Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. С. Исмагилов, Формула спектрального следа для локальных полей, *Матем. заметки*, 2015, том 98, выпуск 6, 872–877

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10688>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 15:28:22

Формула спектрального следа для локальных полей

Р. С. Исмагилов

В работе рассматривается пространство квадратично-интегрируемых функций на локальном поле и оператор, действующий как сумма оператора умножения на функцию и свертки с обобщенной функцией. Основной результат – это формула следа для указанных операторов.

Библиография: 7 названий.

DOI: 10.4213/mzm10688

Формула следа для оператора Штурма–Лиувилля была получена в работе Гельфанда и Левитана [1]; в дальнейшем она получила существенное развитие. Итоги этих исследований (и последние достижения в этой области) содержатся в обстоятельном обзоре [2]. В предлагаемой заметке выводится аналог формулы следа для оператора, связанного с локальным полем. Как сама формула, так и ее вывод оказываются достаточно простыми.

1. Общие сведения о пространствах и операторах, связанных с локальными полями. В этом пункте собраны, во-первых, нужные для дальнейшего простые факты; более подробное изложение можно почерпнуть из работ, посвященных анализу на локальных полях (ограничимся лишь указанием на книгу [3] и статью [4]). Кроме того, вводятся операторы $L_{u,v}$ (это основной предмет этой статьи) и указываются их простые свойства.

Пусть K – локальное поле; это может быть либо поле формальных рядов, либо классическое поле p -адических чисел. Поле K снабжается нормированием $x \mapsto |x|$, принимающим значения p^k , $k \in \mathbb{Z}$, где p – простое число. Введем шары $B_m = \{x : |x| \leq p^m\}$. Шар B_0 есть кольцо целых элементов. На K определена мера dx , нормированная таким образом, что мера каждого шара B_m есть p^m . Обычным образом вводится гильбертово пространство $L_2(K)$. Через S обозначим пространство функций, которые имеют компактный носитель и локально-постоянны.

Введем преобразование Фурье. Для этого фиксируем аддитивный характер $x \mapsto \chi(x)$, $x \in K$, который равен единице в шаре B_0 и не удовлетворяет этому условию в шаре B_1 . Преобразование Фурье F определяется равенством

$$\tilde{f}(x) = \int_K \chi(xy) f(y) dy.$$

Оно отображает пространство S на себя и порождает унитарный оператор в $L_2(K)$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 14-01-00349).

Введем важное для дальнейшего семейство функций из пространства $L_2(K)$. Для любого целого числа m пространство K есть дизъюнктное объединение шаров $x + B_m$. Множество их центров обозначим через C_m . (Это есть система представителей смежных классов аддитивной группы K_+ по подгруппе B_m .) Рассмотрим функции τ_m , заданные равенствами $\tau_m(x) = 1$ при $x \in B_m$, $\tau_m(x) = 0$ при $x \notin B_m$. Наконец, введем функции $\sigma_m^{a,b}$, $m \in \mathbb{Z}$, $a \in C_m$, $b \in C_{-m}$, определенные на K равенством

$$\sigma_m^{a,b}(x) = p^{-m/2} \tau_m(x-a) \chi(bx).$$

Следующая лемма описывает их свойства.

ЛЕММА 1. 1) Для фиксированного m функции $\sigma_m^{a,b}$, $a \in C_m$, $b \in C_{-m}$, образуют ортонормированный базис в $L_2(K)$.

2) Преобразование Фурье F действует на эти функции по формулам

$$\sigma_m^{a,b} \mapsto \chi(ab) \sigma_{-m}^{-b,a}.$$

Утверждение 1) вытекает из следующих двух фактов. Во-первых, $L_2(K)$ есть ортогональная сумма подпространств $L_2(a + B_m)$, $a \in C_m$, а эти подпространства получаются из $L_2(B_m)$ сдвигом на a . Во-вторых, функции $\sigma_m^{0,b}$, $b \in C_{-m}$, образуют ортонормированный базис в $L_2(B_m)$. Утверждение 2) доказывается легким вычислением (многочисленные формулы такого рода можно найти в [3], [4]).

