Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Кельзон, Об определении скачка функции обобщенной ограниченной вариации через производные от частных сумм ее ряда Фурье, *Матем. заметки*, 2016, том 99, выпуск 1, 35–41

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10689>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 18:05:20

Об определении скачка функции обобщенной ограниченной вариации через производные от частных сумм ее ряда Фурье

А. А. Кельзон

Установлено, что формулы для определения скачка периодической функции через производные от частных сумм ее ряда Фурье, справедливые для функций гармонической ограниченной вариации (класс HBV), могут потерять силу на классе функций Ф-ограниченной вариации (в смысле М. Шрамма), если этот класс шире класса HBV.

Библиография: 12 названий.

DOI: 10.4213/mzm10689

1. Постановка задачи. Пусть g – 2π -периодическая функция, $S_n(g; x)$, $\tilde{S}_n(g; x)$, $n \in \mathbb{N}$, – частные суммы порядка n тригонометрического ряда Фурье и ряда, сопряженного к ряду Фурье, этой функции, т.е.

$$S_n(g; x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k(g) \cos kx + b_k(g) \sin kx),$$

$$\tilde{S}_n(g; x) = \sum_{k=1}^n (a_k(g) \sin kx - b_k(g) \cos kx),$$

где $a_k(g)$, $b_k(g)$ – тригонометрические коэффициенты Фурье функции g .

Голубов [1] доказал, что если g имеет на периоде ограниченную p -вариацию ($p \geq 1$) в смысле Винера [2], то во всякой точке x' справедливы равенства

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n^{(2r+1)}(g; x')}{n^{2r+1}} = \frac{(-1)^r}{(2r+1)\pi} ((g(x'+) - g(x'-))), \quad r = 0, 1, 2, \dots, \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tilde{S}_n^{(2r)}(g; x')}{n^{2r}} = \frac{(-1)^{r+1}}{2r\pi} ((g(x'+) - g(x'-))), \quad r = 1, 2, \dots \quad (2)$$

Отметим, что частный случай формулы (1) при $r = 0$ для более узких классов функций был известен ранее. Именно, Фейер [3] доказал справедливость этого равенства для функций, удовлетворяющих условиям Дирихле, а Сциллаг [4] обобщил результат Фейера на случай функций ограниченной вариации (см. также [5; гл. III, § 9]).

В работах Авдиспахича [6] и Квернадзе [7] справедливость формул (1) и (2) установлена для более широкого класса функций, имеющих на периоде гармоническую ограниченную вариацию. Этот класс был введен Ватерманом [8].

Возникает вопрос, нельзя ли и далее расширять класс функций так, чтобы формулы (1) и (2) сохраняли силу. Попытке дать ответ на этот вопрос и посвящена настоящая заметка.

2. Основные определения и обозначения. Пусть функция f задана на отрезке $[a, b]$. Через $\{I_n\}$, $n = 1, 2, \dots$, обозначим последовательность непересекающихся интервалов $I_n = (\alpha_n, \beta_n) \subset [a, b]$.

Пусть далее $\Phi = \{\varphi_n\}$, $n = 1, 2, \dots$, – последовательность строго возрастающих выпуклых вниз функций, заданных на множестве неотрицательных чисел и таких, что $\varphi_n(0) = 0$,

$$\varphi_{n+1}(x) \leq \varphi_n(x) \quad (3)$$

для всех n и x и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x) = \infty \quad (4)$$

для всех $x > 0$.

Положим

$$V_{\Phi}(f; a, b) = \sup \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(|f(I_n)|), \quad (5)$$

где

$$f(I_n) = f(\beta_n) - f(\alpha_n),$$

а верхняя грань в (5) берется по всевозможным последовательностям интервалов $\{I_n\}$, удовлетворяющим описанным условиям. Если $V_{\Phi}(f; a, b) < \infty$, то говорят, что функция f имеет Φ -ограниченную вариацию на $[a, b]$. Это понятие было введено Шраммом [9].

Если $\varphi_n(x) = \varphi(x)$ при всех натуральных n , то мы получим функцию φ -ограниченной вариации в смысле Юнга [10]. В частности, когда $\varphi_n(x) = x^p$, $n = 1, 2, \dots$, получится функция ограниченной p -вариации в смысле Винера [2].

