оценки

$$U(\mathbf{z}, t)|_{|\mathbf{z}|=\delta} \leq M_0 \delta^2 v(t), \quad \varepsilon^2 v(t) \leq U(\mathbf{z}, t)|_{|\mathbf{z}|=\varepsilon}.$$

Если значение δ берется с условием $\delta = \varepsilon / 2\sqrt{M_0}$, то максимум на внутренней границе меньше минимума на внешней:

$$\max_{|\mathbf{z}|=\delta} U(\mathbf{z}, t) < \varepsilon^2 v(t) \leq \min_{|\mathbf{z}|=\varepsilon} U(\mathbf{z}, t) \quad \forall t > t_0.$$

Пусть начальная точка выбрана достаточно близко к равновесию: $|\mathbf{z}_0| < \delta$. Траектория соответствующего решения $\mathbf{z} = \mathbf{z}(t)$ либо остается в шаре $|\mathbf{z}(t)| \leq \delta$, либо в некоторый момент $t = t_1$ пересекает внутреннюю границу и входит в кольцо. При этом значение функции U на входе в кольцо меньше минимума на внешней границе:

$$|U(\mathbf{z}(t_1), t_1)| \leq \max_{|\mathbf{z}|=\delta} U(\mathbf{z}, t_1) < m_- \varepsilon^2 v(t_1) \leq \min_{|\mathbf{z}|=\varepsilon} U(\mathbf{z}, t_1).$$

Поскольку $U(\mathbf{z}(t), t)$ убывает на траектории в кольце, а функция $v(t)$ не убывает, то неравенство сохраняется в последующие моменты времени:

$$|U(\mathbf{z}(t), t)| < \varepsilon^2 v(t) \leq \min_{|\mathbf{z}|=\varepsilon} U(\mathbf{z}, t), \quad t > t_1.$$

Следовательно, траектория решения не пересекает внешнюю границу, т.е. остается вблизи равновесия:

$$|\mathbf{z}(t)| < \varepsilon \quad \forall t > t_0.$$

Согласно теореме о продолжении [18] решение существует, пока оно ограничено. Поскольку траектория никогда не выходит из шара радиуса ε , то решение существует глобально при всех $t > t_0$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ. *Равновесие в системе (2.3) устойчиво относительно постоянно действующих непрерывных возмущений, поскольку функция Ляпунова*

$$U_\nu = \exp(2\nu t) |\mathbf{z}|^2 \quad \forall \nu \in [\kappa, \kappa_0)$$

удовлетворяет условиям последней теоремы.

6. Устойчивость задачи для остатка. Приведенные выше результаты об устойчивости равновесия $\mathbf{z} = 0$ для уравнения (2.3) являются вспомогательными. Основным объектом исследования остается неоднородное уравнение для остатка (2.1). В случае общего возмущения $\mathbf{F}(\mathbf{y}, t)$ система типа (2.1) имеет вид

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = t^{\alpha_n} [\mathbf{a}(\mathbf{X} + t^{-\alpha_n} \mathbf{Y}, t) - \mathbf{a}(\mathbf{X}, t)] + \alpha_n t^{-1} \mathbf{Y} + \mu \mathbf{F}(\mathbf{Y}, t), \quad \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^p, \quad t > t_0. \quad (6.1)$$

В конкретном уравнении (2.1) выделение малого множителя μ производится за счет убывания невязки $\mathbf{F}(t) = o(1)$, $t \rightarrow \infty$, и приводит к выбору достаточно большого значения t_0 . Соответствующая приведенная система представляет собой возмущение уравнения (2.3)

$$\frac{d\mathbf{Z}}{dt} = \Lambda(t) \mathbf{Z} + \alpha_n t^{-1} \mathbf{Z} - \mathcal{M}(t) \mathbf{Z} + \mathbf{b}(\mathbf{Z}, t) + \mu \mathbf{G}(\mathbf{Z}, t), \quad \mathbf{Z} \in \mathbb{C}^p, \quad t > t_0. \quad (6.2)$$

Связь между (6.1) и (6.2) описывается формулами

$$\mathbf{Y} = \mathcal{T}(t) \mathbf{Z}, \quad \mathbf{G}(\mathbf{Z}, t) = \mathcal{T}^{-1}(t) \mathbf{F}(\mathbf{Y}, t), \quad \mathcal{M} = \mathcal{T}^{-1} \mathcal{T}',$$

а также соотношением (2.4).

