Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. Ю. Шведов, О каноническом операторе Маслова в абстрактных пространствах, *Матем. заметки*, 1999, том 65, выпуск 3, 437–456

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1068>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 06:09:20

УДК 517

О КАНОНИЧЕСКОМ ОПЕРАТОРЕ МАСЛОВА В АБСТРАКТНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

О. Ю. Шведов

В последнее время был развит ряд новых методов построения асимптотических решений различных эволюционных уравнений. Эти асимптотики выражаются в каждый момент времени через элемент y некоторого гладкого многообразия $\mathcal{Y}$ и элемент f некоторого гильбертова пространства $\mathcal{F}_y$. В работе исследуются некоторые общие свойства отображения, сопоставляющего паре (y, f) асимптотическую формулу.

Библиография: 12 названий.

1. Введение. В квантовой механике часто используется квазиклассическое приближение. Одним из квазиклассических методов является теория комплексного роста Маслова в точке [1], которая позволяет построить приближенные решения уравнений в частных производных с малым параметром при операторе дифференцирования

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\left(t, x, -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\right) \psi, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \hbar \rightarrow 0, \quad (1)$$

имеющие в каждый фиксированный момент времени t вид волнового пакета с шириной порядка $\sqrt{\hbar}$:

$$\psi(x, t) = \frac{1}{\hbar^{n/4}} \exp\left(\frac{i}{\hbar} S^t\right) \exp\left(\frac{i}{\hbar} P^t(x - Q^t)\right) f^t\left(\frac{x - Q^t}{\sqrt{\hbar}}\right), \quad (2)$$

который отвечает движению классической частицы вдоль траектории $(P^t, Q^t) \in \mathbb{R}^{2n}$.

В последнее время был развит [2]–[5] ряд методов построения асимптотических решений различных уравнений, не относящихся к типу (1), а имеющих более общий вид

$$i \frac{\partial \psi^\varepsilon}{\partial t} = H^\varepsilon \psi^\varepsilon. \quad (3)$$

Здесь ψ^ε – неизвестный элемент некоторого гильбертова пространства $\mathcal{H}^\varepsilon$, H^ε – оператор в этом пространстве, ε – устремляемый к 0 малый параметр. В качестве примеров можно привести уравнение для системы N частиц при $N \rightarrow \infty$ [2], уравнение для спиновых систем [3], уравнения квантовой теории поля [4], [5].

Построенные в [2]–[5] асимптотики решений уравнения (3) в каждый момент времени t выражаются через параметр y , принадлежащий некоторому гладкому многообразию $\mathcal{Y}$, и элемент f гильбертова пространства $\mathcal{F}$. Асимптотическую формулу для решения уравнения (3), т.е. функцию $\psi_{\text{as}}^\varepsilon(t)$, удовлетворяющую свойству

$$\|\psi_{\text{as}}^\varepsilon(t) - \psi^\varepsilon(t)\| \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

можно представить через зависящий от ε линейный оператор K_y^ε , действующий из пространства $\mathcal{F}$ в пространство $\mathcal{H}^\varepsilon$:

$$\psi_{\text{as}}^\varepsilon(t) = K_{y(t)}^\varepsilon f(t). \quad (4)$$

Поскольку асимптотика (2) выражается через зависящие от t параметры (S, P, Q) , $S \in \mathbb{R}$, $P, Q \in \mathbb{R}^n$, и элемент f пространства $L^2(\mathbb{R}^n)$, формула (2) является частным случаем формулы (4) при $\mathcal{F} = L^2(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{Y} = \mathbb{R}^{2n+1}$, $\varepsilon = \hbar$,

$$(K_{S,P,Q}^\hbar f)(x) = \frac{1}{\hbar^{n/4}} \exp\left(\frac{i}{\hbar} S\right) \exp\left(\frac{i}{\hbar} P(x - Q)\right) f\left(\frac{x - Q}{\sqrt{\hbar}}\right). \quad (5)$$

Оператор K_y^ε , входящий в асимптотические формулы, построенные в [2]–[5], удовлетворяет следующим свойствам.

СВОЙСТВО 1. При сдвиге параметра y на величину порядка ε оператор K_y^ε домножается на регулярный при $\varepsilon \rightarrow 0$ числовой множитель $\chi_y(\delta y)$:

$$K_{y+\varepsilon\delta y}^\varepsilon f = \chi_y(\delta y) K_y^\varepsilon f + O(\sqrt{\varepsilon}). \quad (6)$$

СВОЙСТВО 2. При сдвиге параметра y на величину порядка $\sqrt{\varepsilon}$ оператор K_y^ε преобразуется следующим образом:

$$K_{y+\sqrt{\varepsilon}\delta y}^\varepsilon f = \chi_y(\delta y) K_y^\varepsilon V_y[\delta y] f + O(\sqrt{\varepsilon}), \quad (7)$$

где $V_y[\delta y]$ – оператор, действующий в пространстве $\mathcal{F}$. Иными словами, имеет место инвариантность оператора K_y^ε относительно сдвига параметра y и преобразования аргумента этого оператора.

Свойства 1, 2 выполнены для оператора (5), поскольку

$$K_{S+\hbar s, P+\hbar p, Q+\hbar q}^\hbar f = e^{i(s-Pq)} K_{S,P,Q}^\hbar f + O(\sqrt{\hbar}),$$

$$K_{S+\sqrt{\hbar}s, P+\sqrt{\hbar}p, Q+\sqrt{\hbar}q}^\hbar f = \exp\left(\frac{i}{\sqrt{\hbar}}\left(s - \left(P + \frac{\sqrt{\hbar}p}{2}\right)q\right)\right) K_{S,P,Q}^\hbar \exp\left(ip\xi - q\frac{\partial}{\partial\xi}\right) f.$$

В данной работе исследуются свойства оператора K , удовлетворяющего соотношениям (6) и (7). Показывается, что и в общем случае числовой множитель $\chi_y(\delta y)$ не является произвольным, а выражается через δy следующим образом: $\chi_y(\delta y) = e^{-i\omega(\delta y)}$, где величина $\omega(\delta y)$ линейно зависит от δy , т.е. является значением дифференциальной 1-формы ω на касательном векторе δy к многообразию $\mathcal{Y}$ в точке y . Аналогично, оператор $V_y[\delta y]$ выражается через оператор $\Omega(\delta y)$, линейно зависящий от δy : $V_y(\delta y) = e^{i\Omega(\delta y)}$. Для операторов $\Omega(\delta y_1)$ и $\Omega(\delta y_2)$ устанавливаются коммутационные соотношения:

$$[\Omega(\delta y_1), \Omega(\delta y_2)] = \frac{1}{i} \omega(\delta y_1, \delta y_2).$$

Через $d\omega$ обозначен дифференциал 1-формы ω , являющийся дифференциальной 2-формой, а через $d\omega(\delta y_1, \delta y_2)$ значение этой 2-формы на паре касательных векторов $\delta y_1, \delta y_2$.

Рассматриваются также примеры операторов, удовлетворяющих свойствам 1, 2 и отвечающих им 1-форм ω и Ω . Для произвольного абстрактного канонического оператора вводится понятие фазового пространства, которое в частном случае (5) совпадает с $(2n)$ -мерным линейным пространством с симплектической структурой $dP \wedge dQ$. Приводятся примеры, в которых фазовое пространство нетривиально (является тором, сферой, плоскостью Лобачевского, проективным пространством). Исследован вопрос об условиях квантования.

Часто встречаются случаи, когда пространство $\mathcal{F}$, которому принадлежит аргумент оператора K_y^ε , зависит от y . Поэтому вместо совокупности многообразия $\mathcal{Y}$ и гильбертова пространства $\mathcal{F}$ следует в данном случае рассмотреть расслоение $\pi: \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{Y}$, базой которого является многообразие $\mathcal{Y}$, а слоем $\pi^{-1}y$ — зависящее от y гильбертово пространство $\mathcal{F}_y$. В частном случае, когда $\mathcal{F}_y$ не зависит от y , данное расслоение является тривиальным, т.е. пространство этого расслоения представляет собой прямое произведение $\mathcal{Z} = \mathcal{Y} \times \mathcal{F}$, а отображение π выделяет из элемента данного пространства (y, f) его y -компоненту.

Поскольку расслоение $\pi: \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{Y}$ используется при построении квазиклассических асимптотик в квантовой механике, будем называть это расслоение *квазиклассическим*, а его базу $\mathcal{Y}$ — *расширенным фазовым пространством*. В частном случае (5) $\mathcal{Y}$ представляет собой $(2n+1)$ -мерное пространство, состоящее из совокупностей (S, P, Q) числа S и n -мерных векторов P, Q .

Поскольку формула (2) является одной из возможных записей канонического оператора Маслова, отвечающего комплексному росту в точке, будем называть оператор, входящий в формулу (4), *абстрактным каноническим оператором*. Приведем определение абстрактного канонического оператора, являющееся более общим, чем рассмотренное в [6].

2. Определение абстрактного канонического оператора. Будем говорить, что задан абстрактный канонический оператор, если выполнены следующие условия.

I. Задано векторное (локально-тривиальное) расслоение $\pi: \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{Y}$, являющееся совокупностью топологического пространства $\mathcal{Z}$, гладкого многообразия $\mathcal{Y}$ и непрерывного отображения π . На каждом слое расслоения $\pi^{-1}y \in \mathcal{Z}$ определены операции суммирования, умножения на число и скалярного произведения, непрерывные в топологии пространства $\mathcal{Z}$, превращающие $\pi^{-1}y$ в евклидово пространство, состоящее более чем из одного нулевого элемента.

