Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. В. Щепин, Хаусдорфова размерность и динамика диффеоморфизмов, *Матем. заметки*, 1999, том 65, выпуск 3, 457–463

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1069>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 10:04:15

УДК 519

ХАУСДОРФОВА РАЗМЕРНОСТЬ И ДИНАМИКА ДИФФЕОМОРФИЗМОВ

Е. В. Щепин

В настоящей статье дано элементарное, не опирающееся на теорему Янга о когомологической размерности пространства орбит p -адического действия, доказательство гипотезы Гильберта–Смита для свободного липшицева действия. Получившийся результат оказался справедливым для класса пространств конечного хаусдорфова объема – класса существенно более широкого чем римановы многообразия. В качестве следствия из липшицевой гипотезы Гильберта–Смита получена теорема о том, что группа диффеоморфизмов конечномерного многообразия не имеет малых подгрупп.

Библиография: 12 названий.

1. Гипотеза Гильберта–Смита и динамика диффеоморфизмов. Гипотеза Гильберта–Смита утверждает, что *всякая компактная группа, эффективно действующая на топологическом многообразии, является группой Ли*. Под многообразием в этой работе мы понимаем *многообразие с краем*. Гладкий вариант гипотезы Гильберта–Смита был доказан Бохнером и Монтгомери [1] еще в 1946 году. Альтернативные доказательства для гладкого случая содержатся в работах [2]–[4]. В частности, в работе Хана [2] содержится не только самое короткое доказательство гладкого случая, но там же имеется доказательство и для довольно широкого класса липшицевых действий. В полной общности гипотеза Гильберта–Смита для липшицевых действий доказана в [5]. Наконец, в [6] гипотеза Гильберта–Смита доказана для гёльдеровых действий с показателем гёльдеровости близким к единице.

Одним из ключевых понятий в решении пятой проблемы Гильберта [7] является понятие *группы без малых подгрупп*. Согласно теореме Петера–Вейля [7] всякая компактная группа, не являющаяся группой Ли, содержит бесконечную нульмерную компактную подгруппу. А компактная нульмерная группа имеет подгруппы, содержащиеся в любой окрестности единицы, т.е. является группой с малыми подгруппами. Таким образом, компактные группы Ли могут быть охарактеризованы как группы без малых подгрупп. Эта характеристика оказывается справедливой и для локально компактных групп Ли [7]. Группу автодиффеоморфизмов гладкого многообразия M^n обозначаем через $\text{Diff } M^n$ и рассматриваем ее с C^1 -топологией, под которой подразумеваем топологию равномерной вместе с производными сходимости на компактах.

Одним из основных результатов этой заметки является следующая теорема.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-01-01166а.

ТЕОРЕМА 1. *Для любого конечномерного гладкого многообразия M^n группа его диффеоморфизмов $\text{Diff } M^n$ является группой без малых подгрупп.*

Тот факт, что группа диффеоморфизмов не содержит малых компактных подгрупп вытекает уже из теоремы Бохнера–Монтгомери [1] о том, что всякая локально-компактная группа, эффективно действующая на многообразии посредством диффеоморфизмов, является группой Ли. Но группа диффеоморфизмов не локально компактна, поэтому упомянутая выше теорема не следует из теоремы Бохнера–Монтгомери, а следует, как показано ниже, из липшицева варианта гипотезы Гильберта–Смита. Поскольку всякая группа содержит подгруппу порожденную одним элементом, вопрос об отсутствии малых подгрупп в группе диффеоморфизмов сводится к вопросу о динамике одного диффеоморфизма. И сформулированная выше теорема 1 о группе диффеоморфизмов является следствием более точной *теоремы о динамике диффеоморфизма*, сформулированной ниже.

Как хорошо известно, гипотеза Гильберта–Смита равносильна следующей: *группа целых p -адических чисел A_p не может эффективно действовать на топологическом многообразии.*

Доказательство эквивалентности классической и p -адической форм гипотезы Гильберта–Смита приведено в статье Эдвардса [8]. Изложим его вкратце.

В силу упомянутой выше теоремы Петера–Вейля достаточно доказать невозможность действия бесконечных компактных нульмерных групп на многообразиях. Но всякая компактная нульмерная группа либо содержит группу целых p -адических чисел A_p либо содержит малые конечные подгруппы. Второй вариант исключается в силу теоремы Ньюмена о периодических гомеоморфизмах.