Переход к системе (6.2) делается из соображений упрощения задачи с расчетом получить оценку для $\mathbf{Y}(t)$, используя оценку для $\mathbf{Z}(t)$. Ввиду доказанной теоремы 2

дело сводится к выяснению условий, при которых уравнения (6.1) и (6.2) эквивалентны относительно свойства устойчивости. Ключевым условием оказывается ограничение на рост фундаментальной матрицы. Это условие формулируется в следующей форме:

$$\exists s \geq 0 \quad \forall n \quad \exists M: \quad \|\mathcal{T}^{-1}(t)\| \|\mathcal{T}(t)\| \leq M t^s \quad \forall t > t_0. \quad (6.3)$$

Обратим внимание, что матрица $\mathcal{T}(t)$ зависит от n – от выбора АР. В условии (6.3) требуется, чтобы степень роста (s) не зависела от этого выбора. Бывают ситуации, когда условие (6.3) выполняется тривиально.

ЛЕММА. Если матрица $\mathcal{A}(t)$ – симметрична, то фундаментальная матрица и обратная к ней ограничены, так что $s = 0$ в условии (6.3).

Для доказательства достаточно заметить, что в этом случае (при подходящей нормировке собственных векторов) операция транспонирования дает обратную: $\mathcal{T}^T(t) = \mathcal{T}^{-1}(t)$. Поэтому обе матрицы ограничены одновременно.

К сожалению, требование симметрии является слишком жестким. В конкретном примере (1.3) матрица $\mathcal{A}(t)$ оказывается несимметричной, а матрицы $\mathcal{T}(t)$ (либо $\mathcal{T}^{-1}(t)$) содержат неограниченно растущие компоненты с показателем $s = 1/4$. В таких случаях класс допустимых возмущений описывается неравенством

$$|\mathbf{F}(\mathbf{Y}, t)| < 1 \quad \text{при всех} \quad |\mathbf{Y}| < t^s, \quad t > t_0. \quad (6.4)$$

При переходе к приведенной системе приходится уточнять структуру исходного уравнения, чтобы гарантировать для нелинейного слагаемого $\mathbf{G}(\mathbf{z}, t)$ условия (3.3). Эти ограничения касаются оценки вторых производных всех компонент вектора $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ в окрестности АР и не выглядят обременительными:

$$\exists \kappa > 0 \quad \forall n \quad \exists M_a: \quad \left\| \frac{\partial^2 a_j(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}^2} \right\|_{\mathbf{x}=\mathbf{X}(t)+\mathbf{y}} \leq M_a \exp(\kappa t) \quad \forall t > t_0, \quad |\mathbf{y}| < 1. \quad (6.5)$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть непрерывная вектор-функция $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$ дважды дифференцируема по $\mathbf{x}$, выполнены условия (3.1), (3.2) и имеет место оценка (6.5) с показателем $\kappa < \kappa_0$. Если фундаментальная матрица имеет ограниченную степень роста (6.3), то при начальных данных из окрестности точки $\mathbf{Y} = 0$ существует глобальное решение задачи Коши для возмущенной системы (6.1) с непрерывной функцией $\mathbf{F}(\mathbf{Y}, t)$; равновесие $\mathbf{Y} = 0$ устойчиво в весовой норме $\sup_{t>t_0} \|t^{-s} \mathbf{Y}(t)\|$ относительно таких постоянно действующих возмущений из класса (6.4).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нелинейные слагаемые в уравнении (6.1) рассматриваются как остаток в разложении Тейлора при $|\mathbf{Y}| \rightarrow 0$ и оцениваются с учетом неравенства (6.5):

$$|t^{\alpha n} [\mathbf{a}(\mathbf{X} + t^{-\alpha n} \mathbf{Y}, t) - \mathbf{a}(\mathbf{X}, t)] - \mathcal{A}(t) \mathbf{Y}| < M_a \exp(\kappa t) |\mathbf{Y}|^2 \quad \forall |\mathbf{Y}| < 1.$$