Если же $\varphi_n(x) = x/\lambda_n$, где $\Lambda = \{\lambda_n\}$ – неубывающая последовательность положительных чисел таких, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} = \infty,$$

вместо $V_{\Phi}(f; a, b)$ пишут $V_{\Lambda}(f; a, b)$, и, если $V_{\Lambda}(f; a, b) < \infty$, то говорят, что функция f имеет Λ -ограниченную вариацию на $[a, b]$. В частности, если $\lambda_n = n$, т.е. $\varphi_n(x) = x/n$, вместо $V_{\Phi}(f; a, b)$ пишут $V_H(f; a, b)$, и, если $V_H(f; a, b) < \infty$, то говорят, что функция f имеет гармоническую ограниченную вариацию на $[a, b]$. Эти понятия были введены Ватерманом [8].

В настоящей работе через ФВВ будем обозначать семейство 2π -периодических функций f , заданных на вещественной оси и таких, что cf является функцией Φ -ограниченной вариации на отрезке $[-\pi, \pi]$ при некотором $c > 0$. Через АВВ будем

обозначать семейство 2π -периодических функций, имеющих Λ -ограниченную вариацию на $[-\pi, \pi]$. Через HBV будем обозначать семейство 2π -периодических функций, имеющих гармоническую ограниченную вариацию на $[-\pi, \pi]$. Пусть

$$\Phi BV_0 = \{f \in \Phi BV \mid f(\pi) = 0\}.$$

Шрамм [9] установил, что ΦBV является банаховым пространством, в котором норма определяется следующим образом.

Для $f \in \Phi BV_0$

$$\|f\| = \inf \left\{ k > 0 \mid V_\Phi \left(\frac{f}{k}; -\pi, \pi \right) \leq 1 \right\},$$

а для произвольной $f \in \Phi BV$

$$\|f\| = |f(\pi)| + \|f - f(\pi)\|.$$

Через C ΦBV обозначим множество непрерывных функций, входящих в ΦBV . В [9] показано, что C ΦBV также является банаховым пространством с той же нормой.

3. Формулировки результатов. Сформулируем основные результаты работы.

ТЕОРЕМА 1. Пусть последовательность функций Φ такова, что $\Phi BV \supset HBV$ ($\Phi BV \neq HBV$) и r – целое неотрицательное число. Тогда найдется функция $g_0 \in C\Phi BV$ такая, что

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|S_n^{(2r+1)}(g_0; 0)|}{n^{2r+1}} > 0. \quad (6)$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть последовательность функций Φ такова, что $\Phi BV \supset HBV$ ($\Phi BV \neq HBV$) и r – натуральное число. Тогда найдется функция $\tilde{g}_0 \in C\Phi BV$ такая, что

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|\tilde{S}_n^{(2r)}(\tilde{g}_0; 0)|}{n^{2r}} > 0.$$

Эти теоремы показывают, что формулы (1) и (2) не могут быть перенесены на класс ΦBV , если он шире класса HBV.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Теорема 1 уточняет результат Квернадзе [7], который установил, что, если класс ΛBV шире класса HBV, то найдется функция $g \in \Lambda BV$, для которой не выполнено равенство (1).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В силу принципа сгущения особенностей [11; гл. VII, § 1] функции g_0 в теореме 1 и $\tilde{g}_0$ в теореме 2 могут быть выбраны для всех r одни и те же¹.

4. Вспомогательное утверждение и доказательства. Ограничимся доказательством теоремы 1, так как доказательство теоремы 2 проводится аналогично. Нам потребуется следующая

¹Внимание автора на этот факт обратил О. Л. Виноградов.

ЛЕММА. Пусть

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1,n-1} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2,n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{n-1,1} & d_{n-1,2} & \dots & d_{n-1,n-1} \end{pmatrix}$$

– квадратная матрица, элементами которой являются положительные числа, и при этом

$$\begin{aligned} d_{i,j} &\geq d_{i,j+1}, & i = 1, \dots, n-1, & j = 1, \dots, n-2, \\ d_{i,j} &\geq d_{i+1,j}, & i = 1, \dots, n-2, & j = 1, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Пусть далее

$$A_{n-1} = \sup_{\{m_i\}} \sum_{i=1}^{n-1} d_{i,m_i}, \quad (7)$$

где $\{m_i\}$ – совокупность всех перестановок множества $\{1, 2, \dots, n-1\}$. Тогда $A_{n-1} \leq 2 \operatorname{Tr}(\mathbf{D})$, где

$$\operatorname{Tr}(\mathbf{D}) = \sum_{i=1}^{n-1} d_{i,i}$$

– след матрицы $\mathbf{D}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ. Заметим, что $d_{i,m_i} \leq d_{i,i}$, если $m_i > i$ и $d_{i,m_i} \leq d_{m_i,m_i}$, если $m_i < i$. С помощью этих неравенств каждое из слагаемых, входящих в сумму (7), оценим сверху соответствующим диагональным элементом. Поскольку в эту сумму входит по одному слагаемому из каждой строки и по одному из каждого столбца матрицы $\mathbf{D}$, получим утверждение леммы.