Формулировке теоремы Ньюмена предпослем несколько определений. Для любого автогомеоморфизма метрического пространства его *орбитальным диаметром* называем верхнюю грань диаметров его орбит, т.е. $\sup \text{dist}(x, h^n(x))$, где x пробегает все точки пространства, а n – все натуральные числа. Назовем *периодическим орбитальным диаметром* метрического пространства нижнюю грань орбитальных диаметров его периодических гомеоморфизмов.

ТЕОРЕМА НЬЮМЕНА. *Периодический орбитальный диаметр топологического многообразия положителен.*

Теорема Ньюмена позволяет сформулировать гипотезу Гильберта–Смита в форме вопроса о динамике гомеоморфизма. Эта переформулировка была сделана Эдвардсом [8]: *орбитальный диаметр динамически непрерывного гомеоморфизма топологического многообразия не уступает его периодическому орбитальному диаметру.*

Здесь *динамически непрерывным* называется гомеоморфизм, совокупность итераций которого равностепенно непрерывна. Докажем равносильность двух предложенных формулировок гипотезы Гильберта–Смита.

Всякий динамически непрерывный гомеоморфизм h с конечным орбитальным диаметром порождает компактную подгруппу в группе всех гомеоморфизмов (замыкание множества его итераций) G_h в силу теоремы Арцела. Тогда G_h в силу оригинальной формулировки гипотезы Гильберта–Смита является группой Ли. А всякая группа Ли содержит элемент конечного порядка g . Но тогда орбитальный диаметр g не превосходит орбитального диаметра G_h , который совпадает с орбитальным диаметром h , ведь

любая орбита G_h является замыканием некоторой орбиты h . Таким образом, форма Эдвардса вытекает из классической.

Обратно, если компактная группа G , действующая на многообразии, не является группой Ли, то, как было отмечено выше, мы можем предполагать ее группой A_p . Переходя, если нужно, к подгруппе, мы можем добиться того, чтобы орбитальный диаметр действия был меньше периодического орбитального диаметра многообразия. Но тогда гомеоморфизм, представленный любым из элементов группы, динамически непрерывен и имеет орбитальный диаметр меньший ньюменовского вопреки форме Эдвардса.

Диффеоморфизм $h \in \text{Auth } M$ называется *динамически ограниченным по производной*, если ограничена последовательность норм производных итераций как его самого, так и обратного к нему.

Теорема 1 является непосредственным следствием более точной теоремы 2. (Эта теорема по существу является ослабленной версией теоремы 1 из [9]. Усиленный ее вариант, при котором от диффеоморфизма требуется лишь поточечной динамической ограниченности производных, также верен, но его доказательство в этой заметке не приводится.)

ТЕОРЕМА 2 (о динамике диффеоморфизма). *Орбитальный диаметр динамически ограниченного по производной диффеоморфизма не уступает орбитальному периодическому диаметру многообразия.*

Риманова метрика на связном многообразии порождает обычную метрику, если расстояние между точками определить как длину минимальной геодезической их соединяющей. Так определенную метрику называют *геодезической*. Рассматриваемые римановы многообразия считаются наделенными именно этой метрикой.

Автогомеоморфизм метрического пространства называется *динамически липшицевым*, если все итерации его и обратного к нему гомеоморфизмов липшицевы с одной и той же константой L .

Очевидно, что всякий динамически ограниченный по производной диффеоморфизм риманова многообразия является динамически липшицевым относительно соответствующей геодезической метрики.

Поэтому теорема 2 является следствием теоремы 3.

ТЕОРЕМА 3 (о динамике липшеоморфизма). *Орбитальный диаметр динамически липшицева гомеоморфизма не уступает орбитальному периодическому диаметру риманова многообразия.*

ЛЕММА (о компактном замыкании). *Всякий динамически липшицев гомеоморфизм метрического пространства M содержится в абелевой компактной липшицевой подгруппе группы $\text{Auth } M$*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Совокупность итераций динамически липшицева гомеоморфизма h образует абелеву подгруппу $\{h^n\}_{-\infty < n < +\infty}$ в $\text{Auth}(M)$, имеющую компактное замыкание. Действительно, это замыкание состоит из липшицевых гомеоморфизмов с константой Липшица $\lambda(h) = \sup\{\lambda(h^n) \mid n \in \mathbb{Z}\}$, и компактность его вытекает из теоремы Арцела.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Пусть h – динамически липшицев гомеоморфизм многообразия M . Обозначим через G порожденную им компактную группу в $\text{Auth } M$. Тогда G эффективно действует на M липшицевыми гомеоморфизмами и является согласно [5] группой Ли. Но во всякой орбите G всюду плотна орбита липшеоморфизма h ;