II. При каждом значении параметра ε , пробегающего некоторое подмножество $\{\varepsilon\}$ числовой прямой, содержащее 0 в качестве предельной точки, заданы гильбертовы пространства $\mathcal{H}^\varepsilon$.

III. Задана совокупность отображений $K^\varepsilon: \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{H}^\varepsilon$, удовлетворяющая следующим аксиомам.

АКСИОМА 1 (послойная линейность). При $z_1, z_2 \in \pi^{-1}y, \alpha \in \mathbb{C}$

$$K^\varepsilon(z_1 + \alpha z_2) = K^\varepsilon z_1 + \alpha K^\varepsilon z_2.$$

АКСИОМА 2. Для любого вещественного s определено послойное отображение $g_s: \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{Z}$ такое, что

$$\|K^\varepsilon g_{\sqrt{\varepsilon}s_1 + \varepsilon s_2} z - e^{is_1/\sqrt{\varepsilon}} e^{is_2} K^\varepsilon z\| \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

АКСИОМА 3. Для любой непрерывной кривой $z(\tau)$ на топологическом пространстве $\mathcal{Z}$, имеющей гладкую проекцию $\pi z(\tau)$ на базу $\mathcal{U}$, справедливо соотношение

$$\|K^\varepsilon z(\sqrt{\varepsilon})\| \rightarrow \|z(0)\|, \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

В следующих трех аксиомах Φ – произвольное непрерывное отображение $\Phi: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathcal{Z}$, для которого отображение $\pi\Phi: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathcal{U}$ является гладким.

АКСИОМА 4. Для любых функций $\xi_1(\tau)$ и $\xi_2(\tau): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^k$ таких, что $\xi_1(\tau) - \xi_2(\tau) = O(\tau^3)$, справедливо соотношение

$$\|K^\varepsilon \Phi(\xi_1(\sqrt{\varepsilon})) - K^\varepsilon \Phi(\xi_2(\sqrt{\varepsilon}))\| \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

АКСИОМА 5. Для любой функции $\xi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^k$ и любого вектора $\beta \in \mathbb{R}^k$ справедливо соотношение

$$\|K^\varepsilon \Phi(\xi(\sqrt{\varepsilon}) + \varepsilon\beta) - \chi_{\xi(0), \pi\Phi[\beta]} K^\varepsilon \Phi(\xi(\sqrt{\varepsilon}))\| \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (8)$$

для некоторого комплексного множителя $\chi_{\xi(0), \pi\Phi[\beta]}$, гладко зависящего от β .

АКСИОМА 6. Для любой функции $\xi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^k$ и любого вектора $\beta \in \mathbb{R}^k$ существуют линейные операторы $V_{\pi\Phi}(\xi, \beta)$, действующие в слое $\pi^{-1}\pi\Phi(\xi)$, сильно непрерывные по β , и комплексные числа $c_\Phi^\varepsilon(\xi, \beta)$ такие, что

$$\|K^\varepsilon \Phi(\xi(\sqrt{\varepsilon}) + \sqrt{\varepsilon}\beta) - c_\Phi^\varepsilon(\xi(\sqrt{\varepsilon}), \beta) K^\varepsilon V_{\pi\Phi}(\xi(\sqrt{\varepsilon}), \beta) \Phi(\xi(\sqrt{\varepsilon}))\| \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (9)$$

При $\chi_{\xi(0), \pi\Phi[\beta]} = 1$ множитель c_Φ^ε не зависит от ε .

ЗАМЕЧАНИЕ. Аксиома 2 означает, что при некотором преобразовании g_s абстрактный канонический оператор домножается на числовой множитель. Для оператора (5) преобразование g_s сдвигает аргумент S на s . Аксиомы 4–6 определяют преобразование абстрактного канонического оператора при сдвиге z на величину $O(\varepsilon^{3/2})$, $O(\varepsilon)$ и $O(\varepsilon^{1/2})$ соответственно.

3. Свойства абстрактного канонического оператора.

ЛЕММА 1. Комплексный множитель $\chi_{\xi, \pi\Phi[\beta]}$ однозначно определяется из свойства (8).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть для двух множителей χ^1 и χ^2 выполнено свойство (8). Выбирая в качестве функции $\xi(\varepsilon)$ константу, имеем

$$\begin{aligned} \|K^\varepsilon \Phi(\xi + \varepsilon\beta) - \chi_{\xi, \pi\Phi[\beta]}^1 K^\varepsilon \Phi(\xi)\| &\rightarrow 0, \\ \|K^\varepsilon \Phi(\xi + \varepsilon\beta) - \chi_{\xi, \pi\Phi[\beta]}^2 K^\varepsilon \Phi(\xi)\| &\rightarrow 0, \end{aligned} \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (10)$$

Величина $\|\chi_{\xi, \pi\Phi[\beta]}^1 K^\varepsilon \Phi(\xi) - \chi_{\xi, \pi\Phi[\beta]}^2 K^\varepsilon \Phi(\xi)\|$ в силу неравенства треугольника и (10) при $\varepsilon \rightarrow 0$ стремится к 0, а в силу аксиомы 3 она стремится к $|\chi_{\xi, \pi\Phi[\beta]}^1 - \chi_{\xi, \pi\Phi[\beta]}^2| \cdot \|\Phi(\xi)\|$. Так как для некоторого отображения Φ , отвечающего данному отображению $\pi\Phi$, вектор $\Phi(\xi)$ ненулевой, то $\chi^1 = \chi^2$ при любом $\pi\Phi$. Лемма 1 доказана.

ЛЕММА 2. *Выполнены следующие свойства:*

$$\chi_{\xi, \pi\Phi}[0] = 1, \quad |\chi_{\xi, \pi\Phi}[\beta]| = 1, \quad \chi_{\xi, \pi\Phi}[\beta + \gamma] = \chi_{\xi, \pi\Phi}[\beta]\chi_{\xi, \pi\Phi}[\gamma].$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $\beta = 0$ свойство (8) выполнено, если $\chi_{\xi, \pi\Phi}[0] = 1$. Положим $Y^\varepsilon = K^\varepsilon\Phi(\xi + \varepsilon\beta) - \chi_{\xi, \pi\Phi}[\beta]K^\varepsilon\Phi(\xi)$. Из неравенства треугольника вытекает, что

$$\|\chi_{\xi, \pi\Phi}[\beta]K^\varepsilon\Phi(\xi)\| - \|Y^\varepsilon\| \leq \|K^\varepsilon\Phi(\xi + \varepsilon\beta)\| \leq \chi_{\xi, \pi\Phi}[\beta]K^\varepsilon\Phi(\xi) + \|Y^\varepsilon\|.$$

В силу аксиомы 3 $\|K^\varepsilon\Phi(\xi)\| \rightarrow \|\Phi(\xi)\|$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, а в силу аксиомы 5 $\|Y^\varepsilon\| \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Поэтому

$$\|K^\varepsilon\Phi(\xi + \varepsilon\beta)\| \rightarrow |\chi_{\xi, \pi\Phi}[\beta]| \cdot \|\Phi(\xi)\|, \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

С другой стороны, из аксиомы 3 вытекает, что

$$\|K^\varepsilon\Phi(\xi + \varepsilon\beta)\| \rightarrow \|\Phi(\xi)\|, \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Отсюда $|\chi_{\xi, \pi\Phi}[\beta]| = 1$.

Выберем в качестве функции $\xi(\sqrt{\varepsilon})$ функцию вида $\xi(\sqrt{\varepsilon}) = \xi + \varepsilon\gamma$. Из формулы (8) вытекает, что

$$\begin{aligned} \|K^\varepsilon\Phi(\xi + \varepsilon\gamma + \varepsilon\beta) - \chi_{\xi, \pi\Phi}[\beta]K^\varepsilon\Phi(\xi + \varepsilon\gamma)\| &\rightarrow 0, \\ \|\chi_{\xi, \pi\Phi}[\beta]K^\varepsilon\Phi(\xi + \varepsilon\gamma) - \chi_{\xi, \pi\Phi}[\beta]\chi_{\xi, \pi\Phi}[\gamma]K^\varepsilon\Phi(\xi)\| &\rightarrow 0, \end{aligned} \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Складывая данные соотношения и применяя неравенство треугольника, получаем

$$\|K^\varepsilon\Phi(\xi + \varepsilon\gamma + \varepsilon\beta) - \chi_{\xi, \pi\Phi}[\beta]\chi_{\xi, \pi\Phi}[\gamma]K^\varepsilon\Phi(\xi)\| \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

В силу однозначности определения множителя χ из свойства (8) получаем третье утверждение леммы. Лемма 2 доказана.

СЛЕДСТВИЕ. *Функция $\chi_{\xi, \pi\Phi}[\beta]$ представляется в виде*

$$\chi_{\xi, \pi\Phi}[\beta] = \exp\left(-i \sum_{l=1}^k \omega_l(\xi, \Phi)\beta_l\right),$$

где $\omega_l(\xi, \Phi)$ – некоторые вещественные коэффициенты.

Для исследования свойств оператора $V_{\pi\Phi}$ докажем некоторые вспомогательные утверждения.

ЛЕММА 3. *Пусть $f, g \in \pi^{-1}y$. Тогда $(K^\varepsilon f, K^\varepsilon g) \rightarrow (f, g)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу аксиомы 3 имеем

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re}(K^\varepsilon f, K^\varepsilon g) &= (K^\varepsilon(f + g), K^\varepsilon(f + g)) - (K^\varepsilon f, K^\varepsilon f) - (K^\varepsilon g, K^\varepsilon g) \\ &\rightarrow (f + g, f + g) - (f, f) - (g, g) = 2 \operatorname{Re}(f, g), \\ -2 \operatorname{Im}(K^\varepsilon f, K^\varepsilon g) &= (K^\varepsilon(f + ig), K^\varepsilon(f + ig)) - (K^\varepsilon f, K^\varepsilon f) - (K^\varepsilon g, K^\varepsilon g) \\ &\rightarrow (f + ig, f + ig) - (f, f) - (g, g) = -2 \operatorname{Im}(f, g) \end{aligned}$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$. Лемма 3 доказана.