Переходим к операторам. Во-первых, для любой локально-постоянной функции $x \mapsto u(x)$ имеем оператор M_u в пространстве S , действующий как умножение на эту функцию. Для любых локально-постоянных функций u, v определен оператор $L_{u,v} = M_u + F^{-1} M_v F$ в пространстве S . Для вещественных функций u, v этот оператор симметричен, а его замыкание (его также обозначим через $L_{u,v}$) является самосопряженным оператором в пространстве $L_2(K)$; это показано в работе автора [5]. Если $u(x) \rightarrow +\infty$, $v(x) \rightarrow +\infty$ при $|x| \rightarrow +\infty$, то спектр оператора $L_{u,v}$ дискретен и ограничен снизу; это доказывается традиционными средствами (лемма Реллиха), на чем мы не останавливаемся.

Выделим важный для дальнейшего случай, когда спектр оператора $L_{u,v}$ может быть явно описан. Пусть для некоторого целого m функция u постоянна в каждом шаре радиуса p^m , а функция v постоянна в каждом шаре радиуса p^{-m} .

ЛЕММА 2. 1) При указанном условии операторы M_u и $F^{-1} M_v F$ перестановочны.

2) Справедливы равенства

$$L_{u,v} \sigma_m^{a,b} = (u(a) + v(b)) \sigma_m^{a,b}.$$

Таким образом, функции $\sigma_m^{a,b}$, $a \in C_m$, $b \in C_{-m}$ (при фиксированном m), образуют ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов оператора $L_{u,v}$.

Первое утверждение доказывается очевидным подсчетом; второе следует из первого (но легко доказывается также непосредственно).

2. “Абстрактная” формула следа. В этом пункте мы несколько модифицируем результаты Халберга и Кремера [6]. Предварительно введем один (весьма простой) метод суммирования рядов. Возьмем последовательность a_k , $k = 1, 2, \dots$, такую, что

$$0 < a_1 \leq a_2 \leq \dots \quad \text{и} \quad \sum_k a_k^{-\alpha} < \infty \quad \text{для некоторого числа} \quad \alpha < 1.$$

Мы скажем, что ряд $\sum_{k \geq 1} x_k$ с ограниченными членами *суммируется методом* $[[a_k]]$ к числу s , если

$$\lim_{t \rightarrow +0} \sum_{k=1}^{\infty} (1 + a_k t)^{-2} x_k = s. \quad (1)$$

В этом случае будем писать

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k = s \quad [[a_k]].$$

Отметим следующие два свойства этого метода суммирования.

1) Покажем, что этот метод регулярен, т.е. если числовой ряд сходится к числу s , то он суммируется методом $[[a_k]]$ к числу s . Действительно, положим $d_k(t) = (1 + a_k t)^{-2}$ и запишем сумму $\sum_{k=1}^{\infty} x_k d_k(t)$ в виде $\sum_{k=1}^{n-1} + \sum_{k=n}^{\infty}$. Первая сумма стремится к $\sum_{k=1}^{n-1} x_k$ при $t \rightarrow +0$. Чтобы оценить вторую сумму, положим $\sigma_n = \sum_{k=n}^{\infty} x_k$ и применим к ней преобразование Абеля; получаем, что ее модуль не превосходит величины $2|\sup_{k \geq n} \sigma_k|d_n(t)|$, стремящейся к нулю при $n \rightarrow +\infty$ (равномерно по $t > 0$). Отсюда следует, что выполнено соотношение (1). Это и утверждалось.