поэтому орбитальный диаметр действия G совпадает с орбитальным диаметром h . Но всякая бесконечная группа Ли содержит окружность [7], а вместе с ней элемент конечного порядка. Орбитальный диаметр этого элемента, не уступая периодическому орбитальному диаметру многообразия, в то же время не превосходит орбитального диаметра G , откуда и вытекает нужное нам неравенство.

2. Изометрии пространств конечного объема. Теорема о динамике диффеоморфизма выводится из гипотезы Гильберта–Смита для эффективных липшицевых действий. Предложенное автором в работе [5] доказательство гипотезы Гильберта–Смита для липшицевых действий опирается на теорему Янга [10] о том, что *гомологическая размерность пространства орбит p -адического действия на n -мерном многообразии равна $n + 2$* . Таким образом, доказательство элементарной по формулировке теоремы о динамике диффеоморфизма оказывается весьма неэлементарным.

В этом пункте дано элементарное доказательство гипотезы Гильберта–Смита, для липшицевых действий с бесконечными орбитами (в частности, для свободных действий) на любых пространствах *локально конечного объема* – класса пространств существенно более широкого, чем римановы многообразия.

Константой Липшица отображения $f: X \rightarrow Y$ метрических пространств называется точная верхняя грань отношений $\text{dist } f(x_1, x_2) / \text{dist}(x_1, x_2)$, где $x_1, x_2 \in X$, и обозначается через $\lambda(f)$. Липшицев гомеоморфизм, обратный к которому также липшицев, называется *липнеоморфизмом* или *квазиизометрией*.

Группу автогомеоморфизмов метрического пространства M с топологией равномерной сходимости, порожденной C^0 -нормой, обозначаем через $\text{Auth}(M)$. Подгруппу в $\text{Auth } M$ называем *липшицевой*, если все ее элементы являются липшицевыми гомеоморфизмами. Поскольку группа вместе со всяким элементом содержит обратный, все элементы липшицевой подгруппы являются липнеоморфизмами.

ЛЕММА (об общей константе) [5]. Пусть G – компактная липшицева подгруппа в $\text{Auth}(M)$. Тогда $\sup\{\lambda(g) \mid g \in G\} < \infty$.

Две метрики ρ и ρ' на одном пространстве M называются *квазиизометричными*, если тождественное отображение из M, ρ в M, ρ' является квазиизометрией. Следующая лемма показывает, что пространство с липшицевым действием компактной группы квазиизометрично пространству с изометричным действием.

ЛЕММА (об инвариантной метрике). Пусть M, ρ – метрическое пространство, на котором липшицево действует компактная группа G . Тогда существует метрика ρ' на M , инвариантная по отношению к действию G и квазиизометричная ρ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Искомая метрика определяется следующей формулой

$$\rho'(x, y) = \int_G \rho(g(x), g(y)) \, dg$$

Здесь интегрирование производится по мере Хаара на G . Подробности можно найти в [5].

Основным инструментом в данной статье являются понятия хаусдорфовой меры и размерности метрического пространства. Через $\mu_t(X)$ обозначается t -мерная мера Хаусдорфа множества X . Определения этих понятий можно найти в книге [11].

Хаусдорфовым объемом подмножества метрического пространства M топологической размерности k мы называем его k -мерную хаусдорфову меру.

Основным результатом этого пункта является

ТЕОРЕМА 4 (о конечной орбите). *Если нульмерная компактная группа липшицево действует на пространстве, содержащем непустое открытое множество конечного хаусдорфова объема, то это действие имеет конечную орбиту.*

Основной результат теории хаусдорфовой размерности теперь может быть сформулирован так.

ПРИНЦИП ПОЛОЖИТЕЛЬНОСТИ ОБЪЕМА. *Хаусдорфов объем любого непустого метрического пространства положителен (возможно бесконечен).*

Следующий факт просто следует из этого принципа и определений.