После замены $\mathbf{Y}(t) = \mathcal{T}(t) \mathbf{Z}(t)$ отсюда вытекает неравенство (3.3) с некоторой константой M_b . При этом показатель κ в (3.3) должен быть увеличен по сравнению с (6.5) на сколь угодно малую величину, из-за роста множителя $\mathcal{T}(t)$ в замене. После этого для системы (6.2) выполнены все условия теоремы 2.

Пусть нормировка собственных векторов выбрана так, что $\|\mathcal{T}^{-1}(t)\| = 1$. Рассмотрим уравнение (6.1) с начальным значением из окрестности равновесия: $|\mathbf{y}_0| < \delta$ и с возмущением $|\mathbf{F}(\mathbf{Y}, t)| < 1$.

В случае, когда возмущение не зависит от $\mathbf{Y}$, соответствующее слагаемое в (6.2) имеет похожую оценку:

$$|\mathbf{G}(t)| = |\mathcal{T}^{-1}(t)\mathbf{F}(t)| < 1.$$

Начальное значение $\mathbf{Z}(t_0) = \mathcal{T}^{-1}(t_0)\mathbf{y}_0$ будет вблизи точки $\mathbf{z} = 0$. В силу теоремы 2 существует ограниченное глобальное решение $\mathbf{Z}(t)$. Из формулы замены $\mathbf{Y}(t) = \mathcal{T}(t)\mathbf{Z}(t)$ получаем решение задачи Коши для уравнения (6.1). Поскольку матрица $\mathcal{T}(t)$ может неограниченно расти, как $\mathcal{O}(t^s)$, то из ограниченности или малости $\mathbf{Z}(t)$ не следует ограниченность или малость $\mathbf{Y}(t)$. Утверждение об устойчивости в системе (6.1) можно сделать лишь в весовой норме $\sup_{t>t_0} \|t^{-s}\mathbf{Y}(t)\|$.

В общем случае, когда возмущение $\mathbf{F}(\mathbf{Y}, t)$ зависит от $\mathbf{Y}$, возможный рост решения $\mathbf{Y}(t)$ приводит к дополнительным ограничениям. Класс допустимых возмущений определяется условием (6.4). При таком ограничении приведенная система (6.2) устойчива относительно соответствующих возмущений:

$$\mathbf{G}(\mathbf{Z}, t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{T}^{-1}(t)\mathbf{F}(\mathcal{T}(t)\mathbf{Z}, t).$$

Устойчивость в исходной системе (6.1) получается в весовой норме $\sup_{t>t_0} \|t^{-s}\mathbf{Y}(t)\|$. Теорема доказана.

В частном случае, когда в качестве возмущения берется невязка

$$\mathbf{F}(t) = t^{\alpha_n} \mathbf{R}(t) = o(1), \quad t \rightarrow \infty,$$

получаем утверждение о разрешимости уравнения для остатка (2.1) с оценкой $\mathbf{Y}(t) = \mathcal{O}(t^s)$, $t \rightarrow \infty$. Отсюда вытекает разрешимость исходного уравнения (1.1) и связь точного решения с асимптотическим.

СЛЕДСТВИЕ. При условиях теоремы 3 система (1.1) имеет точное решение с асимптотикой

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}_n(t) + \mathcal{O}(t^{-\alpha_n+s}), \quad t \rightarrow \infty.$$

Здесь $s = \text{const}$; $\alpha_n \uparrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$.

Отметим, что существует много решений с такой асимптотикой. Все они экспоненциально близки при $t \rightarrow \infty$ ввиду экспоненциальной устойчивости задачи для остатка.