2) Возьмем две последовательности a_k, b_k (с указанными выше свойствами) такие, что $|a_k - b_k| \leq M, k = 1, 2, \dots$, для некоторого M . Покажем, что методы суммирования $[[a_k]], [[b_k]]$ эквивалентны, т.е. из соотношения $\sum_{k=1}^{\infty} x_k = s[[a_k]]$ следует соотношение $\sum_{k=1}^{\infty} x_k = s[[b_k]]$ (и обратно). (Напомним, что мы применяем наши методы суммирования только к ограниченным последовательностям x_k .) Действительно, учитывая соотношения $|a_k - b_k| \leq M, a_k \simeq b_k$ (при $k \rightarrow \infty$), получаем

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} (1 + a_k t)^{-2} - \sum_{k=1}^{\infty} (1 + b_k t)^{-2} \right| = O\left(t \sum_{k=1}^{\infty} (1 + a_k t)^{-3}\right).$$

Оценим снизу величину $1 + a_k t$, применяя неравенство $1 + s \geq s^{\alpha/3}$. (Напомним, что $\alpha < 1$.) В итоге получаем, что рассматриваемая величина оценивается сверху величиной $O(t^{1-\alpha})$, а потому стремится к нулю при $t \rightarrow +0$. Отсюда вытекает эквивалентность двух методов суммирования.

Перейдем к следам. Пусть H – гильбертово пространство, A – самосопряженный оператор, $e_k, k = 1, 2, \dots$, – ортонормированный базис, состоящий из его собственных векторов и $Ae_k = \lambda_k e_k$. Пусть собственные значения λ_k удовлетворяют условиям

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-\alpha} < \infty \quad (2)$$

для некоторого числа $\alpha < 1$. Возьмем ограниченный самосопряженный оператор B , рассмотрим оператор $A + B$ и последовательность его собственных значений $\tilde{\lambda}_1 \leq \tilde{\lambda}_2 \leq \dots$.

ЛЕММА 3. *Справедливо соотношение*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\tilde{\lambda}_k - \lambda_k - (Be_k, e_k)) = 0 \quad [[\lambda_k]]. \quad (3)$$

Напомним, что соотношение (3) равносильно равенству

$$\lim_{t \rightarrow +0} \sum_{k=1}^{\infty} (\tilde{\lambda}_k - \lambda_k - (Be_k, e_k))(1 + \lambda_k t)^{-2} = 0.$$

Соотношение, указанное в лемме 3, есть одна из разновидностей “регуляризованной формулы” следа. Таких разновидностей было немало; мы остановились на этой ввиду ее простоты и удобства для применения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3. Положим

$$R(-\lambda) = (A + \lambda I)^{-1}, \quad \tilde{R}(-\lambda) = (A + B + \lambda I)^{-1}.$$

При $\lambda > 0$ верно равенство

$$R(-\lambda) - \tilde{R}(-\lambda) - R(-\lambda)BR(-\lambda) = -R(-\lambda)(BR(-\lambda))^2(I + BR(-\lambda))^{-1}. \quad (4)$$

Возьмем следы операторов из левой и правой частей этого равенства. Слева получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\tilde{\lambda}_k - \lambda_k}{(\lambda + \tilde{\lambda}_k)(\lambda + \lambda_k)} - \frac{(Be_k, e_k)}{(\lambda + \lambda_k)^2} \right).$$

Заменим первое слагаемое в скобках на $(\tilde{\lambda}_k - \lambda_k)(\lambda + \lambda_k)^{-2}$. Так как $|\lambda_k - \tilde{\lambda}_k| = O(1)$, то при такой замене изменение суммы оценивается как $O(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda + \lambda_k)^{-3})$. Применяя неравенство $\lambda_k + \lambda \geq \lambda_k^s \lambda^{1-s}$ (при $s = \alpha/3$) и учитывая условие (2), получаем, что след левой части равенства (4) представляется в виде

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{\lambda}_k - \lambda_k - (Be_k, e_k)}{(\lambda + \lambda_k)^2} + O(\lambda^{\alpha-3}).$$

Оценим модуль следа правой части равенства (4), применяя известные неравенства для следов произведений операторов [7; с. 121]. Получаем оценку сверху величиной $O(\lambda^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda + \lambda_k)^{-2})$. Используя неравенство $\lambda_k + \lambda \geq \lambda_k^s \lambda^{1-s}$ (при $s = \alpha/2$), получаем, что след правой части равенства (4) оценивается как $O(\lambda^{\alpha-3})$. Итак,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{\lambda}_k - \lambda_k - (Be_k, e_k)}{(\lambda + \lambda_k)^2} = O(\lambda^{\alpha-3}).$$

Умножив обе части равенства на λ^2 и записав $\lambda^2/(\lambda + \lambda_k)^2$ в виде $1/(1 + \lambda_k t)^2$, $t = 1/\lambda$, приходим к равенству (3). Лемма доказана.

