Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Р. Фаталов, Большие отклонения L^p -нормы винеровского процесса со сносом, *Матем. заметки*, 1999, том 65, выпуск 3, 429–436

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1067>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 10:59:40

УДК 519.21

БОЛЬШИЕ УКЛОНЕНИЯ L^p -НОРМЫ ВИНЕРОВСКОГО ПРОЦЕССА СО СНОСОМ

В. Р. Фаталов

В работе вычисляется точная асимптотика вероятности $P\{\|w(t) + uct\|_p > u\}$, $u \rightarrow \infty$, где $w(t)$ – стандартный винеровский процесс, $\|x\|_p$ – обычная норма в пространстве $L^p[0, 1]$, $p \geq 2$. Результат получен на основе общей теоремы автора об асимптотике гауссовской меры $P(uD)$, $u \rightarrow \infty$, для борелевского множества D из сепарабельного банахова пространства.

Библиография: 18 названий.

1. Введение. В последнее время в ряде работ [1]–[4] исследовались асимптотики распределений норм гауссовских элементов в пространствах ℓ^p . Значительно меньше имеется публикаций, посвященных той же задаче, но в пространстве L^p (см. [4], [5]). Подход в работе [4] был основан на одном результате автора [6, следствие 3.1] об асимптотике гауссовской меры $P(uD)$, $u \rightarrow \infty$, где D – борелевское множество из сепарабельного банахова пространства (см. также [4, теорема 1] и [7, теорема 1]). При этом предполагалось, что так называемый функционал действия меры P достигает своего минимума на D в конечном числе точек, в окрестностях которых множество D имело дважды дифференцируемую по Фреше границу. Эта теорема позволила вычислить с точностью до констант асимптотики больших уклонений в L^p -норме стандартного винеровского процесса w и броуновского моста [4, теорема 3] при $p \geq 2$. Обзор об асимптотических результатах теории больших уклонений в банаховых пространствах имеется в [6].

Данная заметка посвящена получению аналогичных результатов для винеровского процесса с линейным сносом, т.е. для $w(t) + ct$, $t \in [0, 1]$. Ниже для $p \geq 2$ и $0 < |c| < (p+1)^{1/p}$ мы установим вид точной асимптотики выражения

$$P\{\|w(t) + uct\|_p > u\}, \quad u \rightarrow \infty, \quad (1)$$

где

$$\|x\|_p := \left(\int_0^1 |x(t)|^p dt \right)^{1/p}$$

– норма в пространстве $L^p = L^p[0, 1]$.

Приведенное в настоящей заметке исследование асимптотики (1) включает решение довольно сложной краевой задачи для дифференциального оператора второго порядка. Последнюю удалось свести к уже изученной проблеме нахождения нулей (по индексу ν) функций Лежандра $P_\nu^\mu(t)$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $p \geq 2$ и $0 < c < (p+1)^{1/p}$. Тогда при $u \rightarrow \infty$ имеем

$$\begin{aligned} & P\left\{\left(\int_0^1 |w(t) + uct|^p dt\right)^{1/p} > u\right\} \\ &= \exp\left\{-\frac{u^2}{2\sigma^2}\right\} \frac{\sqrt{p}}{u\sqrt{2\lambda\pi}} \frac{|c - (p-2)\lambda h^{p-1}|^{1/2}}{|ch^p + p^2\lambda h^{p-1} - c(p+1)|^{1/2}} \\ &\quad \times \prod_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{p-1}{2pa_n(1/2 - 1/p - a_n)}\right)^{-1/2} (1 + o(1)), \end{aligned} \quad (2)$$