Переходим к доказательству теоремы 1.

Итак, пусть $\Phi\text{BV} \supset \text{HBV}$ ($\Phi\text{BV} \neq \text{HBV}$). Тогда, как показано в [9], найдется числовая последовательность $\{c_n\}$ такая, что $c_n \downarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(c_n) < \infty, \quad (8)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n} = \infty. \quad (9)$$

Зафиксируем целое неотрицательное число r и на пространстве СФВВ рассмотрим последовательность линейных функционалов $\{L_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, где

$$L_n(g) = \frac{S_n^{(2r+1)}(g; 0)}{n^{2r+1}},$$

и докажем, что последовательность норм этих функционалов не ограничена.

Положим $\theta_{in} = (2i-1)\pi/2n$, $i = 1, \dots, n$; $n \in \mathbb{N}$ и определим 2π -периодические функции g_n следующим образом:

$$g_n(\tau) = \begin{cases} \frac{c_i}{2} \cos n\tau & \text{для } \tau \in [\theta_{in}, \theta_{i+1,n}], \quad i = 1, \dots, n-1, \\ 0 & \text{для всех прочих } \tau \in [-\pi, \pi]. \end{cases}$$

Очевидно, что функции g_n непрерывны. Убедимся, что нормы всех функций g_n в пространстве СФВВ ограничены одной постоянной.

Поскольку точка $\tau = \pi/n$ является точкой глобального минимума функции g_n , то

$$V_{\Phi}(g_n; -\pi, \pi) \leq V_{\Phi}\left(g_n; -\pi, \frac{\pi}{n}\right) + V_{\Phi}\left(g_n; \frac{\pi}{n}, \pi\right).$$

Но

$$V_{\Phi}\left(g_n; -\pi, \frac{\pi}{n}\right) = V_{\Phi}\left(g_n; \frac{\pi}{2n}, \frac{\pi}{n}\right) = \varphi_1\left(\frac{c_1}{2}\right).$$

Обозначим далее

$$h_i := \frac{c_i + c_{i+1}}{2}, \quad i = 1, \dots, n-2, \quad h_{n-1} := \frac{c_{n-1}}{2}.$$

Ясно, что последовательность $\{h_i\}$ монотонно убывает.

Имеем

$$V_{\Phi}\left(g_n; \frac{\pi}{n}, \pi\right) = \sup_{\{m_i\}} \sum_{i=1}^{n-1} \varphi_i(h_{m_i}),$$

где, по-прежнему, $\{m_i\}$ – совокупность перестановок множества $\{1, 2, \dots, n-1\}$. Обозначим $d_{i,j} = \varphi_i(h_j)$, $i, j = 1, \dots, n-1$. Из свойств функций φ_i следует, что $d_{i,j}$ удовлетворяют условиям леммы, и, используя утверждение леммы, получим

$$V_{\Phi}\left(g_n; \frac{\pi}{n}, \pi\right) \leq 2 \sum_{i=1}^{n-1} d_{i,i} = 2 \sum_{i=1}^{n-1} \varphi_i(h_i) \leq 2 \sum_{i=1}^{n-1} \varphi_i(c_i)$$

(воспользовались тем, что последовательность $\{c_i\}$ убывающая, а функции φ_i возрастающие). Из последних соотношений получим

$$V_{\Phi}(g_n; -\pi, \pi) \leq \varphi_1\left(\frac{c_1}{2}\right) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \varphi_i(c_i) \leq \varphi_1\left(\frac{c_1}{2}\right) + 2 \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(c_i). \quad (10)$$

Из этого неравенства следует, что при всех $n \in \mathbb{N}$

$$\|g_n\| \leq \max\left\{1, \varphi_1\left(\frac{c_1}{2}\right) + 2 \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(c_i)\right\}. \quad (11)$$

Действительно, если

$$1 \geq \varphi_1\left(\frac{c_1}{2}\right) + 2 \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(c_i),$$