СЛЕДСТВИЕ. *Хаусдорфова размерность пространства, имеющего конечный хаусдорфов объем, совпадает с топологической.*

Нам потребуется в дальнейшем следующие две леммы, первая из которых непосредственно вытекает из определения хаусдорфовой меры.

ЛЕММА (об увеличении меры). *Липшицево с константой λ отображение $f: X \rightarrow Y$ увеличивает t -мерную хаусдорфову меру μ_α не более чем в λ^t раз (т.е. $\mu_t(f(X)) \leq \lambda^t \mu_t(X)$).*

ЛЕММА (об уменьшении меры). *Пусть открытое нерастягивающее отображение $f: X \rightarrow Y$ в каждой точке имеет кратность $\geq n$. Тогда $n\mu Y \leq \mu X$ для любой хаусдорфовой меры.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим произвольную точку $y \in Y$. Фиксируем n ее различных прообразов $x_1, \dots, x_n$. Выберем у них непересекающиеся окрестности $O(x_i)$. Тогда в силу открытости f окрестностью точки y будет $O(y) = \bigcap_{i \leq n} f(O(x_i))$. Положим $O_i = O(x_i) \cap f^{-1}O(y)$. Тогда $f(O_i) = O(y)$ при любом i , и множества O_i дизъюнкты. Следовательно, для любого подмножества $S \subset Oy$ будет $n\mu S \leq \mu(f^{-1}S)$, ибо прообраз S содержит объединение дизъюнктных множеств $f^{-1}(S) \cap O_i$, каждое из которых в силу предыдущей леммы имеет меру большую либо равную мере μS . Далее из покрытия пространства Y окрестностями типа $O(y)$ выберем счетное подпокрытие $\{O(y_k)\}$ и рассмотрим дизъюнктное покрытие $O_k = O(y_k) \setminus \bigcup_{i < k} O(y_i)$. Тогда $n\mu Y = n \sum \mu O_k \leq \sum \mu(f^{-1}(O_k)) \leq \mu X$, что и требовалось доказать.

Основным техническим результатом этой секции является следующая теорема (она уточняет теорему 2 из [8]).

ТЕОРЕМА 5. *Пусть компактная группа G действует на метрическом пространстве конечного объема X посредством липшицевых гомеоморфизмов и X_∞ является объединением бесконечных орбит этого действия. Тогда $\dim X_\infty/G < \dim X$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заменяем метрику на X на инвариантную и квазиизометричную исходной в силу леммы об инвариантной метрике. Тогда липшицевость действия сохранится так же, как конечность объема X . А на пространстве орбит инвариантная метрика индуцирует метрику, по отношению к которой орбитная проекция является нерастягивающим отображением.

Предположим, что напротив размерность $\dim X_\infty/G = n$ совпадает с размерностью $\dim X$. Тогда в силу принципа положительности объема $\mu_n X_\infty/G > 0$. А так как объем X_∞ не превосходит объема X , то он также конечен и найдется натуральное число N такое, что выполнено неравенство $\mu_n(X_\infty) \leq N\mu_n X_\infty/G$. Но кратность ограничения орбитальной проекции на X_∞ больше чем N , поэтому в силу леммы об уменьшении меры имеем неравенство противоречащее предыдущему: $\mu_n(X_\infty) \geq N\mu_n X_\infty/G$.

Сразу отметим, что из доказанного утверждения вытекает такое следствие.

ТЕОРЕМА 6. *Компактная группа, свободно и липшицево действующая на метрическом пространстве конечного хаусдорфова объема, является группой Ли.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку всякая компактная группа, не являющаяся группой Ли, содержит бесконечную компактную нульмерную группу, предположив противное, мы получим, что существует метрическое пространство M^n конечного объема и топологической размерности n и бесконечная нульмерная компактная группа G такие, что G свободно и липшицево действует на этом пространстве. В этом случае все орбиты действия бесконечны и согласно теореме 5 размерность пространства орбит $\dim M^n/G$ должна быть меньше, чем n .