где h – единственный корень уравнения

$$\begin{aligned} & 2^{1/(2p)} \Gamma\left(1 + \frac{1}{p}\right) \sqrt{h} \left(\frac{ch}{\lambda} + p + 2\right)^{1/(2p)} P_{-1/p}^{-1/p} \left(\frac{c}{\sqrt{ch + (p+2)\lambda}}\right) = \sqrt{ch + (p+2)\lambda}, \\ & \sigma^{-2} = \lambda p + c^2 - ch, \quad \lambda = \frac{ch - c^2}{2hp - p - 2} > 0, \end{aligned}$$

a_n , $n = 0, 1, \dots$, – действительные числа такие, что $2a_n - 1 + 1/p > 0$ и

$$P_{2a_n - 1 + 1/p}^{1-1/p} \left(\frac{c}{\sqrt{ch + (p+2)\lambda}}\right) = 0, \quad (3)$$

$P_\nu^\mu(t)$, $t \in (0, 1)$, – функции Лежандра.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Случай отрицательного c рассматривается аналогично. Природа ограничения сверху на константу $|c|$ будет объяснена ниже в замечании 2. Определение и свойства функций Лежандра имеются в [8, гл. 8], [9, гл. 3], [10], [11]. Там же указаны ссылки на работы, посвященные численному решению уравнений, содержащих функции Лежандра. Уравнение относительно ν $P_\nu^\mu(t) = 0$ подробно рассматривалось в [11, гл. 8, § 131–137]. В этой работе доказано, что при $-1 < t < 1$ и действительном μ приведенное выше уравнение имеет счетное число действительных корней [11, с. 64]; описан также алгоритм, позволяющий вычислить эти корни. С учетом сведений, изложенных в [11, с. 65], имеем следующую асимптотику при $n \rightarrow \infty$ чисел a_n из формулы (3):

$$a_n = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2p} + \left(4n + 1 + \frac{2}{p}\right) \frac{\pi}{8\alpha}\right), \quad \alpha = \arccos\left(\frac{c}{\sqrt{ch + (p+2)\lambda}}\right), \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

2. Вспомогательные сведения. Пусть $\xi(t)$, $t \in [0, 1]$, – гауссовский процесс с нулевым средним и почти наверное непрерывными траекториями, $R(t, s) := E\xi(t)\xi(s)$ – его ковариационная функция. В силу непрерывности процесса $\xi(t)$ почти все его реализации принадлежат пространству L^p , $p \geq 1$, и мы вправе рассматривать $\xi(t)$ как случайный элемент со значениями в L^p , где он индуцирует гауссовскую меру P (распределение случайного элемента $\xi(t)$). Ковариационный оператор [12, гл. 3], [13], [14] $A: L^q \rightarrow L^p$ гауссовской меры P действует по правилу

$$Ax(t) = \int_0^1 R(t, s)x(s) ds, \quad x(s) \in L^q;$$

здесь и далее $q^{-1} + p^{-1} = 1$.

Определим функцию $G: L^p \rightarrow \mathbb{R}^1$ следующим образом:

$$G(x) := \int_0^1 |x(t) + ct|^p dt - 1.$$

При $p \geq 2$ эта функция дважды дифференцируема по Фреше [15]. Обозначим через $G'(x) \in L^q$, $G''(x): L^p \rightarrow L^q$ первую и вторую производные по Фреше функции G в точке x .

Пусть далее

$$\langle x, y \rangle := \int_0^1 x(t)y(t) dt$$

— двойственность между пространствами L^p и L^q .

Если x не входит в область определения оператора A^{-1} , положим $\langle x, A^{-1}x \rangle = \infty$. В этих обозначениях имеет место следующее утверждение (см. [4], [6, § 3.3], [7]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $p \geq 2$, $0 < c < (p+1)^{1/p}$, ковариационный оператор A инъективен и квадратическая форма $\langle x, A^{-1}x \rangle$ достигает своего минимума σ^{-2} на множестве $D := \{x \in L^p : G(x) \geq 0\}$ в конечном числе точек $x^1, \dots, x^m$ из границы D , причем $\langle x^i, G'(x^i) \rangle \neq 0$, $i = 1, \dots, m$. Пусть конечен и положителен определитель

$$\det B_i := \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \lambda_i \beta_n^i), \quad B_i := I - \lambda_i A G''(x^i), \quad i = 1, \dots, m, \\ x^i = \lambda_i A G'(x^i), \quad (4)$$

β_n^i — собственные значения оператора $A G''(x^i): L^p \rightarrow L^p$, I — тождественный оператор в L^p .