ЛЕММА 4. Пусть $f, g \in \pi^{-1}y$, $f \neq 0$, и для некоторого зависящего от ε комплексного множителя α^ε

$$\|K^\varepsilon f - \alpha^\varepsilon K^\varepsilon g\| \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (11)$$

Тогда существует

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \alpha^\varepsilon = \alpha \neq 0$$

и $f = \alpha g$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\|K^\varepsilon f\| \rightarrow \|f\| \neq 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, то $g \neq 0$. Положим $y^\varepsilon = K^\varepsilon f - \alpha^\varepsilon K^\varepsilon g$. В силу неравенства треугольника

$$\|K^\varepsilon f\| - \|y^\varepsilon\| \leq \|\alpha^\varepsilon K^\varepsilon g\| \leq \|K^\varepsilon f\| + \|y^\varepsilon\|,$$

поэтому $|\alpha^\varepsilon| \cdot \|K^\varepsilon g\| \rightarrow \|f\|$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Так как $\|K^\varepsilon g\| \rightarrow \|g\|$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, то $|\alpha^\varepsilon| \rightarrow \|f\|/\|g\|$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Далее, справедливо тождество

$$2 \operatorname{Re}(\alpha^\varepsilon(f, g)) = -2 \operatorname{Re}(\alpha^\varepsilon((K^\varepsilon f, K^\varepsilon g) - (f, g))) - \|y^\varepsilon\|^2 + (K^\varepsilon f, K^\varepsilon f) + |\alpha^\varepsilon|^2 (K^\varepsilon g, K^\varepsilon g).$$

Первые два слагаемых в правой части этого равенства стремятся к 0, а остальные два слагаемых стремятся к $\|f\|^2$. Поэтому

$$\operatorname{Re}(\alpha^\varepsilon(f, g)) \rightarrow \|f\|^2, \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (12)$$

Далее,

$$|\alpha^\varepsilon(f, g)|^2 \rightarrow \frac{\|f\|^2}{\|g\|^2} |(f, g)|^2, \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Поэтому

$$(\operatorname{Im}(\alpha^\varepsilon(f, g)))^2 \rightarrow \frac{\|f\|^2}{\|g\|^2} (|(f, g)|^2 - \|f\|^2 \cdot \|g\|^2), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (13)$$

Левая часть формулы (13) неотрицательна, а правая часть в силу неравенства Коши-Буняковского неположительна. Поэтому

$$(\operatorname{Im}(\alpha^\varepsilon(f, g)))^2 \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

В силу (12) получаем, что $\alpha^\varepsilon \rightarrow \|f\|$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, откуда $\alpha^\varepsilon \rightarrow \alpha = \|f\|/(f, g)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Следовательно, $\|(\alpha^\varepsilon - \alpha)K^\varepsilon g\| \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ и в силу (11) по неравенству треугольника $\|K^\varepsilon(f - \alpha g)\| \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Из аксиомы 3 сразу же вытекает $f = \alpha g$. Лемма 4 доказана.

Оказывается, что зависящий от ε числовой коэффициент $c^\varepsilon(\xi, \beta)$ определяется неоднозначно, а с точностью до умножения на регулярный при $\varepsilon \rightarrow 0$ множитель.

ЛЕММА 5. Пусть для коэффициента $\tilde{c}_\Phi^\varepsilon(\xi, \beta)$ и оператора $\tilde{V}_{\pi\Phi}(\xi, \beta)$ также выполнено свойство (9). Тогда

$$\frac{\tilde{c}_\Phi^\varepsilon(\xi, \beta)}{c_\Phi^\varepsilon(\xi, \beta)} \rightarrow \lambda_{\pi\Phi}(\xi, \beta) \neq 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad \tilde{V}_{\pi\Phi}(\xi, \beta) = \frac{1}{\lambda_{\pi\Phi}(\xi, \beta)} V_{\pi\Phi}(\xi, \beta).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу свойства $\|K^\varepsilon \Phi(\xi + \sqrt{\varepsilon}\beta)\| \rightarrow \|\Phi(\xi)\| \neq 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ коэффициенты $\tilde{c}_\Phi^\varepsilon(\xi, \beta)$ и $c_\Phi^\varepsilon(\xi, \beta)$ отличны от 0 для достаточно малых ε . Из (9) вытекает, что

$$|c_\Phi^\varepsilon(\xi, \beta)| \cdot \|K^\varepsilon V_{\pi\Phi}(\xi, \beta)\Phi(\xi)\| \rightarrow \|\Phi(\xi)\|, \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

а из аксиомы 3 следует, что

$$\|K^\varepsilon V_{\pi\Phi}(\xi, \beta)\Phi(\xi)\| \rightarrow \|V_{\pi\Phi}(\xi, \beta)\Phi(\xi)\|, \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Отсюда получаем

$$|c_\Phi^\varepsilon(\xi, \beta)|^{-1} \rightarrow \frac{\|V_{\pi\Phi}(\xi, \beta)\Phi(\xi)\|}{\|\Phi(\xi)\|}, \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (14)$$

Из свойства (9), неравенства треугольника и формулы (14) вытекает, что

$$\left\| K^\varepsilon V_{\pi\Phi}(\xi, \beta)\Phi(\xi) - \frac{\tilde{c}_\Phi^\varepsilon(\xi, \beta)}{c_\Phi^\varepsilon(\xi, \beta)} K^\varepsilon \tilde{V}_{\pi\Phi}(\xi, \beta)\Phi(\xi) \right\| \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Применяя лемму 4, получаем

$$\frac{\tilde{c}_\Phi^\varepsilon(\xi, \beta)}{c_\Phi^\varepsilon(\xi, \beta)} \rightarrow \lambda_{\pi\Phi}(\xi, \beta), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad V_{\pi\Phi}(\xi, \beta)\Phi(\xi) = \lambda_{\pi\Phi}(\xi, \beta)\tilde{V}_{\pi\Phi}(\xi, \beta)\Phi(\xi).$$

Лемма 5 доказана.

ЛЕММА 6. Числовой множитель $c_\Phi^\varepsilon(\xi, \beta)$, входящий в формулу (9), представляется в виде

$$c_\Phi^\varepsilon(\xi, \beta) = \exp\left(-\frac{i}{\sqrt{\varepsilon}} \sum_{l=1}^k \omega_l(\xi, \Phi)\beta_l\right) \lambda_{\pi\Phi}(\xi, \beta)$$

для некоторого не зависящего от ε коэффициента $\lambda_{\pi\Phi}(\xi, \beta) \neq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим отображение $F: \mathbb{R}^{k+1} \rightarrow \mathcal{X}$ вида $F(\xi, s) = g_s\Phi(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}^k$, $s \in \mathbb{R}$. Записывая для этого отображения аксиому 6, получаем

$$\|K^\varepsilon F(\xi + \sqrt{\varepsilon}\beta, \sqrt{\varepsilon}s) - c_F^\varepsilon(\xi, 0; \beta, s) K^\varepsilon V_{\pi F}(\xi, 0; \beta, s) F(\xi, 0)\| \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (15)$$

Докажем, что при

$$s(\beta) = \sum_{l=1}^k \omega_l(\xi, \Phi)\beta_l \quad (16)$$

выполнено соотношение

$$\chi_{\xi, 0, \pi F}[\beta, s(\beta)] = 1, \quad (17)$$

т.е. множитель $c_F^\varepsilon(\xi, 0; \beta, s)$ не зависит от ε :

$$\lambda_{\pi\Phi}(\xi, \beta) = c_F^\varepsilon(\xi, 0; \beta, s).$$

Из аксиомы 2 следует, что

$$\|K^\varepsilon F(\xi + \varepsilon\beta, \varepsilon s) - e^{is} K^\varepsilon F(\xi + \varepsilon\beta, 0)\| \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Из аксиомы 5 и следствия из леммы 2 имеем

$$\left\| e^{is} K^\varepsilon F(\xi + \varepsilon\beta, 0) - \exp\left(i\left(s - \sum_{l=1}^k \omega_l(\xi, \Phi)\beta_l\right)\right) K^\varepsilon F(\xi, 0) \right\| \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Учитывая (16), получаем $\|K^\varepsilon F(\xi + \varepsilon\beta, \varepsilon s) - K^\varepsilon F(\xi, 0)\| \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Соотношения (17) и (18) доказаны.

Из аксиомы 2 получаем

$$\|K^\varepsilon F(\xi + \sqrt{\varepsilon}\beta, \sqrt{\varepsilon}s) - e^{is/\sqrt{\varepsilon}} K^\varepsilon F(\xi + \sqrt{\varepsilon}\beta, 0)\| \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Учитывая равенство $\Phi(\xi) = F(\xi, 0)$ и соотношение (15), а также неравенство треугольника, имеем

$$\|e^{is/\sqrt{\varepsilon}} K^\varepsilon \Phi(\xi + \sqrt{\varepsilon}\beta) - \lambda_{\pi\Phi}(\xi, \beta) K^\varepsilon V_{\pi F}(\xi, 0; \beta, s(\beta)) \Phi(\xi)\| \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Сравнивая данное соотношение с аксиомой 6 и учитывая (16), получаем утверждение леммы 6.

Исследуем свойства операторов $V_{\pi\Phi}(\xi, \beta)$. В силу леммы 5 эти операторы определены с точностью до числового множителя. Зафиксируем процедуру выбора этого множителя.

