Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. В. Любимцев, Д. С. Чистяков, Модули без кручения с
UA-кольцами эндоморфизмов, *Матем. заметки*, 2015,
том 98, выпуск 6, 898–906

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10683>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 16:43:04

Модули без кручения с UA-кольцами эндоморфизмов

О. В. Любимцев, Д. С. Чистяков

Ассоциативное кольцо R называется кольцом с однозначным сложением (UA-кольцом), если на его мультипликативной полугруппе $(R, \cdot)$ можно задать единственную бинарную операцию $+$, превращающую тройку $(R, \cdot, +)$ в кольцо. R -модуль A будем называть End-UA-модулем, если его кольцо эндоморфизмов $\text{End}_R(A)$ является UA-кольцом. В статье изучаются End-UA-модули без кручения над коммутативными дедекиндовыми областями. Найдены абелевы группы, имеющие UA-кольца эндоморфизмов, в некоторых классах абелевых групп без кручения конечного ранга.

Библиография: 12 названий.

DOI: 10.4213/mzm10683

1. Введение. Хорошо известна важная роль мультипликативных свойств элементов, идеалов и колец в структурной теории колец. Под мультипликативными свойствами понимаются свойства мультипликативной полугруппы кольца. Особый интерес представляет проблема классификации колец с точностью до изоморфизма их мультипликативных полугрупп. В данной работе рассматривается вопрос: когда все мультипликативные изоморфизмы колец эндоморфизмов модулей являются кольцевыми? Кольца с таким свойством называются *кольцами с однозначным сложением* (UA-кольцами) (см., например, [1], [2]). Примерами UA-колец являются полные матричные кольца и первичные кольца, содержащие нетривиальные идемпотенты.

Ассоциативное кольцо R называется UA-кольцом, если на его мультипликативной полугруппе $(R, \cdot)$ можно задать единственную бинарную операцию $+$, превращающую ее в кольцо $(R, \cdot, +)$. Легко проверить, что кольцо R является UA-кольцом тогда и только тогда, когда всякий m -изоморфизм колец $\alpha: R \rightarrow S$ (т.е. изоморфизм мультипликативных полугрупп $(R, \cdot)$ и $(S, \cdot)$) является изоморфизмом колец. R -модуль A назовем End-UA-модулем, если его кольцо эндоморфизмов $\text{End}_R(A)$ является UA-кольцом. Изучению абелевых групп с UA-кольцами эндоморфизмов посвящены работы [3]–[5]. В данной работе изучаются модули с UA-кольцами эндоморфизмов. Получено описание сепарабельных End-UA-модулей без кручения над коммутативными областями целостности, выделены классы абелевых групп без кручения конечного ранга с UA-кольцами эндоморфизмов.

Следующий результат будет часто использоваться в дальнейшем [3; лемма 1].

Работа выполнена при финансовой поддержке Совместной программы “Михаил Ломоносов, III” Министерства образования и науки Российской Федерации и DAAD.

ЛЕММА. Предположим, что кольцо R обладает такой системой идемпотентов $F_R = \{e_i, i \in I\}$, что

- 1) если $0 \neq r \in R$, то найдется идемпотент $e_i \in F_R$, для которого $re_i \neq 0$;
- 2) для всякого идемпотента $e_i \in F_R$ существует такой ортогональный ему идемпотент $e_j \in F_R$, что для $r \in R$ из $e_i re_i Re_j = 0 = e_j Re_i re_i$ следует $e_i re_i = 0$.

Тогда R является UA-кольцом.

В качестве первого следствия из предыдущей леммы отметим следующий факт. Пусть A — образующий в категории $R\text{-mod}$ и $0 \neq B \in R\text{-mod}$. Функтор $\text{Hom}_R(A, \cdot)$, действующий из категории R -модулей в категорию абелевых групп, является точным. Поэтому, если $\varphi: X \rightarrow Y$ — ненулевой модульный гомоморфизм, то существует такой гомоморфизм $\psi: A \rightarrow X$, что $\varphi \circ \psi \neq 0$. Следовательно, $\text{End}_R(B)$ -модуль $\text{Hom}_R(A, B)$ является точным. В случае, когда $\text{End}_R(A)$ -модуль $\text{Hom}_R(A, B)$ точен, кольцо $\text{End}_R(A \oplus B)$ является UA-кольцом. Например, если кольцо R является коммутативным самоинъективным кольцом или прюферовой областью, то каждый конечно порожденный точный модуль является образующим.