Но здесь мы вступаем в противоречие с классической формулой Гуревича для понижающих размерность отображений [12]. Из этой формулы вытекает, что отображение, прообразы точек при котором нульмерны (а именно, таким является орбитная проекция из M^n на M^n/G), не может понижать размерность.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Пусть $\pi: X \rightarrow X/G$ орбитная проекция, группа G нульмерна и компактна, а $U \subset X$ имеет конечный хаусдорфов объем. Фиксируем точку $p \in U$ все окрестности которой имеют размерность равную размерности $\dim U$. Тогда найдется такое G' , являющееся открыто-замкнутой подгруппой G , что $G'(p) \subset U$. Рассмотрим $U' = \{x \in U \mid G'(x) \subset U\}$. Тогда U' открыто, имеет ту же размерность, что U , и не больший хаусдорфов объем. Поэтому на основании теоремы 5 заключаем, что либо конечна $G'(x)$ для некоторого $x \in U'$, а тогда конечна и $G(x)$, ибо конечна факторгруппа G/G' и тогда наша теорема доказана, либо все орбиты действия G' на U' бесконечны, и поэтому $\dim U'/G' < \dim U'$, что опять-таки противоречит тому, что нульмерные отображения не могут повышать размерность.

Поскольку в инвариантной метрике всякое действие липшицево и, более того, изометрично, гипотеза Гильберта–Смита для компактного случая может быть сформулирована следующим образом: *группа изометрий компактного многообразия является группой Ли.*

В этой формулировке ничего не говорится о метрике на многообразии, что означает ее произвольность. Эту произвольность можно несколько уменьшить, сведя вопрос только к метрикам индуцированным из гильбертова пространства. А именно, если компактная группа G действует на многообразии M , то на M введем метрику ρ , индуцированную вложением в евклидово пространство. Тогда инвариантная метрика

$$\rho'(x, y) = \sqrt{\int_G \rho^2(g(x), g(y)) dg}$$

будет иметь гильбертово происхождение.

Соображение, что хаусдорфова размерность пространства орбит при изометричном действии не может быть меньше, чем хаусдорфова размерность исходного пространства, в сочетании с теоремой Янга [10] о том, что размерность пространства орбит на 2 больше размерности исходного многообразия в случае p -адического действия позволяют сформулировать следующий результат.

ТЕОРЕМА 7. *Если хаусдорфова размерность компактного многообразия меньше чем на 2 превосходит его топологическую размерность, то группа изометрий этого многообразия является группой Ли.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Bochner S., Montgomery D. Locally compact groups of differentiable transformations // Ann. of Math. (2). 1946. V. 47. P. 639–653.
- [2] Hahn F. H. On the action of locally compact group of E_n // Pacific J. Math. 1961. V. 11. P. 221–223.
- [3] Repovš D., Skopenkov A. B., Ščepin E. V. C^1 -homogeneous compacta in $\mathbb{R}^n$ are C^1 -submanifolds of $\mathbb{R}^n$ // Proc. Amer. Math. Soc. 1996. V. 124. № 4. P. 1219–1226.
- [4] Repovš D., Skopenkov A. B., Ščepin E. V. Group actions on manifolds and smooth ambient homogeneity // J. Math. Sci. Dynam. Systems. 1997. V. 83. № 4. P. 546–549.
- [5] Repovš D., Ščepin E. V. A proof of the Hilbert–Smith conjecture for actions by Lipschitz maps // Math. Ann. 1997. V. 308. P. 361–364.
- [6] Малевич И. Гипотеза Гильберта–Смита для гёльдеровых действий // УМН. 1997. Т. 52. № 2. С. 173–174.
- [7] Montgomery D., Zippin L. Topological Transformation Groups. Intersci. Tracts Pure Appl. Math. V. 1. Interscience Publ.: New York, 1955.
- [8] Edwards R. D. Some remarks on the Hilbert–Smith conjecture // Proc. of the 4th Annual Western Workshop in Geometric Topology. Oregon: Oregon State Univ., 1987.
- [9] Shchepin E. V. Hausdorff dimension and dynamics of diffeomorphisms // Topology and Applications. Intern. Topology Conference dedicated to P. S. Alexandroff's 100th Birthday (Moscow, May 27–31, 1996). Moscow: Phasis, 1996. P. 209–210.
- [10] Yang C. T. p -adic transformation groups // Michigan Math. J. 1960. V. 7. P. 201–218.
- [11] Hurewicz W., Wallman H. Dimension Theory. Princeton Univ. Press: Princeton, 1941.
- [12] Engelking R. Dimension Theory. Warsaw: PWN, 1978.

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: scepini@mi.ras.ru

Поступило
14.01.98