ЛЕММА 7. *Существует однозначно определенный числовой множитель $\rho_{\xi, \Phi}[\beta]$, отличный от 0, такой, что операторы $U_{\xi, \pi\Phi}(\beta) = \rho_{\xi, \Phi}[\beta] V_{\pi\Phi}[\xi, \beta]$ удовлетворяют свойствам:*

- 1) операторы $U_{\xi, \pi\Phi}(\beta)$ унитарны;
- 2) $U_{\xi, \pi\Phi}(0) = 1$;
- 3) выполнено

$$U_{\xi, \pi\Phi}(\beta + \gamma) = \exp\left(-\frac{i}{2} \sum_{l,s=1}^k \left(\frac{\partial \omega_l}{\partial \xi_s} - \frac{\partial \omega_s}{\partial \xi_l}\right) \gamma_s \beta_l\right) U_{\xi, \pi\Phi}(\gamma) U_{\xi, \pi\Phi}(\beta).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $\tilde{V}_{\xi, \pi\Phi}$ однозначно определенные операторы вида

$$\tilde{V}_{\xi, \pi\Phi} = \lambda_{\pi\Phi}(\xi, \beta) V_{\pi\Phi}(\xi, \beta), \quad (18)$$

где множитель $\lambda_{\pi\Phi}$ определен в лемме 6. Из аксиомы 6 вытекает, что

$$\left\| K^\varepsilon \Phi(\xi + \sqrt{\varepsilon}\beta) - \exp\left(-\frac{i}{\sqrt{\varepsilon}} \sum_{l=1}^k \omega_l(\xi, \Phi)\beta_l\right) K^\varepsilon \tilde{V}_{\xi, \pi\Phi}(\beta) \Phi(\xi) \right\| \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (19)$$

Так как $\|K^\varepsilon \Phi(\xi + \sqrt{\varepsilon}\beta)\| \rightarrow \|\Phi(\xi)\|$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, то и предел нормы $\|K^\varepsilon \tilde{V}_{\xi, \pi\Phi}(\beta) \Phi(\xi)\|$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ равен $\|\Phi(\xi)\|$. С другой стороны, по аксиоме 3 этот предел равен $\|\tilde{V}_{\xi, \pi\Phi}(\beta) \Phi(\xi)\|$.

Поэтому операторы $\tilde{V}_{\xi, \pi\Phi}(\beta)$ изометричны. Подставляя в формулу (19) $\beta = 0$, получаем, что $\tilde{V}_{\xi, \pi\Phi}(0) = 1$. Применяя формулу (9) для $\xi(\sqrt{\varepsilon}) = \xi + \sqrt{\varepsilon}\gamma$, получаем

$$\left\| K^\varepsilon \Phi(\xi + \sqrt{\varepsilon}\beta + \sqrt{\varepsilon}\gamma) - \exp\left(-\frac{i}{\sqrt{\varepsilon}} \sum_{l=1}^k \omega_l(\xi + \sqrt{\varepsilon}\gamma, \Phi) \beta_l\right) \times K^\varepsilon \tilde{V}_{\xi + \sqrt{\varepsilon}\gamma, \pi\Phi}(\beta) \Phi(\xi + \sqrt{\varepsilon}\gamma) \right\| \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Далее,

$$\left\| K^\varepsilon \tilde{V}_{\xi + \sqrt{\varepsilon}\gamma, \pi\Phi}(\beta) \Phi(\xi + \sqrt{\varepsilon}\gamma) - \exp\left(-\frac{i}{\sqrt{\varepsilon}} \sum_{l=1}^k \omega_l(\xi, \Phi) \gamma_l\right) \times K^\varepsilon \tilde{V}_{\xi, \pi\Phi}(\gamma) \tilde{V}_{\xi, \pi\Phi}(\beta) \Phi(\xi) \right\| \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Из неравенства треугольника следует, что

$$\left\| K^\varepsilon \Phi(\xi + \sqrt{\varepsilon}\beta + \sqrt{\varepsilon}\gamma) - \exp\left(-\frac{i}{\sqrt{\varepsilon}} \sum_{l=1}^k (\omega_l(\xi + \sqrt{\varepsilon}\gamma, \Phi) \beta_l + \omega_l(\xi, \Phi) \gamma_l)\right) \times K^\varepsilon \tilde{V}_{\xi, \pi\Phi}(\gamma) \tilde{V}_{\xi, \pi\Phi}(\beta) \Phi(\xi) \right\| \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

С другой стороны, формула (9) дает

$$\left\| K^\varepsilon \Phi(\xi + \sqrt{\varepsilon}(\beta + \gamma)) - \exp\left(-\frac{i}{\sqrt{\varepsilon}} \sum_{l=1}^k \omega_l(\xi, \Phi) (\beta_l + \gamma_l)\right) K^\varepsilon \tilde{V}_{\xi, \pi\Phi}(\beta + \gamma) \Phi(\xi) \right\| \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Поэтому

$$\left\| K^\varepsilon \tilde{V}_{\xi, \pi\Phi}(\beta + \gamma) \Phi(\xi) - \exp\left(-\frac{i}{\sqrt{\varepsilon}} \sum_{l=1}^k (\omega_l(\xi + \sqrt{\varepsilon}\gamma, \Phi) - \omega_l(\xi, \Phi)) \beta_l\right) \times K^\varepsilon \tilde{V}_{\xi, \pi\Phi}(\gamma) \tilde{V}_{\xi, \pi\Phi}(\beta) \Phi(\xi) \right\| \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Отсюда

$$\tilde{V}_{\xi, \pi\Phi}(\beta + \gamma) = \exp\left(-i \frac{\partial \omega_l}{\partial \xi_s} \gamma_s \beta_l\right) \tilde{V}_{\xi, \pi\Phi}(\gamma) \tilde{V}_{\xi, \pi\Phi}(\beta).$$

Переобозначая

$$U_{\xi, \pi\Phi}(\beta) = \exp\left(i \frac{\partial \omega_l}{\partial \xi_s}(\xi, \Phi) \beta_s \beta_l\right) \tilde{V}_{\xi, \pi\Phi}(\beta),$$

получаем формулу (18). Унитарность операторов $U_{\xi, \pi\Phi}(\beta)$ следует из изометричности операторов $\tilde{V}_{\xi, \pi\Phi}(\beta)$ и обратимости операторов $U_{\xi, \pi\Phi}(\beta)$, вытекающей из свойства (18) при $\beta = -\gamma$. Лемма 7 доказана.

Рассмотрим пополнение $[\pi^{-1}y]$ евклидова пространства $\pi^{-1}y$, являющееся гильбертовым пространством. В силу ограниченности построенные операторы $U_{\xi, \pi\Phi}$ продолжаются на пространство $[\pi^{-1}y]$.

Аналогично теореме Стоуна доказывается

СЛЕДСТВИЕ. Оператор $U_{\xi, \pi\Phi}(\beta)$ представляется в виде

$$U_{\xi, \pi\Phi}(\beta) = \exp\left(i \sum_{l=1}^k \Omega_l(\xi, \Phi) \beta_l\right),$$

где самосопряженные операторы Ω_l , действующие в $[\pi^{-1}y]$, удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[\Omega_s, \Omega_l] = i \left(\frac{\partial \omega_s}{\partial \xi_l} - \frac{\partial \omega_l}{\partial \xi_s} \right)$$

на некоторой плотной области определения.

Из доказанных утверждений вытекает следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\xi(\tau) = \xi + \alpha\tau + \beta\tau^2 + O(\tau^3)$. Тогда

$$\left\| K^\varepsilon \Phi(\sqrt{\varepsilon}) - \exp\left(-\frac{i}{\sqrt{\varepsilon}} \omega_l(\xi, \Phi)(\alpha_l + \beta_l \sqrt{\varepsilon})\right) \exp\left(-\frac{i}{2} \frac{\partial \omega_l}{\partial \xi_s}(\xi, \Phi) \alpha_l \alpha_s\right) \times K^\varepsilon e^{i\Omega_l(\xi, \Phi) \alpha_l} \Phi(\xi) \right\| \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Исследуем зависимость чисел $\omega_l(\xi, \Phi)$ и операторов $\Omega_l(\xi, \Phi)$ от отображения Φ .

Пусть $y(\tau)$ – гладкая кривая на базе $\mathcal{Y}$, являющейся гладким многообразием. Через $dy/d\tau$ будем обозначать касательный вектор к данной кривой в точке τ . Аналогично, сопоставим отображению $y = y(\xi_1, \dots, \xi_k)$ набор векторов $\partial y / \partial \xi_l$, $l = \overline{1, k}$, принадлежащих касательному пространству к многообразию $\mathcal{Y}$ в точке $y(\xi)$.

ТЕОРЕМА 2. 1. Существует дифференциальная 1-форма ω на многообразии $\mathcal{Y}$ такая, что ее значение на касательном векторе $\partial(\pi\Phi)/\partial \xi_l$ в точке $\pi\Phi(\xi)$ равно $\omega_l(\xi, \Phi)$.

2. Существует операторнозначная дифференциальная 1-форма Ω на многообразии $\mathcal{Y}$ такая, что ее значение на касательном векторе $\partial(\pi\Phi)/\partial \xi_l$ в точке $\pi\Phi(\xi)$ равно $\Omega_l(\xi, \Phi)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Под операторнозначной 1-формой на $\mathcal{Y}$ понимается совокупность линейных отображений Ω_y из касательного пространства $T\mathcal{Y}_y$ в пространство операторов, действующих в $[\pi^{-1}y]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу локальной тривиальности расслоения $\pi: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ для любого касательного вектора ζ к многообразию $\mathcal{Y}$ в точке y существует кривая $\Phi(\tau)$ на $\mathcal{X}$ такая, что $\pi\Phi(0) = y$ и $d(\pi\Phi(0))/d\tau = \zeta$. Сопоставим касательному вектору ζ число $\omega_1(0, \Phi)$ и оператор $\Omega_1(0, \Phi)$. Покажем, что данные отображения $\omega: \zeta \mapsto \omega_1(0, \Phi)$ и $\Omega: \zeta \mapsto \Omega_1(0, \Phi)$ не зависят от выбора кривой $\pi\Phi$ и определяют 1-форму ω_1 и операторнозначную 1-форму Ω .