2. End-UA-модули без кручения. Все кольца предполагаются ассоциативными с 1, не имеющими $\mathbb{Z}$ -кручения, модули — левые унитарные. Пусть R — коммутативная область целостности, которая не является полем. Под *вполне разложимым R -модулем без кручения* мы понимаем прямую сумму R -модулей без кручения ранга 1. Напомним, что если A — модуль без кручения ранга 1, то A изоморфен некоторому подмодулю поля частных Q кольца R . R -Модуль без кручения A называется *сепарабельным*, если любое конечное множество его элементов вкладывается во вполне разложимое прямое слагаемое модуля A .

Пусть A и B — R -модули без кручения. Говорят, что A и B *квазиизоморфны*, $A \sim B$, если существуют такие подмодули $A^* \subseteq A$ и $B^* \subseteq B$, что $A^* \cong B$ и $B^* \cong A$ [6]. Квазиизоморфизм есть отношение эквивалентности на множестве модулей без кручения над R . Класс эквивалентности R -модуля без кручения ранга 1 относительно квазиизоморфизма называется *типом*. Если A — R -модуль без кручения ранга 1, то ассоциированный с ним тип будем обозначать $\tau(A)$. Для типов τ_1 и τ_2 положим $\tau_1 \leq \tau_2$ тогда и только тогда, когда существуют такие R -модули ранга 1 A_1 и A_2 , что $\tau(A_1) = \tau_1$, $\tau(A_2) = \tau_2$ и A_1 является подмодулем в A_2 .

Пусть A является сепарабельным R -модулем без кручения. Прямое слагаемое A_i ранга 1 назовем *полусвязанным*, если найдется такое прямое слагаемое A_j ранга 1, $j \neq i$, что типы $\tau(A_i)$ и $\tau(A_j)$ сравнимы. Скажем, что R -модуль A *полусвязан*, если всякое прямое слагаемое ранга 1 полусвязано.

Следующая теорема обобщает результат, полученный в [3] для абелевых групп.

ТЕОРЕМА 1. Пусть A — сепарабельный R -модуль без кручения, причем R не является UA-кольцом. Модуль A является End-UA-модулем в точности тогда, когда он полусвязан.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим вначале, что не существует бесконечного поля F , которое является UA-кольцом. В самом деле, m -автоморфизм $\alpha: (F, \cdot) \rightarrow (F, \cdot)$, определенный по правилу $\alpha(0) = 0$ и $\alpha(x) = x^{-1}$, если $x \neq 0$, не сохраняет сложения.

Докажем, что R -модуль A ранга 1 не является End-UA-модулем. Поскольку A изоморфен некоторому подмодулю в Q , кольцо $\text{End}_R(A)$ изоморфно некоторому

подкольцу в Q . По предположению R – не УА-кольцо, поэтому существует такой m -изоморфизм $\alpha: R \rightarrow R'$, что $\alpha(x+y) \neq \alpha(x) + \alpha(y)$ для некоторых $x, y \in R$. Очевидно, R' – коммутативная область целостности. Определим бинарную операцию $\boxplus$ на $\text{End}_R(A)$ по правилу

$$\frac{r_1}{s_1} \boxplus \frac{r_2}{s_2} = \frac{\alpha^{-1}(\alpha(r_1 s_2) + \alpha(r_2 s_1))}{s_1 s_2}.$$

Тогда $(\text{End}_R(A), \cdot, \boxplus)$ – кольцо, которое не совпадает с кольцом $(\text{End}_R(A), \cdot, +)$. Следовательно, $\text{End}_R(A)$ – не УА-кольцо.