Тогда при $u \rightarrow \infty$ справедливо асимптотическое равенство

$$P(uD) = P\left\{G\left(\frac{\xi}{u}\right) \geq 0\right\} = P\left\{\left(\int_0^1 |\xi(t) + uct|^p dt\right)^{1/p} > u\right\} \\ = \exp\left\{-\frac{u^2}{2\sigma^2}\right\} \frac{1}{u\sqrt{2\pi}} \sum_{i=1}^m |\det B_i \langle B_i^{-1}x^i, A^{-1}x^i \rangle|^{-1/2} (1 + o(1)).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Предложение 1 доказано в работах [7] (случай гильбертова пространства) и [6, следствие 3.1]. Вычисление точной асимптотики $P(uD)$ будет нетривиальным лишь в случае, когда D не содержит нулевого элемента L^p , т.е. когда $\|ct\|_p < 1$, отсюда получаем ограничение на c , фигурирующее в теореме 1 и предложении 1.

3. Доказательство теоремы 1. Вывод асимптотики в формуле (2) основан на предложении 1. Мы разобьем этот вывод на несколько этапов.

3.1. *Решение экстремальной задачи.* Ковариационная функция стандартного винеровского процесса w имеет вид $R(t, s) = \min(t, s)$. Следовательно, ковариационный оператор стандартной винеровской меры действует по правилу

$$Ax(t) = \int_0^1 \min(t, s)x(s) ds, \quad x(s) \in L^q.$$

Тогда, как легко видеть, обратный оператор A^{-1} определен на множестве дважды дифференцируемых функций и имеет вид $A^{-1} = -d^2/dt^2$.

Нахождение функции $x(t) \in \partial D$, минимизирующей квадратическую форму $\langle x, A^{-1}x \rangle$, проводится по той же схеме, что и в работе [4], где исследован случай $c = 0$. Используя формулы из [15, с. 887] для первых двух производных по Фреше функции

$$S(x) := \int_0^1 |x(t)|^p dt - 1, \quad x \in L^p,$$

и теорему о суперпозиции дифференцируемых отображений [16, с. 144], получаем

$$\begin{aligned} G'(x) &= p|x(t) + ct|^{p-1} \operatorname{sign}(x(t) + ct) \in L^q, \\ G''(x)[z] &= p(p-1)|x(t) + ct|^{p-2}z(t) \in L^q, \quad z \in L^p. \end{aligned}$$

Учитывая соотношение (4), получаем следующее уравнение для экстремальной функции $x(t)$ (индекс i опущен):

$$x(t) = \lambda p \int_0^1 \min(t, s)|x(s) + cs|^{p-1} \operatorname{sign}(x(s) + cs) ds, \quad \|x(t) + ct\|_p = 1. \quad (5)$$

Здесь $\lambda > 0$ – множитель Лагранжа, его положительность доказывается так же, как и в работе [7, п. 1].

Нам удобно будет рассматривать функцию $y(t) = x(t) + ct$. Интегральное уравнение (5) легко сводится к следующей граничной задаче:

$$\begin{aligned} y''(t) &= -\lambda p|y(t)|^{p-1} \operatorname{sign} y(t), \\ y(0) &= 0, \quad y'(1) = c. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь первое уравнение можно записать в виде

$$d(y'(t))^2 = -2\lambda d|y(t)|^p,$$

откуда получаем

$$(y'(t))^2 = 2\lambda(m - |y(t)|^p), \quad (7)$$

где

$$m = \frac{c^2}{2\lambda} + |y(1)|^p. \quad (8)$$

Поскольку $y'(1) = c > 0$, из (6) и (7) получаем

$$\begin{aligned} y'(t) &= \sqrt{2\lambda} \sqrt{m - |y(t)|^p}, \quad t \in [0, 1], \\ y(0) &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Таким образом, мы имеем только одну экстремальную функцию $y(t) \geq 0$, монотонно возрастающую на $[0, 1]$ от 0 до $y(1)$.