7. Устойчивость в исходной системе (1.1). Рассмотрим проблему устойчивости полученного решения $\mathbf{x}(t)$ относительно общего возмущения $\mathbf{H}(\mathbf{x}, t)$:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{a}(\mathbf{x}, t) + \mu \mathbf{H}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^p, \quad t > t_0.$$

После замены $\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}_m(t) + t^{-\alpha_m} \mathbf{Y}(t)$ дело сводится к задаче об устойчивости в уравнении для остатка (6.1) с возмущением

$$\mathbf{F}(\mathbf{Y}, t) = t^{\alpha_m} \mathbf{H}(\mathbf{X}_m(t) + t^{-\alpha_m} \mathbf{Y}(t), t).$$

АР $\mathbf{X}_m(t)$ следует выбрать с минимальным порядком α_m из всех, которые удовлетворяют неравенству $\alpha_m \geq s$. Независимость степени (s) от АР играет здесь ключевую роль. Это позволяет выделить наиболее широкий класс допустимых возмущений условием

$$|t^{\alpha_m} \mathbf{H}(\mathbf{X}_m(t) + t^{-\alpha_m} \mathbf{Y}, t)| < 1 \quad \text{при} \quad |\mathbf{Y}| < 1, \quad t > t_0. \quad (7.1)$$

Такое ограничение на убывание возмущения в бесконечности выглядит наиболее прозрачно для функций, не зависящих от $\mathbf{x}$: $|t^{\alpha_m} \mathbf{H}(t)| < 1$; похожие условия использовались в [14].

ТЕОРЕМА 4. Пусть вектор-функция исходной системы (1.1) дважды дифференцируема по $\mathbf{x}$, выполнены условия (3.1), (3.2) и имеет место оценка (6.5) с показателем $\kappa < \kappa_0$. Если для линеаризованной системы фундаментальная матрица имеет ограниченную степень роста (6.3), то существует глобальное решение для системы (1.1) с асимптотикой

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}_n(t) + \mathcal{O}(t^{-\alpha_n+s}), \quad t \rightarrow \infty,$$

и это решение устойчиво относительно постоянно действующих возмущений из класса (7.1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существование решения и оценка остатка являются следствием предыдущей теоремы. Устойчивость следует из представления

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}_p(t) + t^{-\alpha_m} \mathcal{T}(t) \mathbf{Z}(t)$$

с учетом устойчивости задачи для $\mathbf{Z}(t)$ и оценки

$$t^{-\alpha_m} \mathcal{T}(t) = \mathcal{O}(t^{-\alpha_m+s}) \quad \text{при} \quad -\alpha_m + s \leq 0.$$

Дополнение.

Контрпример к устойчивости. Условие на собственные значения (3.1) можно ослабить, допуская стремление их к нулю:

$$\operatorname{Re} \lambda_j(t) \leq -\lambda_0 t^{-\nu}, \quad \lambda_0, \nu > 0.$$

Такое послабление оказывается несущественным, если $\nu < 1$. В этом случае после замены времени $\tau = t^{1-\nu}$ дело сводится к рассмотренной задаче. Ее характерной чертой является то, что устойчивость определяется линейной частью уравнений.

Если $\nu \geq 1$, то такой подход не реализуем, и устойчивость в общем случае не определяется линейной частью уравнений. Такого типа пример с $\nu = 1$ дает система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -t^{-1}x + bt^{-\kappa}xy, \\ \frac{dy}{dt} = -\lambda t^{-1}y. \end{cases}$$

Здесь имеется равновесие $x = 0, y = 0$. Линеаризованные вблизи равновесия уравнения имеют общее решение

$$y = C_2 t^{-\lambda}, \quad x = C_1 t^{-1} \quad \forall C_1, C_2 = \text{const},$$

которое стремится к равновесию при $t \rightarrow \infty$, если $\lambda > 0$. Решение полных уравнений описывается формулами

$$y = C_2 t^{-\lambda}, \quad x = C_1 t^{-1} \exp\left(\frac{C_2 b}{1 - \lambda - \kappa} t^{1-\lambda-\kappa}\right).$$

Если $0 < \lambda + \kappa < 1$, то решения с $C_2 b > 0$ стремятся к бесконечности: $|x(t)| \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$, и равновесие в полной системе не устойчиво.