Пусть модуль A не полусвязан. Найдется такое прямое слагаемое A_i ранга 1, что

$$\text{Hom}_R(A_i, B) = \text{Hom}_R(B, A_i) = 0,$$

где B – дополнительное прямое слагаемое. Откуда

$$\text{End}_R(A) \cong \text{End}_R(A_i) \times \text{End}_R(B).$$

Поскольку $\text{End}_R(A_i)$ не является УА-кольцом, модуль A не является End -УА-модулем.

Предположим, что модуль A полусвязан. Пусть $e_i: A \rightarrow A_i$ – проекция, где A_i – прямое слагаемое ранга 1 в A . Найдется такое прямое слагаемое $A_j \neq A_i$ в A , что типы $\tau(A_i)$ и $\tau(A_j)$ сравнимы.

Пусть $\tau(A_i) \geq \tau(A_j)$. Так как всякий $0 \neq \varphi \in \text{End}_R(A_i)$ инъективен, то для проекции $e_j: A \rightarrow A_j$ имеем

$$(0 : e_i \text{End}_R(A) e_j)_l \cap e_i \text{End}_R(A) e_i = 0,$$

где

$$e_i \text{End}_R(A) e_j = \text{Hom}_R(A_j, A_i), \quad e_i \text{End}_R(A) e_i = \text{End}_R(A_i)$$

и $(0 : e_i \text{End}_R(A) e_j)_l$ – левый аннулятор $e_i \text{End}_R(A) e_j$.

Если $\tau(A_i) \leq \tau(A_j)$, то $\text{Hom}_R(A_i, A_j) \neq 0$ и любой ненулевой элемент этой группы является мономорфизмом. Тогда

$$(0 : e_j \text{End}_R(A) e_i)_r \cap e_i \text{End}_R(A) e_i = 0,$$

где $(0 : e_j \text{End}_R(A) e_i)_r$ – правый аннулятор $e_j \text{End}_R(A) e_i$. В силу леммы кольцо $\text{End}_R(A)$ – УА-кольцо. Теорема доказана.

Приведем примеры коммутативных областей целостности, которые не являются УА-кольцами.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Коммутативная дедекиндова область целостности не является УА-кольцом.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $P \in \text{Спец}(R)$. Для $0 \neq r \in R$ определим P -высоту $h_P(r)$ следующим образом: $h_P(r) = n \in \mathbb{N}_0$, если $r \in P^n$ и $r \notin P^{n+1}$. Так как R – нётерово кольцо, то R не имеет ненулевых элементов бесконечной P -высоты. Следовательно, величина h_P определена корректно. Определим m -автоморфизм $\alpha: (R, \cdot) \rightarrow (R, \cdot)$ так, что

$$\alpha(0) = 0 \quad \text{и} \quad \alpha(x) = (-1)^{h_P(x)} x, \quad \text{если} \quad x \neq 0.$$

Выберем такие $x, y \in R$, что $h_P(x) = 2$ и $h_P(y) = 1$. Тогда

$$\alpha(x + y) = -x - y \neq x - y = \alpha(x) + \alpha(y).$$

Таким образом, R – не UA-кольцо.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть R – коммутативное кольцо, причем для всякого идеала I существует разложение $I = P_1 \dots P_k$, где $P_1, \dots, P_k \in \text{Spec}(R)$, и R/P не является полем для некоторого $P \in \text{Spec}(R)$. Тогда R не является UA-кольцом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Найдется такой идемпотент $e \in P$, что $P = Re$. Тогда

$$R = Re \times R(1 - e), \quad R(1 - e) \cong R/P,$$

где R/P – дедекиндова область [7; гл. VII, § 2, упражнение 10].

Напомним, что коммутативным кольцом нормирования называется такая область целостности R , что для любых идеалов I_1 и I_2 из R выполнено $I_1 \subseteq I_2$ или $I_2 \subseteq I_1$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Если R – нётерово кольцо нормирования, не являющееся полем, то R не является UA-кольцом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необратимые элементы в R образуют ненулевой главный идеал $A = (a)$. Заметим, что A – единственный максимальный идеал в R и $\bigcap_{i=1}^{\infty} A^i = 0$. Для любого ненулевого собственного идеала I из R имеем $I \subseteq A$. Найдется такое натуральное число k , что $I \subseteq A^k \setminus A^{k+1}$. Тогда каждый элемент $r \in R$ может быть однозначно записан в виде $r = a^k u$, где u – обратимый элемент в R . Определим t -автоморфизм $\alpha: R \rightarrow R$ по правилу $\alpha(a^k u) = (1 + a)^k a^k u$. Так как

$$\alpha(a) + \alpha(1 - a) = a^2 + 1 \neq 1 = \alpha(a + (1 - a)),$$

то α не сохраняет сложения.