Из (9) имеем

$$\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{m-y^p}} = \sqrt{2\lambda}t.$$

Отсюда, используя определение неполной бета-функции и ее связь с гипергеометрической функцией Гаусса $F(a, b; d; z)$ (см. [9, с. 98] или формулу 4 из [17, с. 30]), приходим к следующему функциональному уравнению для $y(t)$:

$$y(t)F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{p}; 1 + \frac{1}{p}; \frac{(y(t))^p}{m}\right) = \sqrt{2\lambda}mt. \quad (10)$$

Переход к функциям Лежандра по формуле 15.4.13 из [8, с. 376] позволяет получить из (10) следующее равенство:

$$2^{1/p}\Gamma\left(1 + \frac{1}{p}\right)m^{1/(2p)}\sqrt{y(t)}P_{-1/p}^{-1/p}\left(\frac{y'(t)}{\sqrt{2\lambda m}}\right) = \sqrt{2\lambda}mt. \quad (11)$$

Далее, из (7), условия нормировки $\|y\|_p = 1$ и (6) имеем

$$m = 1 + \frac{1}{2\lambda} \int_0^1 (y'(t))^2 dt = 1 + \frac{p}{2} + \frac{cy(1)}{2\lambda}. \quad (12)$$

Равенства (8), (12) и (11) (с $t = 1$) однозначно определяют значения λ и $h := y(1)$ (см. теорему 1).

При помощи (5) (с $t = 1$) довольно просто сосчитать и величину σ^{-2} из теоремы 2: $\sigma^{-2} = \langle x, A^{-1}x \rangle = \lambda p - cx(1)$.

3.2. Исследование спектра дифференциального оператора второго порядка с однородными граничными условиями. Найдем собственные числа β_n оператора $AG''(x)$, соответствующие собственным функциям z_n . С этой целью рассмотрим уравнение (относительно β и z)

$$AG''(x)z = \beta z, \quad z \in L^p.$$

Это уравнение равносильно граничной задаче

$$\begin{aligned} p(p-1)(y(t))^{p-2}z(t) &= -\beta z''(t), \\ z(0) &= z'(1) = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Замена $s = (y(t))^p/m$ приводит эту задачу к граничной задаче для гипергеометрического уравнения относительно функции $g(s) = z(t)$, $s \in [0, (y(1))^p/m]$:

$$\begin{aligned} s(s-1)g''(s) + \left(1 - \frac{1}{p} - \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{p}\right)s\right)g'(s) + \frac{p-1}{2\lambda p\beta}g(s) &= 0, \\ g(0) &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Гипергеометрическое уравнение $s(s-1)g''(s) + (d - (a+b+1)s)g'(s) - abg(s) = 0$ (a, b, d – параметры) хорошо изучено (см., например, [8, § 15.5], [9, § 2.1], [18, п. 2.260, с. 480–486]). Для уравнения (14) для значений параметров a, b, d имеем соотношения:

$$d = 1 - \frac{1}{p}, \quad a + b = \frac{1}{2} - \frac{1}{p}, \quad ab = \frac{1-p}{2\lambda p\beta}. \quad (15)$$

Ниже сохраним в качестве параметра только a .