Для доказательства однозначности построенных отображений воспользуемся локальной тривиальностью расслоения $\pi: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$: существует окрестность O_y точки y , диффеоморфная пространству $\mathbb{R}^n$ (или гильбертову пространству $\mathcal{H}$ в случае бесконечномерного многообразия $\mathcal{Y}$), такая, что $\pi^{-1}O_y = O_y \times \mathcal{F}$, где $\mathcal{F}$ – гильбертово пространство. Таким образом, кривой $\Phi(\tau)$ при $\tau \in (0, \tau_0)$ сопоставляется упорядоченная пара $(y(\tau), f(\tau))$, $y(\tau) \in O_y$, $f(\tau) \in \mathcal{F}$, причем $\pi\Phi(\tau) = y(\tau)$. Однозначность отображений вытекает из следующей леммы.

ЛЕММА 8. Пусть $\Phi(\tau) = (y(\tau), f(\tau))$, $\tilde{\Phi}(\tau) = (\tilde{y}(\tau))$ – две кривые на $O_y \times \mathcal{F}$ такие, что

$$y(0) = \tilde{y}(0), \quad \frac{dy}{d\tau}(0) = \frac{d\tilde{y}}{d\tau}(0).$$

Тогда $\omega_1(0, \Phi) = \omega_1(0, \tilde{\Phi})$ и $\Omega_1(0, \Phi) = \Omega_1(0, \tilde{\Phi})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим отображение $\phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow O_y \times \mathcal{F}$ вида

$$\phi(\tau, \alpha) = \left(y(\tau) + \frac{\tilde{y}(\tau) - y(\tau)}{\tau^2} \alpha, f(\tau) \right),$$

связанное с Φ и $\tilde{\Phi}$: $\phi(\tau, 0) = \Phi(\tau)$, $\phi(\tau, \tau^2) = \tilde{\Phi}(\tau)$. Из теоремы 1 вытекает, что

$$\left\| K^\varepsilon \phi(\alpha\sqrt{\varepsilon} + \beta\varepsilon, \gamma\varepsilon + \rho\varepsilon^2) - \exp\left(-\frac{i}{\sqrt{\varepsilon}}\omega_1(0, \phi)(\alpha + \beta\sqrt{\varepsilon}) - i\omega_2(0, \phi)\gamma\right) \times \exp\left(-\frac{i}{2}\frac{\partial\omega_1}{\partial\xi_1}(\xi, \phi)\alpha^2\right) K^\varepsilon e^{i\Omega_1(\xi, \Phi)}\Phi(0) \right\| \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (20)$$

Подставляя в формулу (20) $\alpha = \gamma = \rho = 0$ и сравнивая ее с формулой (19), в силу однозначности ω_1 получаем $\omega_1(0, \Phi) = \omega_1(0, \phi)$. Аналогично, при $\alpha = \gamma = 0$, $\rho = \beta^2$ имеем $\omega_1(0, \tilde{\Phi}) = \omega_1(0, \phi)$. При $\beta = \gamma = \rho = 0$ получаем

$$\frac{\partial\omega_1}{\partial\xi_1}(0, \Phi) = \frac{\partial\omega_1}{\partial\xi_1}(0, \phi), \quad \Omega_1(0, \Phi) = \Omega_1(0, \phi),$$

а при $\beta = \rho = 0$, $\gamma = \alpha^2$

$$\frac{\partial\omega_1}{\partial\xi_1}(0, \Phi) = \frac{\partial\omega_1}{\partial\xi_1}(0, \phi) + 2\omega_2(0, \phi), \quad \Omega_1(0, \tilde{\Phi}) = \Omega_1(0, \phi).$$

Лемма 8 доказана.

Выражение $\Phi: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathcal{X}$, рассмотренное как функция одного из своих аргументов, является кривой на $\mathcal{X}$, поэтому в силу леммы 8 значение ω на векторе $\partial(\pi\Phi)/\partial\xi_l$ в точке $\pi\Phi(\xi)$ равно $\omega_l(\xi, \Phi)$, а значение Ω на этом векторе равно $\Omega_l(\xi, \Phi)$.

Докажем, что отображения ω и Ω являются дифференциальными формами.

ЛЕММА 9. Отображения ω и Ω линейны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно проверить, что для любых касательных к многообразию $\mathcal{U}$ векторов ζ_1 и ζ_2 и $\lambda \in \mathbb{R}$ выполнены соотношения

$$\begin{aligned} \omega(\zeta_1 + \lambda(\zeta_2 - \zeta_1)) &= (1 - \lambda)\omega(\zeta_1) + \lambda\omega(\zeta_2), \\ \Omega(\zeta_1 + \lambda(\zeta_2 - \zeta_1)) &= (1 - \lambda)\Omega(\zeta_1) + \lambda\Omega(\zeta_2). \end{aligned} \quad (21)$$

Рассмотрим две кривые на $O_y \times \mathcal{F}$:

$$\Phi_0(\tau) = (y_0(\tau), f(\tau)), \quad \Phi_1(\tau) = (y_1(\tau), f(\tau)),$$

выходящие при $\tau = 0$ из одной точки. Для доказательства формулы (21) проверим, что для отображения $\Phi_\lambda(\tau) = (y_1(\tau) + \lambda(y_2(\tau) - y_1(\tau)), f(\tau))$ справедливы свойства

$$\begin{aligned}\omega_1(0, \Phi_\lambda) &= (1 - \lambda)\omega_1(0, \Phi_0) + \lambda\omega_1(0, \Phi_1), \\ \Omega_1(0, \Phi_\lambda) &= (1 - \lambda)\Omega_1(0, \Phi_0) + \lambda\Omega_1(0, \Phi_1).\end{aligned}\tag{22}$$

Рассмотрим отображение

$$\phi(\tau, \alpha) = \left(y_1(\tau) + \frac{y_2(\tau) - y_1(\tau)}{\tau} \alpha, f(\tau) \right).$$

Поскольку $\Phi_\lambda(\tau) = \phi(\tau, \lambda\tau)$, из теоремы 1 по аналогии с доказательством леммы 8 получаем

$$\omega_1(0, \Phi_\lambda) = \omega_1(0, \phi) + \lambda\omega_2(0, \phi), \quad \Omega_1(0, \Phi_\lambda) = \Omega_1(0, \phi) + \lambda\Omega_2(0, \phi).$$

Свойства (22), лемма 9 и теорема 2 доказаны.

4. Примеры абстрактных канонических операторов. В этом пункте приводятся примеры отображений, для которых выполнены аксиомы 1–6.

4.1. Абстрактный канонический оператор и фазовое пространство.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим тривиальное квазиклассическое расслоение с базой $\mathcal{Y} = \mathbb{R}^{2n+1} = \{(S, P, Q) \mid S \in \mathbb{R}, P \in \mathbb{R}^n, Q \in \mathbb{R}^n\}$ и слоем $L^2(\mathbb{R}^n)$. Пусть $\mathcal{H}^\varepsilon = L^2(\mathbb{R}^n)$. Рассмотрим абстрактный канонический оператор $K^\varepsilon: \mathbb{R}^{2n+1} \times L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{H}^\varepsilon$ вида

$$(K^\varepsilon(S, P, Q; f))(x) = \frac{1}{\varepsilon^{n/4}} \exp\left(\frac{i}{\varepsilon}S\right) \exp\left(\frac{i}{\varepsilon}P(x - Q)\right) f\left(\frac{x - Q}{\sqrt{\varepsilon}}\right),$$

где $(S, P, Q) \in \mathcal{Y}$, $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Ему отвечает 1-форма $\omega = -dS + P dQ$ и операторно-значная 1-форма Ω , переводящая элемент f пространства $\pi^{-1}y = L^2(\mathbb{R}^n)$ в дифференциальную 1-форму

$$(\Omega f)(\xi) = dP \xi f(\xi) - dQ \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial \xi}.$$

Отображение g_s является сдвигом S на s .

В рассмотренном примере расширенное фазовое пространство $\mathcal{Y}$ является прямым произведением пространства $\mathbb{R}$ и фазового пространства $\mathbb{R}^{2n}$. Определим аналог понятия фазового пространства для произвольного абстрактного канонического оператора.

Рассмотрим действие преобразований g_s на множестве $\mathcal{Y}$. Сопоставим каждому элементу этого множества $y \in \mathcal{Y}$ его орбиту $[y] = \{g_sy \mid s \in \mathbb{R}\}$. Множество всех таких орбит обозначим через $\mathcal{X}$. Будем называть множество $\mathcal{X}$ *фазовым пространством*.

Определим на $\mathcal{X}$ структуру гладкого многообразия, т.е. покажем, что локально $\mathcal{X}$ диффеоморфно $\mathbb{R}^{n-1}$ в случае n -мерного многообразия $\mathcal{Y}$ и гильбертову пространству в случае бесконечномерного $\mathcal{Y}$.

Пусть $y \in \mathcal{Y}$. Положим $g_sy = \pi g_s z$ для произвольного $z \in \pi^{-1}y$. Рассмотрим кривую $y(s) = g_sy$ на $\mathcal{Y}$.