В случае некоммутативных колец нормирования ситуация иная. Порядок S в простом артиновом кольце Q называется *кольцом нормирования Дубровина*, если S – кольцо Безу и $S/J(S)$ – простое артиново кольцо, где $J(S)$ – радикал Джекобсона кольца S [8]. В [8; теорема 4] доказано, что данное определение эквивалентно следующему: S есть такое полунаследственное справа первичное кольцо, что S имеет конечную размерность Голди и $S/J(S)$ – простое артиново кольцо. Напомним, что по теореме Веддерберна-Артина кольцо $S/J(S)$ изоморфно кольцу матриц $\text{Mat}_n(D)$ над телом D . Так как всякий левый порядок S в полусовершенном кольце Q , для которого $Q/J(Q)$ имеет нетривиальный матричный ранг, есть UA-кольцо [2], то получим следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть S – кольцо нормирования Дубровина. В обозначениях выше, если $n > 1$, то S – UA-кольцо.

Пусть A – модуль без кручения конечного ранга над коммутативной дедекиндовой областью R и Q – поле частных кольца R . Элементы кольца $Q\text{End}_R(A) = Q \otimes_R \text{End}_R(A)$ называются *квазиэндоморфизмами* модуля A . Будем отождествлять кольцо $\text{End}_R(A)$ с соответствующим подкольцом в $\text{End}_Q(QA)$, где $QA = Q \otimes_R A$. В этом случае $Q\text{End}_R(A) \subseteq \text{End}_Q(QA)$. Квазиэндоморфизм $\varphi \in Q\text{End}_R(A)$ есть

такое линейное преобразование $\varphi: QA \rightarrow QA$, что $r\varphi(A) \subseteq A$ для некоторого $0 \neq r \in R$. Кольцо $Q\text{End}_R(A)$ называется кольцом квазиэндоморфизмов R -модуля A . Далее отождествляем элемент $\alpha \in \text{End}_R(A)$ с элементом $1 \otimes \alpha \in Q\text{End}_R(A)$.

ТЕОРЕМА 2. *Кольцо $\text{End}_R(A)$ является UA-кольцом тогда и только тогда, когда $Q\text{End}_R(A)$ – UA-кольцо.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $Q\text{End}_R(A)$ – UA-кольцо. Предположим, что на полугруппе $(\text{End}_R(A), \cdot)$ можно задать такое сложение $\boxplus$, что тройка $(\text{End}_R(A), \cdot, \boxplus)$ образует кольцо, не равное кольцу $(\text{End}_R(A), \cdot, +)$.

Пусть

$$f_1 = \frac{m_1}{n_1} \otimes \alpha_1, \quad f_2 = \frac{m_2}{n_2} \otimes \alpha_2 \in Q\text{End}_R(A),$$

где $\alpha_1, \alpha_2 \in \text{End}_R(A)$. Определим новое сложение $\boxtimes$ на мультипликативной полугруппе $Q\text{End}_R(A)$ следующим образом:

$$f_1 \boxtimes f_2 = \frac{m_1}{n_1} \otimes \alpha_1 \boxtimes \frac{m_2}{n_2} \otimes \alpha_2 = \frac{1}{n_1 n_2} (m_1 n_2 \otimes \alpha_1 \boxplus n_1 m_2 \otimes \alpha_2).$$

Аксиомы кольца проверяются непосредственно. Следовательно, $(Q\text{End}_R(A), \cdot, \boxtimes)$ – такое кольцо, что

$$(Q\text{End}_R(A), \cdot, +) \neq (Q\text{End}_R(A), \cdot, \boxtimes).$$

Противоречие.