то последнее утверждение очевидно; если же

$$k_0 := \varphi_1\left(\frac{c_1}{2}\right) + 2 \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(c_i) > 1,$$

то, аналогично (10), получаем

$$V_{\Phi}\left(\frac{g_n}{k_0}; -\pi, \pi\right) \leq \varphi_1\left(\frac{c_1}{2k_0}\right) + 2 \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i\left(\frac{c_i}{k_0}\right).$$

Но, поскольку $k_0 > 1$, из свойств функций φ_i следует, что

$$\varphi_i\left(\frac{c_i}{k_0}\right) \leq \frac{1}{k_0} \varphi_i(c_i), \quad i \in \mathbb{N},$$

и, значит,

$$V_\Phi\left(\frac{g_n}{k_0}; -\pi, \pi\right) \leq \frac{1}{k_0} \left(\varphi_1\left(\frac{c_1}{2}\right) + 2 \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(c_i) \right) = 1,$$

т.е. (11) доказано. Таким образом, нормы всех функций g_n , $n \in \mathbb{N}$ в пространстве СФВВ ограничены одной постоянной.

В [7] установлено (см. формулу (56) в этой работе²), что

$$|L_n(g_n)| > \sum_{i=1}^{n-1} \frac{c_i}{2} \int_{\theta_{in}}^{\theta_{i+1,n}} \frac{\cos^2 n\tau}{\tau} d\tau - Kc_1 > K_1 \sum_{i=1}^{n-1} \frac{c_i}{i} - K_2$$

(здесь K , K_1 , K_2 – постоянные, зависящие только от r).

Отсюда и из (11) следует, что

$$\|L_n\| \geq \frac{|L_n(g_n)|}{\|g_n\|} \rightarrow \infty \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Теперь существование функции g_0 , для которой выполнено (6), следует из теоремы Банаха–Штейнгауза (см., например, [11; с. 283]).

В заключение отметим, что теорема 1 настоящей работы была анонсирована без доказательства в [12].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Б. И. Голубов, “Определение скачка функции ограниченной p -вариации по ее ряду Фурье”, *Матем. заметки*, **12**:1 (1972), 19–28.
- [2] N. Wiener, “The quadratic variation of a function and its Fourier coefficients”, *J. Math. Phys.*, **3**:2 (1924), 72–94.
- [3] L. Fejér, “Über die Bestimmung des Sprunges der Funktion aus Fourier-reihe”, *J. Reine Angew. Math.*, **142**:1 (1912), 165–188.
- [4] P. Czillag, “Über die Fourierkonstanten einer Funktion von Beschränkter Schwankung”, *Mat. Phys. Lapok*, **27** (1918), 301–308.
- [5] А. Зигмунд, *Тригонометрические ряды*, Т. 1, Мир, М., 1965.
- [6] M. Avdispahić, “On the determination of the jump of a function by its Fourier series”, *Acta Math. Hungar.*, **48**:3 (1986), 267–271.
- [7] G. Kvernadze, “Determination of the jumps of a bounded function by its Fourier series”, *J. Approx. Theory*, **92**:2 (1998), 167–190.
- [8] D. Waterman, “On convergence of Fourier series of functions of generalized bounded variation”, *Studia Math.*, **44**:2 (1972), 107–117.
- [9] M. Schramm, “Functions of Φ -bounded variation and Riemann–Stieltjes integration”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **287**:1 (1985), 49–63.
- [10] L. C. Young, “Sur une généralisation de la notion de variation de puissance p -ième bornée au sens de M. Wiener, et sur la convergence des séries de Fourier”, *C. R. Acad. Sci., Paris*, **204**:7 (1937), 470–472.

²В формуле (56) работы [7] допущена опечатка: в средней части между знаками суммы и интеграла пропущен множитель c_k .

- [11] Л. В. Канторович, Г. П. Акилов, *Функциональный анализ*, Невский диалект, СПб., 2004.
- [12] А. А. Кельзон, “Об определении скачка функции Ф-ограниченной вариации через производные от частных сумм ряда Фурье”, *Современные проблемы теории функций и их приложения*, Материалы 17-й международной Саратовской зимней школы, ООО Изд-во “Научная книга”, Саратов, 2014, 116–118.

А. А. Кельзон

Государственный университет морского и речного
флота имени адмирала С. О. Макарова,
г. Санкт-Петербург
E-mail: kelzon@mail.ru

Поступило

16.02.2015

Исправленный вариант

20.06.2015