ЛЕММА 10. *Касательный к кривой $y(s)$ вектор отличен от 0.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Тогда в силу аксиомы 4 $\|K^\varepsilon g_\varepsilon z - K^\varepsilon z\| \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. В силу аксиомы 2 $\|K^\varepsilon g_\varepsilon z - e^{is} K^\varepsilon z\| \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Поэтому $\|e^{is} K^\varepsilon z - K^\varepsilon z\| \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Следовательно, $e^{is} = 1$. Лемма 10 доказана.

СЛЕДСТВИЕ. *На многообразии $\mathcal{Y}$ можно ввести локальные координаты $(y_1, y_2, \dots)$ такие, что $g_s(y_1, y_2, \dots) = (y_1 + s, y_2, \dots)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $(Y_1, Y_2, \dots)$ – локальные координаты на $\mathcal{Y}$. Преобразование g_s переводит точку Y на $\mathcal{Y}$ с этими локальными координатами в точку с координатами $((g_s Y)_1, (g_s Y)_2, \dots)$. В силу леммы 10 для некоторого j $\partial(g_s Y)_j / \partial s \neq 0$; не ограничивая общности, можно считать, что $\partial(g_s Y)_1 / \partial s \neq 0$. Рассмотрим отображение $(y_1, y_2, \dots) \mapsto (Y_1, Y_2, \dots)$ вида

$$Y_i(y_1, y_2, y_3, \dots) = (g_{y_1}(0, y_2, y_3, \dots))_i, \quad i = \overline{1, \infty}.$$

При $y_1 = 0$ имеем

$$\frac{\partial Y_i}{\partial y_1} \neq 0, \quad \frac{\partial Y_i}{\partial y_j} = \delta_{ij}, \quad i, j \geq 2.$$

Поэтому в некоторой окрестности начала координат якобиан перехода от $(y_1, y_2, \dots)$ к $(Y_1, Y_2, \dots)$ отличен от 0 и, таким образом, данное преобразование является обратимым. Следствие доказано.

Таким образом, координаты $(y_2, y_3, \dots)$ являются координатами на пространстве орбит $\mathcal{X}$, т.е. $\mathcal{X}$ является гладким многообразием. Рассмотрим отображение гладких многообразий $g: \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$, сопоставляющее элементу $y \in \mathcal{Y}$ его орбиту $[y]$. Обозначим через g_* соответствующее отображение касательных к многообразиям $\mathcal{Y}$ и $\mathcal{X}$ в точках y и $[y]$ пространств $g_*: T\mathcal{Y}_y \rightarrow T\mathcal{X}_{[y]}$.

Пусть ω_n – дифференциальная n -форма на $\mathcal{Y}$. Будем говорить, что она *допускает редукцию на пространство орбит $\mathcal{X}$* , если существует дифференциальная n -форма ω_n^x на $\mathcal{X}$ такая, что

$$\omega_n^x(g_*\xi_1, \dots, g_*\xi_n) = \omega_n(\xi_1, \dots, \xi_n) \quad (23)$$

для любых $\xi_1, \dots, \xi_n \in T\mathcal{Y}_y$.

Исследуем структуру 1-форм ω и Ω в локальных координатах $(y_1, y_2, \dots)$.

ЛЕММА 11. *Дифференциальные 1-формы ω и Ω представляются в виде*

$$\omega = -dy_1 + \sum_{j \geq 2} \omega_j(y_2, y_3, \dots) dy_j, \quad \Omega = \sum_{j \geq 2} \Omega_j dy_j.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представим формы ω и Ω в виде

$$\omega = \sum_{j \geq 1} \omega_j dy_j, \quad \Omega = \sum_{j \geq 1} \Omega_j dy_j.$$

Рассмотрим отображение $\Phi: s \mapsto g_s z$. Значение форм ω и Ω на касательном векторе $\partial(\pi\Phi)/\partial s$ равны ω_1 и Ω_1 соответственно. Поэтому в силу теоремы 1

$$\left\| K^\varepsilon \Phi(\alpha\sqrt{\varepsilon} + \beta\varepsilon) - \exp\left(-\frac{i}{\sqrt{\varepsilon}}\omega_1(\alpha + \beta\sqrt{\varepsilon})\right) \exp\left(-\frac{i}{2}\frac{\partial\omega_1}{\partial y_1}\alpha^2\right) K^\varepsilon e^{i\Omega_1\alpha} \Phi(0) \right\| \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

С другой стороны, из аксиомы 2 вытекает, что

$$\left\| K^\varepsilon \Phi(\alpha\sqrt{\varepsilon} + \beta\varepsilon) - \exp\left(-\frac{i}{\sqrt{\varepsilon}}(\alpha + \beta\sqrt{\varepsilon})\right) K^\varepsilon \Phi(0) \right\| \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Поэтому $\omega_1 = -1$, $\Omega_1 = 0$. В силу следствия из леммы 7

$$0 = [\Omega_1, \Omega_j] = -i \frac{\partial\omega_j}{\partial y_1}.$$

Следовательно, ω_j зависят только от $y_2, y_3, \dots$. Лемма 11 доказана.

Поскольку для дифференциальной формы $d\omega^x$ на $\mathcal{X}$ вида

$$d\omega^x = \sum_{k,j \geq 2} \frac{\partial\omega_j}{\partial y_k} dy_k \wedge dy_j$$

справедливо свойство (23), из леммы 11 вытекает

СЛЕДСТВИЕ. *Дифференциальная форма $d\omega$ допускает редукцию на пространство орбит $\mathcal{X}$.*

Таким образом, на фазовом пространстве $\mathcal{X}$ однозначно вводится симплектическая структура $d\omega^x$, совпадающая в случае примера 1 с $dP \wedge dQ$. Отметим, что 1-форма действия ω не допускает редукции на фазовое пространство.

4.2. Примеры нетривиальных фазовых пространств. Рассмотрим примеры абстрактных канонических операторов, которым отвечают топологически нетривиальные фазовые пространства. Эти фазовые пространства возникали в [7].

ПРИМЕР 2. Определим абстрактный канонический оператор, через который выражаются приближенные решения разностных уравнений. Рассмотрим тривиальное квазиклассическое расслоение $\pi: \mathcal{Z} = \mathcal{Y} \times \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{Y}$ со слоем $\mathcal{F}$, являющимся пространством Шварца гладких быстроубывающих функций на прямой, и базой $\mathcal{Y} = \mathbb{R}^{2n+1}$. Пусть ε пробегает дискретный набор значений $\{1/N \mid N \in \mathbb{N}\}$, а $\mathcal{H}^\varepsilon$ при $\varepsilon = 1/N$ есть N -мерное комплексное пространство. Рассмотрим оператор $K^\varepsilon: \mathcal{Y} \times \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{H}^\varepsilon$ вида

$$(K^\varepsilon(S, P, Q; f))_k = \frac{1}{N^{1/4}} \sum_{l \in \mathbb{Z}} e^{iNS} \exp\left(iNP\left(\frac{k}{N} - Q - l\right)\right) f\left(\sqrt{N}\left(\frac{k}{N} - Q - l\right)\right); \quad (24)$$

1-формы ω и Ω совпадают с построенными в примере 1.

ПРИМЕР 3. Рассмотренный в примере 2 абстрактный канонический оператор инвариантен относительно дискретной группы преобразований базы $\mathcal{Y}$:

$$P \rightarrow P + 2\pi k, \quad S \rightarrow S + 2\pi Qk + 2\pi n, \quad Q \rightarrow Q + l, \quad k, l, n \in \mathbb{Z}. \quad (25)$$

Обозначим через $[S, P, Q]$ орбиту точки (S, P, Q) , т.е. множество всех точек вида (25), а через $\mathcal{Y}'$ соответствующее пространство орбит, также являющееся гладким многообразием. Оператор, сопоставляющий паре (y', f) , $y' \in \mathcal{Y}'$, где (S, P, Q) – произвольный представитель класса эквивалентности y' , удовлетворяет всем аксиомам абстрактного канонического оператора. Отметим, что фазовым пространством в данном случае является тор.

Процедуру построения абстрактного канонического оператора из примера 3 можно обобщить следующим образом. Пусть $K^\varepsilon: \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{H}^\varepsilon$ – произвольный абстрактный канонический оператор. Каждому элементу $z \in \mathcal{Z}$ сопоставим класс эквивалентности $[z] \subset \mathcal{Z}$, состоящий из всех $z' \in \mathcal{Z}$ таких, что $K^\varepsilon z' = K^\varepsilon z$. Рассмотрим множество всех классов эквивалентности $\mathcal{Z}'$ и выберем его в качестве пространства расслоения. База расслоения $\mathcal{Y}'$ строится следующим образом. Каждому элементу $y \in \mathcal{Y}$ сопоставим класс эквивалентности $[y] = \bigcup_{z \in \pi^{-1}y} \pi[z]$; $\mathcal{Y}'$ является множеством всех таких классов эквивалентности. В качестве отображения $\pi': \mathcal{Z}' \rightarrow \mathcal{Y}'$ выберем отображение вида $\pi'[z] = [\pi z]$, где $z \in [z]$. Положим $K^{\varepsilon'}[z] = K^\varepsilon z$ для некоторого $z \in [z]$. Данное определение абстрактного канонического оператора $K^{\varepsilon'}$ не зависит от выбора представителя класса эквивалентности.

ПРИМЕР 4. Параметр ε может пробегать и непрерывный набор значений: можно рассмотреть абстрактный канонический оператор K^ε , переводящий пару (y, f) в вектор (24), отвечающий $N = [1/\varepsilon]$.