Вывод. Если действительные части собственных значений стремятся к нулю на бесконечности, как $\mathcal{O}(t^{-1})$, то в общем случае свойство устойчивости не определяется структурой линеаризованной системы.

Быстрый рост фундаментальной матрицы. Рассматривается линейная система с матрицей, близкой к жордановой клетке:

$$\mathcal{A}(t) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 - t^{-n} \end{pmatrix}.$$

Здесь собственные значения $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -1 - t^{-n}$. Соответствующая фундаментальная матрица и обратная к ней могут быть представлены в виде

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} t^n & t^n \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{T}^{-1} = \begin{pmatrix} ct^{-n} & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Вывод. Фундаментальная матрица может иметь степень роста любого порядка, если ее собственные значения быстро “слипаются” на бесконечности.

В такой ситуации использование замены $\mathbf{y} = \mathcal{T}(t)\mathbf{z}$ для получения эффективной оценки остатка выглядит сомнительным.

Приведенные примеры показывают, что построенную на основе АР линеаризованную систему и ее фундаментальную матрицу не всегда можно использовать для анализа устойчивости. Условия теоремы 4 существенны.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. В. Козлов, С. Д. Фурта, *Асимптотики решений сильно нелинейных систем дифференциальных уравнений*, Изд-во Моск. ун-та, М., 1996.
- [2] А. Д. Брюно, “Асимптотики и разложения решений обыкновенного дифференциального уравнения”, *УМН*, **59:3** (2004), 31–80.
- [3] А. Н. Кузнецов, “О существовании входящих в особую точку решений автономной системы, обладающей формальным решением”, *Функц. анализ и его прил.*, **23:4** (1989), 63–74.
- [4] Ж.-П. Рамис, *Расходящиеся ряды и асимптотические теории*, ИКИ, М.–Ижевск, 2002.
- [5] Л. А. Kalyakin, “Justification of asymptotic expansion at infinity”, *J. Nonlinear Math. Phys.*, **15**, Suppl. 3 (2008), 220–226.
- [6] Л. А. Калякин, М. А. Шамсутдинов, “Авторыезонансные асимптотики в осциллирующей системе со слабой диссипацией”, *ТМФ*, **160:1** (2009), 102–111.
- [7] С. Ю. Доброхотов, В. П. Маслов, “Конечнозонные почти периодические решения в ВКБ-приближениях”, *Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат.*, **15**, ВИНТИ, М., 1980, 3–94.

- [8] М. В. Федорюк, *Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений*, Справочная математическая библиотека, Наука, М., 1983.
- [9] U. Elias, H. Gingold, “A method for asymptotic integration of almost diagonal systems”, *Asymptot. Anal.*, **29**:3-4 (2002), 343–357.
- [10] Л. А. Калякин, “Асимптотический анализ моделей авторезонанса”, *УМН*, **63**:5 (2008), 3–72.
- [11] И. Г. Малкин, *Теория устойчивости движения*, ГИТТЛ, М.–Л., 1952.
- [12] Н. Н. Красовский, *Некоторые задачи теории устойчивости движения*, Физматгиз, М., 1959.
- [13] Р. З. Хасьминский, *Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров*, Наука, М., 1969.
- [14] Л. А. Калякин, О. А. Султанов, “Устойчивость моделей авторезонанса”, *Дифференц. уравнения*, **49**:3 (2013), 279–293.
- [15] Л. А. Калякин, “Метод усреднения в задачах об асимптотике на бесконечности”, *Уфимск. матем. журн.*, **1**:2 (2009), 29–52.
- [16] Ж. Ла-Салль, С. Лефшец, *Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова*, Мир, М., 1964.
- [17] Ф. Р. Гантмахер, *Теория матриц*, Наука, М., 1988.
- [18] В. В. Немыцкий, В. В. Степанов, *Качественная теория дифференциальных уравнений*, УРСС, М., 2004.

Л. А. Калякин

Институт математики с вычислительным центром
Уфимского научного центра
Российской академии наук, г. Уфа
E-mail: klenru@mail.ru

Поступило
26.02.2015