Предположим теперь, что $\text{End}_R(A)$ – UA-кольцо. Пусть $+$ и $\boxplus$ – два сложения на мультипликативной полугруппе $(Q\text{End}_R(A), \cdot)$, превращающие тройки $(Q\text{End}_R(A), \cdot, +)$ и $(Q\text{End}_R(A), \cdot, \boxplus)$ в различные кольца. Если $f_1, f_2 \in Q\text{End}_R(A)$, то запишем

$$f_1 + f_2 = \frac{m_1}{n_1} \otimes \alpha_1 + \frac{m_2}{n_2} \otimes \alpha_2 = \frac{m}{n} \otimes \alpha \quad (1)$$

для некоторых $\alpha_1, \alpha_2, \alpha \in \text{End}_R(A)$. Аналогично,

$$f_1 \boxplus f_2 = \frac{m_1}{n_1} \otimes \alpha_1 \boxplus \frac{m_2}{n_2} \otimes \alpha_2 = \frac{m'}{n'} \otimes \beta, \quad (2)$$

где $\beta \in \text{End}_R(A)$. Из равенств (1) и (2) следует

$$\begin{aligned} m_1 n_2 n \otimes \alpha_1 + m_2 n_1 n \otimes \alpha_2 &= m n_1 n_2 \otimes \alpha, \\ m_1 n_2 n' \otimes \alpha_1 \boxplus m_2 n_1 n' \otimes \alpha_2 &= m' n_1 n_2 \otimes \beta. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} 1 \otimes m_1 n_2 n \alpha_1 + 1 \otimes m_2 n_1 n \alpha_2 &= 1 \otimes m n_1 n_2 \alpha, \\ 1 \otimes m_1 n_2 n' \alpha_1 \boxplus 1 \otimes m_2 n_1 n' \alpha_2 &= 1 \otimes m' n_1 n_2 \beta. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$m_1 n_2 \alpha_1 + m_2 n_1 n \alpha_2 = m n_1 n_2 \alpha, \quad m_1 n_2 n' \alpha_1 \boxplus m_2 n_1 n' \alpha_2 = m' n_1 n_2 \beta.$$

Так как $\text{End}_R(A)$ – UA-кольцо, то $n' m n_1 n_2 \alpha = n m' n_1 n_2 \beta$. По условию R -модуль $(\text{End}_R(A), +)$ является модулем без кручения, поэтому $n' m \alpha = n m' \beta$. Откуда следует $1 \otimes n' m \alpha = 1 \otimes n m' \beta$ в кольце $Q\text{End}_R(A)$. Таким образом,

$$\frac{m}{n} \otimes \alpha = \frac{m'}{n'} \otimes \beta, \quad f_1 + f_2 = f_1 \boxplus f_2.$$

Поскольку операции $\boxplus$ и $+$ совпадают, $Q\text{End}_R(A)$ – UA-кольцо. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть A, B – квазиизоморфные R -модули без кручения конечного ранга. Если A – End-UA-модуль, то B – End-UA-модуль.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, $A \sim B$ влечет $Q\text{End}_R(A) \cong Q\text{End}_R(B)$. Осталось применить теорему 2.

3. End-UA-группы без кручения конечного ранга. В дальнейшем под словом “группа” понимаем “абелева группа”; через $\mathbb{Q}$ обозначаем поле рациональных чисел. Введем обозначения

$$E(A) = \text{End}_Z(A), \quad \mathbb{Q}E(A) = \mathbb{Q}\text{End}_Z(A).$$

Напомним, что группа без кручения конечного ранга A называется *почти вполне разложимой*, если в A существует вполне разложимая подгруппа B конечного индекса.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть A – почти вполне разложимая группа без кручения, B – вполне разложимая подгруппа в A конечного индекса. Тогда A является End-UA-группой в точности тогда, когда группа B полусвязана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\mathbb{Q}E(A) = \mathbb{Q}E(B)$, то утверждение следует из теорем 1 и 2.