ПРИМЕР 5. Абстрактный канонический оператор из примера 4 обобщается на d -мерный случай следующим образом. Пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_d \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F}$ – пространство Шварца гладких быстроубывающих функций на d -мерном пространстве, $\pi: \mathcal{Y}_d \times \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{Y}_d$ – тривиальное квазиклассическое расслоение с базой $\mathcal{Y}_d = \mathbb{R}^{2d+1} = \{(S, P, Q) \mid S \in \mathbb{R}, P, Q \in \mathbb{R}^d\}$, $\mathcal{H}^\varepsilon$ – пространство функций целочисленного d -мерного вектора k , i -я компонента которого пробегает значения от 0 до $N_i - 1$, $N_i = [\alpha_i/\varepsilon]$. Рассмотрим абстрактный канонический оператор вида

$$\begin{aligned} (K^\varepsilon(S, P, Q; f))_k = & \sum_{l_1, \dots, l_d \in \mathbb{Z}} \exp \left(i \sum_{m=1}^d N_m S + i \sum_{m=1}^d N_m P_m \left(\frac{k_m}{N_m} - Q_m - l_m \right) \right) \\ & \times f \left(\sqrt{N_1} \left(\frac{k_1}{N_1} - Q_1 - l_1 \right), \dots, \sqrt{N_d} \left(\frac{k_d}{N_d} - Q_d - l_d \right) \right) \frac{1}{N^{d/4}}, \end{aligned}$$

которому отвечают 1-формы

$$\omega = \sum_{m=1}^d \alpha_m (P_m dQ_m - dS), \quad \Omega = \sum_{m=1}^d \alpha_m \left(dP_m \xi - dQ_m \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \xi} \right).$$

Аналогично примеру 3 можно перейти от базы $\mathcal{Y}_d$ к базе $\mathcal{Y}'_d$, состоящей из классов эквивалентности $\{(S + 2\pi \sum_m Q_m k_m + 2\pi n, P + 2\pi k, Q + l)\}$, где k, l – целочисленные векторы, n – целое число. Фазовым пространством в данном случае является d -мерный тор.

Отметим, что абстрактный канонический оператор из примера 5 позволяет рассматривать фазовые пространства, не накладывая никаких условий квантования, в отличие от теории асимптотического квантования [7]. Квантованность фазового пространства проявляется здесь в том, что операторы K^ε могут пробегать лишь дискретный набор значений, характеризуемых числами $(N_1, \dots, N_d)$, хотя параметр ε пробегает непрерывный набор значений. Данное замечание аналогично замечанию [7, с. 176], согласно которому любое лагранжево многообразие можно сделать квантованным.

4.3. Абстрактные канонические операторы, связанные с группами Ли.

ПРИМЕР 6. Рассмотрим систему с (целым или полупелым) угловым моментом l , играющим роль “большого” параметра. Пространство $\mathcal{H}^{1/l}$ выберем в виде комплексного $(2l + 1)$ -мерного пространства, т.е. в виде пространства последовательностей $(\psi_{-l}, \psi_{-l+1}, \dots, \psi_{l-1}, \psi_l)$. Абстрактный канонический оператор выражается через оператор W_l , действующий из комплексного евклидова пространства финитных последовательностей из ℓ^2 в пространство $\mathcal{H}^{1/l}$, переводящий бесконечную последовательность $(f_0, f_1, \dots)$ в конечную последовательность $((W_l f)_{-l}, (W_l f)_{-l+1}, \dots, (W_l f)_l)$ вида $(W_l f)_m = f_{l-m}$. Расширенное фазовое пространство $\mathcal{Y}$ является прямым произведением $\mathbb{R} \times \text{SU}(2)$, т.е. множеством всех упорядоченных пар вида (S, g) , где $S \in \mathbb{R}$, $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^* & \alpha^* \end{pmatrix} \in \text{SU}(2)$, $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. Рассмотрим представление $T_g^l: \mathcal{H}^{1/l} \rightarrow \mathcal{H}^{1/l}$ в пространстве $\mathcal{H}^{1/l}$. Известно (см., например, [8]), что операторы $T_g^l: \mathcal{H}^{1/l} \rightarrow \mathcal{H}^{1/l}$ однозначно определяются из соотношений на однородные многочлены степени $2l$, зависящие от аргументов x и y :

$$\begin{aligned} \sum_{m=-l}^l (T_g^l \varphi)_m \sqrt{\frac{(2l)!}{(l-m)!(l+m)!}} x^{l+m} y^{l-m} \\ = \sum_{m=-l}^l \varphi_m \sqrt{\frac{(2l)!}{(l-m)!(l+m)!}} (\alpha x - \beta^* y)^{l+m} (\beta x + \alpha^* y)^{l-m}. \end{aligned}$$

Отображение $K^\varepsilon: \mathbb{R} \times \text{SU}(2) \times \ell^2 \rightarrow \mathcal{H}^{1/l}$, удовлетворяющее аксиомам 1–6, определим следующим образом:

$$K^\varepsilon(S, g, f) = \exp\left(\frac{i}{\varepsilon} S\right) T_g^l W_l f, \quad \varepsilon = \frac{1}{l}. \quad (26)$$

Для исследования преобразования абстрактного канонического оператора (26) при малом сдвиге S и g рассмотрим вектор $T_{g(\tau)}^l W_l f$, отвечающий кривой $g(\tau)$ на группе $\text{SU}(2)$, выходящей из точки $g(0) = 1$. Представим кривую $g(\tau)$ в виде $g(\tau) = \exp A(\tau)$, где $A(\tau) = \begin{pmatrix} i\xi & \eta \\ -\eta^* & -i\xi \end{pmatrix}$ – антиэрмитова бесследовая матрица, имеющая порядок $O(\tau)$ при

$\tau \rightarrow 0$. Оператор $T_{g(\tau)}^l$ выражается через представление $T_A^l(\tau)$ соответствующей алгебры Ли:

$$T_{g(\tau)}^l = \exp(T_A^l(\tau)),$$

$$(T_A^l(\tau)\varphi)_m = 2i\xi m\varphi_m + \eta\sqrt{(l+m)(l-m+1)}\varphi_{m-1} - \eta^*\sqrt{(l-m)(l+m+1)}\varphi_{m+1}.$$

Используя определение оператора W_l , получаем $T_{g(\tau)}^l W_l f = W_l \exp(\tilde{T}_A^l(\tau))f$, где

$$(\tilde{T}_A^l(\tau)f)_n = 2i\xi(l-n)f_n + \eta\sqrt{(n+1)(2l-n)}f_{n+1} - \eta^*\sqrt{n(2l-n+1)}f_{n-1}.$$

Учитывая, что $l = 1/\varepsilon$, получаем

$$T_{1+\varepsilon\delta g+O(\varepsilon^2)}^l W_l f = e^{2\varepsilon l\delta\alpha} W_l f + O(\sqrt{\varepsilon}), \quad T_{1+\sqrt{\varepsilon}\delta g+O(\varepsilon)}^l W_l f = \text{const } W_l e^B f,$$

где через B обозначен оператор $B: \ell^2 \rightarrow \ell^2$ вида

$$(B\varphi)_n = \sqrt{2l\varepsilon\delta\beta}\sqrt{n+1}\varphi_{n+1} - \sqrt{2l\varepsilon\delta\beta^*}\sqrt{n}\varphi_{n-1}.$$

Таким образом, в точке $g = 1$ 1-формы ω и Ω имеют вид

$$\omega = 2i d\alpha - ds, \quad \Omega = -\sqrt{2}i(d\beta a^+ - d\beta^* a^-),$$

где через $a^\pm$ обозначены операторы рождения-уничтожения в пространстве ℓ^2 [9]:

$$(a^+ f)_n = \sqrt{n}f_{n-1}, \quad (a^- f)_{n-1} = \sqrt{n}f_n.$$

Для нахождения форм ω и Ω при произвольном g воспользуемся соотношением

$$K^\varepsilon(S + \delta S, g + \delta g, f) = \exp\left(\frac{i}{\varepsilon}(S + \delta S)\right) T_g^l K^\varepsilon(0, 1 + g^{-1}\delta g, f).$$

Из него вытекает, что значения форм ω и Ω в точке g на касательном векторе δg равны значениям этих форм в точке $g = 1$ на касательном векторе $g^{-1}\delta g$ (иными словами, эти формы левоинвариантны). Отсюда при произвольном g получаем

$$\omega = 2i(\alpha^* d\alpha - \beta d\beta^*) - dS, \quad \Omega = -\sqrt{2}i((\alpha^* d\beta - \beta d\alpha^*)a^+ - (\alpha d\beta^* - \beta^* d\alpha)a^-). \quad (27)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Утверждение о левоинвариантности 1-форм ω и Ω справедливо и в общем случае, когда абстрактный канонический оператор представляется в виде (26) для произвольной группы Ли.

ПРИМЕР 7. Рассмотренный в примере 6 абстрактный канонический оператор инвариантен относительно преобразований:

$$S \rightarrow S + \tau, \quad \alpha \rightarrow \alpha e^{-i\tau/2}, \quad \beta \rightarrow \beta e^{i\tau/2}, \quad f \rightarrow e^{-ia^+ a^- \tau} f, \quad (28)$$

где τ – вещественный параметр. Применяя описанную в предыдущем примере процедуру редукции абстрактного канонического оператора, получаем отображение K^ε следующего вида. В качестве пространства $\mathcal{X}'$ рассмотрим факторпространство пространства $\mathcal{X}$ по отношению эквивалентности (28). Базой $\mathcal{Y}'$ является множество всех классов эквивалентности $[S, \alpha, \beta]$. На $\mathcal{Y}'$ однозначно определены 1-формы ω и Ω (27). Фазовым пространством является факторногообразие группы $SU(2)$ по отношению эквивалентности $\alpha \rightarrow \alpha e^{-i\tau/2}, \beta \rightarrow \beta e^{i\tau/2}$, т.е. двумерная сфера с симплектической 2-формой, задающей площадь сферы.