С учетом граничного условия $g(0) = 0$ задача (14) имеет с точностью до мультипликативной постоянной решение (см. [18, с. 483, (a)])

$$g(s) = s^{1/p} F\left(a + \frac{1}{p}, \frac{1}{2} - a; 1 + \frac{1}{p}; s\right).$$

Следовательно,

$$z(t) = \frac{y(t)}{m^{1/p}} F\left(a + \frac{1}{p}, \frac{1}{2} - a; 1 + \frac{1}{p}; \frac{(y(t))^p}{m}\right).$$

Значения параметра a , а вместе с ним и собственные числа β (см. (15)) определим из условия $z'(1) = 0$. Для этого удобно перейти к функциям Лежандра по формуле 15.4.13 из [8, с. 376]:

$$z(t) = 2^{1/p} \Gamma\left(1 + \frac{1}{p}\right) m^{-1/(2p)} \sqrt{y(t)} P_{2a-1+1/p}^{-1/p}\left(\frac{y'(t)}{\sqrt{2\lambda m}}\right).$$

Используя соотношения 8.5.4 и 8.5.1 из [8, с. 156], приходим к выводу, что $z'(1) = 0$ тогда и только тогда, когда

$$P_{2a-1+1/p}^{1-1/p}\left(\frac{c}{\sqrt{2\lambda m}}\right) = 0.$$

Последнее уравнение относительно a подробно рассмотрено в монографии [11, гл. 8, § 132–133]. Некоторые выводы оттуда представлены в замечании 1.

3.3. *Вычисление $\langle B^{-1}x, A^{-1}x \rangle$.* Положим

$$v(t) := (I - \lambda AG''(x))^{-1}x(t). \quad (16)$$

Как следует из предложения 1, нам необходимо найти $\langle v, A^{-1}x \rangle$. Равенство (16) равносильно следующей граничной задаче:

$$\begin{aligned} v''(t) + \lambda p(p-1)(y(t))^{p-2}v(t) - y''(t) &= 0, \\ v(0) &= v'(1) = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Умножив почленно первое равенство в (17) на $y(t)$ и затем интегрируя по t от 0 до 1, с учетом (6) получаем

$$\langle v, A^{-1}x \rangle = \frac{cv(1) - \lambda p}{p-2}. \quad (18)$$

Однородное уравнение, соответствующее задаче (17), имеет вид

$$v''(t) + \lambda p(p-1)(y(t))^{p-2}v(t) = 0 \quad (19)$$

и совпадает с уравнением (13) при $\beta = 1/\lambda$. Учитывая соображения, приведенные в подпункте 3.2 и в [18, с. 483, (а)], заключаем, что два фундаментальных решения однородного уравнения (19) имеют вид

$$\varphi_1(t) = F\left(-\frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{p}; 1 - \frac{1}{p}; \frac{(y(t))^p}{m}\right) \equiv \left(1 - \frac{(y(t))^p}{m}\right)^{1/2}$$

(см. соотношение 15.1.8 в [8]) и

$$\varphi_2(t) = \frac{y(t)}{m^{1/p}} F\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}, 1; 1 + \frac{1}{p}; \frac{(y(t))^p}{m}\right).$$

Решение исходной неоднородной задачи (17) получим далее стандартным методом (см., например, [18, § 24.2, (а), с. 148]. Пользуясь тем, что в уравнении (17) коэффициент при $v'(t)$ равен 0, в силу формулы Лиувилля [18, § 17.1, с. 99] легко находим вронскиан $W = \sqrt{2\lambda} m^{1/2-1/p}$. Переходя затем от гипергеометрических функций к функциям Лежандра по формуле 15.4.13 из [8] и производя соответствующие вычисления с использованием формул 8.2.1, 8.6.17 из [8, § 8.5], а также (11), убеждаемся, что задача (17) имеет решение

$$v(t) = \frac{ct y'(t) + y(t)(\lambda p(y(1))^{p-1} - c)}{p(c - (p-2)\lambda(y(1))^{p-1})}.$$

Отсюда легко находим $v(1)$, а также с помощью (18) и $\langle v, A^{-1}x \rangle$.