Группа без кручения A называется *сильно неразложимой*, если каждая подгруппа конечного индекса группы A неразложима.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пусть A есть сильно неразложимая группа без кручения ранга p , где p – простое число. Тогда A не является End-UA-группой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Кольцо $\mathbb{Q}E = \mathbb{Q}E(A)$ является артиновым кольцом без нетривиальных идемпотентов. Кроме того, это кольцо – локальное с единственным максимальным идеалом (нильрадикалом) $N(\mathbb{Q}E)$. Пусть $k = \mathbb{Q}E/N(\mathbb{Q}E)$. Известно, что k – конечное расширение степени 1 или p над $\mathbb{Q}$. Если $N(\mathbb{Q}E) = 0$, то $\mathbb{Q}E$ – бесконечное поле, т.е. не UA-кольцо. В случае $N(\mathbb{Q}E) \neq 0$ имеем $k \cong \mathbb{Q}$ [9; теорема 4.4.12]. Рассмотрим аддитивное разложение

$$\mathbb{Q}E = S \oplus N(\mathbb{Q}E),$$

где

$$S = \{f \in \mathbb{Q}E \mid f = q \otimes 1 \text{ для некоторого } q \in \mathbb{Q}\}.$$

Предположим, что $N(\mathbb{Q}E)^k \neq N(\mathbb{Q}E)^{k+1} = 0$ для некоторого $k > 2$. Найдутся такие $c_1, \dots, c_k \in N(\mathbb{Q}E)$, что $d = c_1 \cdots c_k \neq 0$. Зафиксируем $c = c_1 \cdots c_{k-1}$ и построим биекцию $\alpha: \mathbb{Q}E \rightarrow \mathbb{Q}E$ следующим образом:

$$\alpha(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q}E \setminus N(\mathbb{Q}E), \\ (1+c)x, & x \in N(\mathbb{Q}E). \end{cases}$$

Так как центр кольца $\mathbb{Q}E$ содержит S в качестве подкольца, то отображение α является m -автоморфизмом. Однако

$$\alpha(1 + c_k) = 1 + c_k \neq 1 + d + c_k = \alpha(1) + \alpha(c_k).$$

Тогда α не является кольцевым автоморфизмом и $\mathbb{Q}E$ – не UA-кольцо.

Если $N(\mathbb{Q}E)^2 = 0$, то m -автоморфизм $\alpha: \mathbb{Q}E \rightarrow \mathbb{Q}E$, определяемый правилом $\alpha(x) = -x$, $x \in N(\mathbb{Q}E)$ и $\alpha(x) = x$, $x \notin N(\mathbb{Q}E)$, не сохраняет сложения. Таким образом, A не является End-UA-группой по теореме 2.

СЛЕДСТВИЕ 3. Если A – сильно неразложимая группа без кручения конечного ранга с коммутативным кольцом эндоморфизмов, то A – не End-UA-группа.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Пусть A – сильно неразложимая группа без кручения конечного ранга. Если $N(\mathbb{Q}E) = 0$, то A не является End-UA-группой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Кольцо квазиэндоморфизмов группы A является телом. Тогда результат следует из [1; теорема 5.2] и теоремы 2.

Пусть A – группа без кручения конечного ранга и $N(\mathbb{Q}E(A)) = 0$. Хорошо известно (см., например, [10]), что $A \sim A_1^{k_1} \oplus \dots \oplus A_n^{k_n}$, где все слагаемые A_i являются сильно неразложимыми группами, причем $\text{Hom}(A_i, A_j) = 0$ для всех $i \neq j$. Тогда

$$\mathbb{Q}E(A) \cong \mathbb{Q}E(A_1) \times \dots \times \mathbb{Q}E(A_n).$$

В обозначениях, введенных выше, справедливо следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Пусть A – группа без кручения конечного ранга, причем выполнено $N(\mathbb{Q}E(A)) = 0$. Тогда A является End-UA-группой в том и только том случае, если $k_i \geq 2$ для всех $1 \leq i \leq n$.

Найдем в качестве приложения вышесказанного End-UA-группы в классе групп без кручения ранга 3. Если A есть сильно неразложимая группа без кручения ранга $r(A) = 3$, то A не является End-UA-группой по предложению 5. Если A квазиравна прямой сумме B групп ранга 1, то A – End-UA-группа в точности тогда, когда группа B полусвязана (предложение 4).