Если оба ряда $\sum_{k=1}^{\infty} (\tilde{\lambda}_k - \lambda_k)$ и $\sum_{k=1}^{\infty} (Be_k, e_k)$ сходятся, то, используя доказанную выше регулярность метода суммирования $[[\lambda_k]]$, приходим к равенству

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\tilde{\lambda}_k - \lambda_k) = \sum_{k=1}^{\infty} (Be_k, e_k),$$

доказанному в [6].

3. Основной результат – формулы следа для операторов $L_{u,v}$. Обратимся к оператору $L_{u,v}$, введенному в п. 1. Предположим, что для некоторого целого m колебание функции u в каждом из шаров $a + B_m$, $a \in C_m$, не превосходит величины,

не зависящей от выбора шара. Предположим, что функция v обладает аналогичным свойством по отношению к шарам $b + B_{-m}$, $b \in C_{-m}$ (напомним, что множества C_m , C_{-m} были введены в п. 1). Усредним функцию u по шарам $a + B_m$, а функцию v — по шарам $b + B_{-m}$, т.е. определим функции u^0 , v^0 по формулам

$$\begin{aligned} u^0(x) &= p^{-m} \int_{a+B_m} u(y) dy, & x \in a + B_m, \\ v^0(x) &= p^m \int_{b+B_{-m}} v(y) dy, & x \in b + B_{-m}. \end{aligned}$$

Рассмотрим всевозможные величины

$$u^0(a) + v^0(b), \quad a \in S_m, \quad b \in S_{-m},$$

и последовательность $\mu_1^{(m)} \leq \mu_2^{(m)} \leq \dots$, полученную как их перестановка в неубывающем порядке. Пусть λ_k — собственные значения оператора $L_{u,v}$, расположенные в неубывающем порядке.

ТЕОРЕМА 1 (Формула следа для одного оператора $L_{u,v}$). *Предположим, что*

$$\sum_{a \in C_m} (u^0(a))^{-\alpha/2} < \infty, \quad \sum_{b \in C_{-m}} (v^0(b))^{-\alpha/2} < \infty \quad (5)$$

для некоторого $\alpha \in (0, 1)$. Тогда справедливо соотношение

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k - \mu_k^{(m)}) = 0 \quad [[\mu_k^{(m)}]].$$

Для следующей теоремы рассмотрим два оператора L_{u_1, v_1} , L_{u_2, v_2} , обладающие описанными свойствами; предположим, что вне некоторого шара функции u_1 , v_1 совпадают с функциями u_2 и v_2 (соответственно). Пусть $\lambda_1^{(1)} \leq \lambda_2^{(1)} \leq \dots$ и $\lambda_1^{(2)} \leq \lambda_2^{(2)} \leq \dots$ — спектры этих операторов. Следуя образцу, по которому выше построили последовательность $\mu_k^{(m)}$, построим для операторов L_{u_1, v_1} , L_{u_2, v_2} последовательности $\mu_k^{(m,1)}$, $\mu_k^{(m,2)}$; их разность есть ограниченная последовательность. Выберем последовательность $\nu_k^{(m)}$, отличающуюся от них ограниченным слагаемым.

ТЕОРЕМА 2 (Формула следа для пары операторов). *Справедливо соотношение*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^{(1)} - \lambda_k^{(2)}) = \int_K (u_1(x) - u_2(x) + v_1(x) - v_2(x)) dx \quad [[\nu_k^{(m)}]].$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Введем функции $u^1 = u - u^0$, $v^1 = v - v^0$ и соответствующий оператор L_{u^1, v^1} . Таким образом, $L_{u,v} = L_{u^0, v^0} + L_{u^1, v^1}$. Заметим, что интегралы функций u^1 , v^1 по шарам $a + B_m$ и $b + B_{-m}$ (соответственно) равны нулю. Применим лемму 3, полагая $A = L_{u^0, v^0}$, $B = L_{u^1, v^1}$. Покажем, что все предпосылки леммы 3 выполнены. Напомним, во-первых, что спектр оператора L_{u^0, v^0} — это набор чисел $u^0(a) + v^0(b)$, $a \in C_m$, $b \in C_{-m}$. Далее, подсчитаем величины, которые в лемме 3 были обозначены через (Be_k, e_k) . В нашем случае это будут величины $(L_{u^1, v^1} \sigma_m^{a,b}, \sigma_m^{a,b})$. Покажем, что они равны нулю. Действительно,