Теперь все необходимые величины из предложения 1 вычислены и мы получаем утверждение теоремы 1.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Несложный анализ доказательства теоремы 1 показывает, что вывод асимптотики типа (2) возможен и для вероятности

$$\mathbf{P}\left\{\left(\int_0^1 |w(t) + u f(t)|^p dt\right)^{1/p} > u\right\},$$

где $f(t)$ – дважды непрерывно дифференцируемая функция такая, что $\|f(t)\|_p < 1$. В этом случае основная граничная задача для экстремальной функции $y(t)$ имеет вид (ср. с (6))

$$\begin{aligned} y''(t) + \lambda p |y(t)|^{p-1} \operatorname{sign} y(t) &= f''(t), \\ y(0) &= f(0), \quad y'(1) = f'(1). \end{aligned}$$

Дальнейший анализ в духе выполненного выше довольно кропотлив. По-видимому его стоит проводить для функций $f(t)$, представляющих интерес в какой-то конкретной задаче.

Автор выражает благодарность рецензенту за полезные замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Dobric V., Marcus M. B., Weber M. The distribution of large values of the supremum of Gaussian processes // *Astérisque*. 1988. V. 157–158. P. 95–127.
- [2] Linde W. Gaussian measures of large balls in ℓ^p // *Ann. Probab.* 1991. V. 19. №3. P. 1264–1279.
- [3] Лифшиц М. А. Гауссовские большие отклонения гладкой полунормы // *Записки научн. семинаров ЛОМИ*. 1992. Т. 194. С. 106–113.
- [4] Фаталов В. Р. Большие отклонения гауссовских мер в пространствах ℓ^p и L^p , $p \geq 2$ // *Теория вероятн. и ее применения*. 1996. Т. 41. № 3. С. 682–689.
- [5] Боровков А. А., Могульский А. А. О вероятностях малых отклонений для случайных процессов // *Тр. ИМ СО АН СССР*. 1989. Т. 13. С. 147–168.
- [6] Питербарг В. И., Фаталов В. Р. Метод Лапласа для вероятностных мер в банаховых пространствах // *УМН*. 1995. Т. 50. №6. С. 57–150.
- [7] Фаталов В. Р. Точные асимптотики больших отклонений для гауссовских мер в гильбертовом пространстве // *Изв. АН Армении. Матем.* 1992. Т. 27. № 5. С. 43–57.
- [8] Абрамовиц М., Стиган И. (ред.) *Справочник по специальным функциям*. М.: Наука, 1979.
- [9] Бейтмен Г., Эрдейи А. *Высшие трансцендентные функции*. Т. 1. М.: Наука, 1973.
- [10] Гобсон Е. В. *Теория сферических и эллипсоидальных функций*. М.: ИЛ, 1952.
- [11] Robin L. *Fonctions sphériques de Legendre et fonctions sphéroidales*. V. 3. Paris: Gauthier-Villars, 1959.
- [12] Вахания Н. Н., Тариеладзе В. И., Чобанян С. А. *Вероятностные распределения в банаховых пространствах*. М.: Наука, 1985.
- [13] Го Х.-С. *Гауссовские меры в банаховых пространствах*. М.: Мир, 1979.
- [14] Rajput B. S. Gaussian measures on L_p spaces, $1 \leq p < \infty$ // *J. Multivariate Anal.* 1972. V. 2. №4. P. 382–403.
- [15] Bonic R., Frampton J. Smooth functions on Banach manifolds // *J. Math. Mech.* 1966. V. 15. №5. P. 877–898.
- [16] Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В. *Оптимальное управление*. М.: Наука, 1979.
- [17] Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. *Интегралы и ряды. Элементарные функции*. М.: Наука, 1981.
- [18] Камке Э. *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям*. М.: Наука, 1965.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: vfatalov@nw.math.msu.su

Поступило
25.10.95