ТЕОРЕМА 3. Пусть $A \doteq A_1 \oplus A_2$, $r(A_1) = 1$, $r(A_2) = 2$ и A_2 – сильно неразложимая группа. Тогда A является End-UA-группой в том и только том случае, если выполнено одно из следующих условий:

- 1) $r(\mathbb{Q}\text{Hom}(A_i, A_j)) = 2$ для некоторых $i \neq j$;
- 2) $r(\mathbb{Q}\text{Hom}(A_i, A_j)) = 1$, $\mathbb{Q}\text{Hom}(A_j, A_i) = 0$ для $i \neq j$ и $\mathbb{Q}E(A_2) \cong \mathbb{Q}$;
- 3) $r(\mathbb{Q}\text{Hom}(A_i, A_j)) = 1$ для $i \neq j$ и $\mathbb{Q}E(A_2) \cong \mathbb{Q}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используем аддитивное разложение кольца $\mathbb{Q}E(A)$:

$$\mathbb{Q}E(A)^+ = \mathbb{Q}E(A_1)^+ \oplus \mathbb{Q}\text{Hom}(A_1, A_2) \oplus \mathbb{Q}\text{Hom}(A_2, A_1) \oplus \mathbb{Q}E(A_2)^+.$$

Предположим, что отображение $\alpha: \mathbb{Q}E(A) \rightarrow R$ является m -изоморфизмом.

1) Пусть $r(\mathbb{Q}\text{Hom}(A_1, A_2)) = 2$. Так как элементы из $\mathbb{Q}E(A_1)$ и $\mathbb{Q}\text{Hom}(A_1, A_2)$ являются мономорфизмами, то

$$(0 : \mathbb{Q}\text{Hom}(A_1, A_2)_r \cap \mathbb{Q}E(A_1) = 0,$$

и α аддитивен на $\mathbb{Q}E(A_1)$ [2]. Далее, для любого $x \in A_2$ найдется такой $\psi \in \mathbb{Q}\text{Hom}(A_1, A_2)$, что $x \in \text{Im}(\psi)$ [11]. Следовательно,

$$(0 : \mathbb{Q}\text{Hom}(A_1, A_2)_l \cap \mathbb{Q}E(A_2) = 0$$

и α аддитивен на $\mathbb{Q}E(A_2)$. Итак, если $r(\mathbb{Q}\text{Hom}(A_1, A_2)) = 2$, то $\mathbb{Q}E(A)$ – UA-кольцо. В работе [12] показано, что если $r(\mathbb{Q}\text{Hom}(A_2, A_1)) = 2$, то кольцо $\mathbb{Q}E(A)$ антиизоморфно кольцу квазиэндоморфизмов в рассмотренном выше случае, т.е. снова UA-кольцо.

2) Пусть теперь $r(\mathbb{Q}\text{Hom}(A_1, A_2)) = 1$, $\mathbb{Q}\text{Hom}(A_2, A_1) = 0$. Так же, как в первом случае, проверяется, что α аддитивен на $\mathbb{Q}E(A_1)$. Кроме того, так как $\mathbb{Q}E(A_2) \cong \mathbb{Q}$, то ненулевые элементы этого кольца являются автоморфизмами. Но тогда

$$(0 : \mathbb{Q}\text{Hom}(A_1, A_2)_l \cap \mathbb{Q}E(A_2) = 0,$$

и α аддитивен на $\mathbb{Q}E(A_2)$. Таким образом, $\mathbb{Q}E(A)$ является UA-кольцом. Если

$$r(\mathbb{Q}\text{Hom}(A_2, A_1)) = 1, \quad \mathbb{Q}\text{Hom}(A_1, A_2) = 0,$$

то получим антиизоморфное кольцо к $\mathbb{Q}E(A)$ [12], которое снова будет UA-кольцом.

3) Доказывается так же, как случай 2).