ПРИМЕР 8 (“1/ N -разложение”). Рассмотрим бозонное пространство Фока $\mathcal{F}_N$ с N степенями свободы (N – большой параметр). Напомним [9], что элементами этого пространства являются наборы

$$(f^{(0)}, f_{i_1}^{(1)}, f_{i_1 i_2}^{(2)}, \dots, f_{i_1 \dots i_n}^{(n)}, \dots)$$

симметричных по $i_1, \dots, i_n \in \{1, 2, \dots, N\}$ функций $f_{i_1 \dots i_n}^{(n)}$, удовлетворяющие свойству

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^N |f_{i_1 \dots i_n}^{(n)}|^2 < \infty.$$

Скалярное произведение в $\mathcal{F}_N$ задается следующим образом:

$$(f, g) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^N f_{i_1 \dots i_n}^{(n)*} g_{i_1 \dots i_n}^{(n)},$$

а операторы рождения-уничтожения $a_1^+, \dots, a_N^+, a_1^-, \dots, a_N^-$ имеют вид

$$(a_i^+ f)_{i_1 \dots i_n}^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \delta_{ii_k} f_{i_1 \dots i_{k-1} i_{k+1} \dots i_n}^{(n-1)}, \quad (a_i^- f)_{i_1 \dots i_{n-1}}^{(n-1)} = \sqrt{n} f_{i i_1 \dots i_{n-1}}^{(n)}.$$

Вакуумным вектором $\Phi_N^{(0)} \in \mathcal{F}_N$ называется вектор, нулевая компонента которого равна 1, а остальные компоненты равны 0. Рассмотрим группу Ли, состоящую из матриц $\begin{pmatrix} u & v \\ v^* & u^* \end{pmatrix}$, $|u|^2 - |v|^2 = 1$, и ее универсальную накрывающую, которую обозначим через $\mathcal{G}$. Рассмотрим следующее представление $\mathcal{G}$ в пространстве $\mathcal{F}_N$ [9]:

$$T_{\exp}^N \left(it \begin{pmatrix} -c & b \\ b^* & c \end{pmatrix} \right) = \exp \left(it \left(\frac{b}{2} \sum_{k=1}^N (a_k^+)^2 + \frac{b^*}{2} \sum_{k=1}^N (a_k^-)^2 + c \sum_{k=1}^N a_k^+ a_k^- + \frac{Nc}{2} \right) \right)$$

и оператор $W_N: \mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{F}_N$ вида

$$W_N f = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n!}} f^{(n)} \left(\frac{1}{\sqrt{2N}} \sum_{k=1}^N (a_k^+)^2 \right)^n \Phi_N^{(0)}.$$

Рассмотрим расширенное фазовое пространство $\mathcal{Y} = \mathbb{R} \times \mathcal{G}$ и тривиальное расслоение $\pi: \mathcal{Y} \times \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{Y}$, где $\mathcal{F}$ – множество всех финитных векторов из $\mathcal{F}_1$. Абстрактный канонический оператор $K^\varepsilon: \mathcal{Y} \times \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_N$ ($\varepsilon = 1/N$) вида

$$K^\varepsilon(S, g, f) = \exp\left(\frac{i}{\varepsilon}S\right) T_g^{1/\varepsilon} W_N f \quad (29)$$

используется при построении асимптотик в теории большого числа полей с помощью метода $1/N$ -разложения [10], [11]. Отображению (29) отвечают инвариантные 1-формы ω и Ω , имеющие при $g = 1$ вид

$$\omega = \frac{i}{2i} du - dS, \quad \Omega = -\frac{i}{\sqrt{2}}(a^+ dv - a^- dv^*),$$

а при произвольном u, v вид

$$\omega = -\frac{i}{2}(u^* du - v dv^*) - dS, \quad \Omega = -\frac{i}{\sqrt{2}}(a^+(u^* dv - v du^*) - a^-(u dv^* - v^* du)).$$

ПРИМЕР 9. Рассмотренный в примере 8 абстрактный канонический оператор инвариантен относительно преобразования

$$u \rightarrow ue^{i\tau/2}, \quad v \rightarrow ve^{-i\tau/2}, \quad S \rightarrow S + \frac{\tau}{4}, \quad f \rightarrow e^{i\tau a^+ a^-} f.$$

Применяя процедуру редукции, описанную в подпункте 4.2, получаем абстрактный канонический оператор, которому отвечает фазовое пространство, элементами которого являются классы эквивалентности $[(u, v)] = \{(ue^{i\tau/2}, ve^{-i\tau/2})\}$. Каждому классу эквивалентности взаимно однозначно сопоставляется число $z = v/u^*$, которое по модулю меньше 1; числу z сопоставляется класс эквивалентности

$$\left\{ \left(\frac{1}{1-|z|^2} e^{i\tau/2}, \frac{z}{1-|z|^2} e^{-i\tau/2} \right) \right\}.$$

Поскольку симплектическая структура на фазовом пространстве имеет вид

$$-\frac{i}{2(1-|z|^2)^2} dz^* \wedge dz,$$

фазовое пространство в данном примере совпадает с плоскостью Лобачевского. Отметим, что фазовые пространства в виде сферы и плоскости Лобачевского рассматривались в [12].

4.4. Применения к системам многих частиц.

ПРИМЕР 10. Пусть $\mathcal{F}$ – бозонное пространство Фока с бесконечным числом степеней свободы. Положим $\mathcal{H}^\varepsilon = \mathcal{F}$, $\pi: \mathbb{R} \times \ell^2 \times \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R} \times \ell^2$ – тривиальное расслоение,

$$K^\varepsilon(S, \varphi, f) = \exp\left(\frac{i}{\varepsilon}S\right) \exp\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \sum_{k=1}^{\infty} (\varphi_k a_k^+ - \varphi_k^* a_k^-)\right) f.$$

Данному абстрактному каноническому оператору отвечают 1-формы

$$\omega = \frac{i}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (\varphi_k^* d\varphi_k - \varphi_k d\varphi_k^*) - dS, \quad \Omega = \sum_{k=1}^{\infty} (d\varphi_k a_k^+ - d\varphi_k^* a_k^-). \quad (30)$$

ПРИМЕР 11 (“многочастичный канонический оператор”). Пусть $\mathcal{X}$ – множество всех векторов (комплексного) пространства ℓ^2 с единичной нормой, $\mathcal{H}^\varepsilon$, $\varepsilon = 1/N$, – пространство симметричных функций $f_{i_1 \dots i_N}$ ($i_1, \dots, i_N = \overline{1, \infty}$) с суммируемым квадратом: $\sum_{i_1 \dots i_N} |f_{i_1 \dots i_N}^{(N)}|^2 < \infty$; $\pi: \mathbb{R} \times \mathcal{X} \times \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathcal{X}$ – тривиальное расслоение. Рассмотренному в [2] абстрактному каноническому оператору

$$(K^\varepsilon(S, \varphi, f))_{i_1 \dots i_N} = \sum_{p=0}^N \frac{1}{\sqrt{N^p p!}} \sum_{1 \leq k_1 \neq \dots \neq k_p \leq N} f_{k_1 \dots k_p}^p \prod_{k \neq k_1, \dots, k_p} \varphi_k \quad (31)$$

также отвечают формы (30).

Отметим, что многочастичный канонический оператор (31) обладает свойством инвариантности

$$\varphi \rightarrow \varphi e^{i\alpha}, \quad S \rightarrow S - \alpha, \quad f \rightarrow e^{i\alpha a^+ a^-} f,$$

что позволяет построить редуцированный канонический оператор, которому отвечает фазовое пространство, являющееся проективным пространством, состоящим из одномерных подпространств пространства ℓ^2 .

Автор благодарит академика РАН В.П. Маслова за полезное обсуждение ряда вопросов и ценные замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Маслов В. П. Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях. М.: Наука, 1977.
- [2] Maslov V. P., Shvedov O. Yu. The chaos conservation problem in quantum physics // Russian J. Math. Phys. 1996. V. 4. № 2. P. 173–216.
- [3] Маслов В. П., Шведов О. Ю. Асимптотика решения уравнения Шрёдингера для спиновых систем // Докл. РАН. 1998. Т. 361. № 4. С. 453–457.
- [4] Маслов В. П., Шведов О. Ю. Комплексный метод ВКБ в пространстве Фока // Докл. РАН. 1995. Т. 340. № 1. С. 42–47.
- [5] Маслов В. П., Шведов О. Ю. О проблеме расходимости в квантовой теории поля // Докл. РАН. 1997. Т. 357. № 5. С. 604–608.
- [6] Маслов В. П., Шведов О. Ю. О некоторых тождествах для асимптотик решений абстрактных уравнений // Докл. РАН. 1997. Т. 352. № 2. С. 167–171.
- [7] Карасёв М. В., Маслов В. П. Нелинейная скобка Пуассона. Геометрия и квантование. М.: Наука, 1991.
- [8] Желобенко Д. П., Штерн А. И. Представления групп Ли. М.: Наука, 1983.
- [9] Березин Ф. А. Метод вторичного квантования. М.: Наука, 1986.
- [10] Berezin F. A. Models of Gross–Neveu type are quantization of a classical mechanics with nonlinear phase space // Comm. Math. Phys. 1978. V. 63. P. 131–153.
- [11] Yaffe L. G. Large N limits as classical mechanics // Rev. Modern Phys. 1982. V. 54. № 2. P. 407–436.
- [12] Berezin F. A. General concept of quantization // Comm. Math. Phys. 1975. V. 40. № 2. P. 153–174.