применяя определение оператора L_{u^1, v^1} и лемму 1, можем записать эти величины в виде $(u^1 \sigma_m^{a,b}, \sigma_m^{a,b}) + (v^1 \sigma_{-m}^{-b,a}, \sigma_{-m}^{-b,a})$. Но так как

$$\begin{aligned} |\sigma_m^{a,b}(x)| &= p^{-m/2} & \text{при } x \in a + B_m, \\ |\sigma_{-m}^{-b,a}(x)| &= p^{m/2} & \text{при } x \in b + B_{-m}, \end{aligned}$$

то слагаемые в этих суммах сводятся к интегралам функций u^1, v^1 по шарам $a + B_m$ и $b + B_{-m}$ соответственно, а потому равны нулю, что и утверждалось.

Проверим, что выполнено также условие (2), необходимое для леммы 3. Действительно, сумма, указанная в условии (2), в рассматриваемом случае имеет вид

$$\sum_k (\mu_k^{(m)})^{-\alpha} = \sum_{a,b} (u^0(a) + v^0(b))^{-\alpha}.$$

Используя неравенство $(u^0(a) + v^0(b))^{-\alpha} \leq 2^{-\alpha} (u^0(a)v^0(b))^{-\alpha/2}$, получаем, что эта сумма не превосходит произведения величин $\sum_a (u^0(a))^{-\alpha/2}$ и $\sum_b (v^0(b))^{-\alpha/2}$, а эта величина конечна в силу неравенств (5). Итак, условие (2) выполнено, и теперь можно применить лемму 3. В итоге приходим к утверждению теоремы 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Для доказательства теоремы записываем соотношение, полученное в теореме 1, для каждого из операторов $L_{u_1, v_1}, L_{u_2, v_2}$, затем вычитаем одно равенство из другого. Учтем, что последовательности $\mu_1^{(m,1)}, \mu_k^{(m,2)}$ совпадают, начиная с некоторого номера, ибо функции u_1, v_1 совпадают с u_2, v_2 соответственно вне некоторого шара. Ясно, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\mu_k^{(m,1)} - \mu_k^{(m,2)}) = \int_K (u_1(x) - u_2(x) + v_1(x) - v_2(x)) dx; \quad (6)$$

отсюда вытекает утверждение теоремы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] И. М. Гельфанд, Б. М. Левитан, “Об одном простом тождестве для собственных значений дифференциального оператора второго порядка”, *Докл. АН СССР*, **88**:4 (1953), 593–596.
- [2] В. А. Садовничий, В. Е. Подольский, “Следы операторов”, *УМН*, **61**:5 (2006), 89–156.
- [3] В. С. Владимиров, И. В. Волович, Е. И. Зеленов, *p-адический анализ и математическая физика*, Наука, М., 1994.
- [4] В. С. Владимиров, И. В. Волович, Е. И. Зеленов, “Спектральная теория в p -адической квантовой механике и теория представлений”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **54**:2 (1990), 275–302.
- [5] Р. С. Исмагилов, “О спектре самосопряженного оператора в $L_2(K)$, где K – локальное поле; аналог формулы Фейнмана–Каца”, *ТМФ*, **89**:1 (1991), 18–24.
- [6] C. J. A. Halberg Jr., V. A. Kramer, “A generalization of the trace concept”, *Duke Math. J.*, **27**:4 (1960), 607–617.
- [7] И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, *Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве*, Наука, М., 1965.

Р. С. Исмагилов

Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

E-mail: ismagil@bmstu.ru

Поступило

21.01.2015