Обратно, в [12] доказано, что если

$$r(\mathbb{Q}\text{Hom}(A_i, A_j)) = 1, \quad \mathbb{Q}\text{Hom}(A_j, A_i) = 0$$

для $i \neq j$ или $r(\mathbb{Q}\text{Hom}(A_i, A_j)) = 1$ для $i \neq j$, и в обоих случаях $\mathbb{Q}E(A) \not\cong \mathbb{Q}$, то

$$\mathbb{Q}E(A) \cong \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ z & y & v \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix} \mid x, y, z, v \in \mathbb{Q} \right\}$$

или

$$\mathbb{Q}E(A) \cong \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 & w \\ z & y & v \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix} \mid x, y, z, v, w \in \mathbb{Q} \right\}.$$

Множество

$$J = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{Q} \right\}$$

в этих кольцах является двусторонним идеалом. Пусть α – отображение, переводящее каждый элемент из J в противоположный и оставляющее остальные элементы кольца $\mathbb{Q}E(A)$ на месте. Непосредственно проверяется, что α – m -автоморфизм кольца $\mathbb{Q}E(A)$. Кроме того, если $a \in J$, $b \notin J$, то

$$\alpha(a + b) = a + b \neq -a + b = \alpha(a) + \alpha(b).$$

Следовательно, $\mathbb{Q}E(A)$ – не UA-кольцо.

Наконец, если $\mathbb{Q}\text{Hom}(A_i, A_j) = 0$ при $i \neq j$, то $\mathbb{Q}E(A) \cong \mathbb{Q}E(A_1) \times \mathbb{Q}E(A_2)$ – не UA-кольцо, поскольку ни $\mathbb{Q}E(A_1)$, ни $\mathbb{Q}E(A_2)$ не являются UA-кольцами.

Заметим в заключение, что все случаи, рассмотренные в теореме, могут быть описаны в терминах типов

$$\tau_1 = \tau(A_1), \quad \tau_2 = \text{IT}(A_2), \quad \tau_3 = \text{OT}(A_2),$$

где τ_2 и τ_3 – внутренний и внешний типы группы A_2 соответственно [12].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. В. Михалев, “Мультипликативная классификация ассоциативных колец”, *Матем. сб.*, **135**:2 (1988), 210–224.
- [2] W. Stephenson, “Unique addition rings”, *Canad. J. Math.*, **21** (1969), 1455–1461.
- [3] О. В. Любимцев, “Сепарабельные абелевы группы без кручения с UA -кольцами эндоморфизмов”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **4**:4 (1998), 1419–1422.
- [4] О. В. Любимцев, “Периодические абелевы группы с UA -кольцами эндоморфизмов”, *Матем. заметки*, **70**:5 (2001), 736–741.
- [5] О. В. Любимцев, Д. С. Чистяков, “Об абелевых группах без кручения с UA -кольцом эндоморфизмов”, *Вестн. Томск. гос. ун-та*, 2011, № 2 (14), 55–58.
- [6] L. Fuchs, L. Salce, *Modules Over Non-Noetherian Domains*, Math. Surveys Monogr., **84**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001.
- [7] Н. Бурбаки, *Коммутативная алгебра*, Элементы математики, М., Мир, 1971.
- [8] Н. И. Дубровин, “Некоммутативные кольца нормирования”, Тр. ММО, **45**, Изд-во Моск. ун-а, М., 1982, 265–280.
- [9] T. G. Faticoni, *Direct Sum Decompositions of Torsion-Free Finite Rank Groups*, Pure Appl. Math. (Boca Raton), **285**, Chapman & Hall, Boca Raton, FL, 2007.
- [10] J. D. Reid, “On the ring of quasi-endomorphisms of a torsion-free group”, *Topics in Abelian Groups*, Scott, Foresman and Co., Chicago, IL, 1963, 51–68.
- [11] R. B. Warfield Jr., “Homomorphisms and duality for torsion-free groups”, *Math. Z.*, **107**:3 (1968), 189–200.
- [12] А. В. Чередникова, “Кольца квазиэндоморфизмов квазиразложимых абелевых групп без кручения ранга 3”, *Абелевы группы и модули*, **13-14** (1996), 224–236.

О. В. Любимцев

Нижегородский государственный
архитектурно-строительный университет
E-mail: oleg_lyubimcev@mail.ru

Поступило

16.03.2015

Д. С. Чистяков

Нижегородский государственный университет
им. Н. И. Лобачевского
E-mail: chistyakovds@yandex.ru