Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. С. Волосивец, Б. И. Голубов, О равномерной сходимости и интегрируемости мультипликативных преобразований Фурье, *Матем. заметки*, 2015, том 98, выпуск 1, 44–60

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10691>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 04:40:50

О равномерной сходимости и интегрируемости мультипликативных преобразований Фурье

С. С. Волосивец, Б. И. Голубов

Для мультипликативных преобразований Фурье доказаны аналоги результатов Р. П. Боаса, Ф. Морица, М. И. Дьяченко, И. Р. Лифлянда и С. Ю. Тихонова, относящихся к условиям равномерной сходимости, весовой интегрируемости со степенным весом и принадлежности классам Липшица классических преобразований Фурье. Обобщаются также некоторые результаты Ч. Оневира об условиях принадлежности мультипликативных преобразований Фурье пространствам Липшица–Бесова и Герца.

Библиография: 15 названий.

DOI: 10.4213/mzm10691

1. Введение. В данной работе установлены мультипликативные аналоги некоторых результатов, установленных в работах [1]–[4] для классических преобразований Фурье. Введем преобразование Фурье, косинус-преобразование Фурье и частичный интеграл косинус-преобразования Фурье:

$$\mathcal{F}(f)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-ixt} dt,$$
$$\widehat{f}_c(x) = \int_0^\infty f(t) \cos xt dt, \quad S_t(\widehat{f}_c)(x) = \int_0^t f(y) \cos xy dy,$$

где $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$ или, соответственно, $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ и интегралы в первых двух формулах рассматриваются как несобственные. Будем обозначать вариацию функции $h(t)$ на $[a, b]$ через $\int_a^b |dh(t)|$. Пара функций (h, β) , определенных на $(0, +\infty)$, принадлежит классу GM , если h является функцией ограниченной вариации на каждом отрезке $[a, b] \subset (0, \infty)$ (т.е. $f \in V_{\text{loc}}(0, +\infty)$) и справедливо неравенство

$$\int_x^{2x} |dh(t)| \leq C\beta(x) \quad \text{для всех } x \in (0, \infty).$$

Работа первого автора выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ (проект № 1.1520.2014/К).

Работа второго автора выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 14-01-00417) и программы “Современные проблемы анализа и математической физики” Министерства образования РФ.

В работе [1] установлена

ТЕОРЕМА А. Если выполнено $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$, $f(t) > 0$, $t \in (0, \infty)$, или $(f, \beta) \in GM$, $\lim_{t \rightarrow \infty} t\beta(t) = 0$, то интеграл $\int_0^\infty f(t) \cos xt \, dt$ сходится равномерно на $\mathbb{R}_+$ тогда и только тогда, когда сходится интеграл $\int_0^\infty f(t) \, dt$. При этом имеет место оценка

$$\|\widehat{f_c} - S_M(\widehat{f_c})\|_\infty \leq \sup_{x > M} \left| \int_M^x f(t) \, dt \right| + C \sup_{x \geq M/2} x \int_x^{2x} |df(t)|$$

при некотором $C > 0$ и любом $M > 0$.

Аналогичные результаты получены в [1] для синус-преобразований Фурье. Близкой к задаче об условиях равномерной сходимости является задача об условиях принадлежности преобразований Фурье классам Липшица и их обобщениям. Здесь следует отметить результаты Сэмпсона и Тая [2] и Морица [3], объединенные в следующую теорему.

ТЕОРЕМА В. 1) Пусть $\alpha \in (0, 1)$ и $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ удовлетворяет условию

$$\int_{1/h}^\infty f(t) e^{-ixt} \, dt = O(h^\alpha), \quad \int_{-\infty}^{-1/h} f(t) e^{-ixt} \, dt = O(h^\alpha), \quad h > 0, \quad (1.1)$$

равномерно по $x \in \mathbb{R}$, где интегралы в (1.1) понимаются как несобственные. Тогда $\mathcal{F}(f) \in \text{Lip}(\alpha)$.

2) Если $\alpha \in (0, 1)$, $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ и

$$\int_{|t| < y} |tf(t)| \, dt = O(y^{1-\alpha}), \quad y > 0, \quad (1.2)$$

то $f \in L^1(\mathbb{R})$ и $\mathcal{F}(f) \in \text{Lip}(\alpha)$.

3) Если $\mathcal{F}(f) \in \text{Lip}(\alpha)$, $\alpha \in (0, 1)$, и $tf(t) \geq 0$ для всех $t \in \mathbb{R}$, то справедливо соотношение (1.2).

В теореме В результат п. 1) содержится в работе [2], а результаты пп. 2) и 3) – в работе [3].

В статье [4] Лифлянд и Тихонов рассмотрели класс GM^* функций $h \in V_{\text{loc}}(0, \infty)$, стремящихся к нулю в бесконечности и удовлетворяющих неравенству

$$\int_x^{2x} |dh(t)| \leq C \int_{b^{-1}x}^{bx} u^{-1} |h(u)| \, du, \quad x > 0,$$

для некоторого $b > 1$. Для этого класса ими была доказана

ТЕОРЕМА С. Пусть $1 < p, q < \infty$, $-1/p' < \gamma < 1/p$, где $1/p + 1/p' = 1$. Предположим, что функция $h \in GM^*$ неотрицательна и интеграл

$$\mathcal{F}_+(h) := \int_0^\infty f(t) e^{-ixt} \, dt$$

понимается как несобственный с особыми точками 0 и $+\infty$. Тогда

(А) если $q \leq p$, то $x^{1+\gamma-1/p-1/q} h(x) \in L^q(\mathbb{R}_+)$ влечет $x^{-\gamma} \mathcal{F}_+(h)(x) \in L^p(\mathbb{R}_+)$;

(В) если $p \leq q$, то $x^{-\gamma} \mathcal{F}_+(h)(x) \in L^p(\mathbb{R}_+)$ влечет $x^{1+\gamma-1/p-1/q} h(x) \in L^q(\mathbb{R}_+)$.

В работе [5] аналогичный теореме С результат был доказан для монотонных функций и мультипликативных преобразований Фурье. Здесь мы распространяем его на множество функций h , удовлетворяющих условию

$$\int_x^\infty |dh(t)| \leq Cx^{\theta-1} \int_{x/b}^\infty t^{-\theta} |h(t)| dt < \infty, \quad x > 0, \quad (1.3)$$

где $b > 1$, $\theta \in (0, 1)$, а постоянная $C > 0$ не зависит от x . Условие (1.3) также было рассмотрено в [1] и при этом для функций, ему удовлетворяющих, был доказан результат, соответствующий случаю $p = q$ в теореме С.

Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$, $1 \leq p \leq \infty$ и $0 < q \leq \infty$. Будем говорить, что функция $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$ принадлежит (однородному) $\mathbf{P}$ -ичному пространству Бесова–Липшица $\Lambda(\alpha, p, q)$, если

$$\|f\|_{\Lambda(\alpha, p, q)} = \|f\|_p + \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \|m_k^\alpha (D_{m_k} - D_{m_{k-1}}) * f\|_p^q \right)^{1/q} < \infty.$$

Определения m_k , D_{m_k} , $\mathbf{P}$ -ичной свертки и мультипликативного преобразования Фурье $\widehat{f}$ см. в разделе 2 или в [6]. При $q = \infty$ определение изменяется стандартным образом. Пусть $|x|_{\mathbf{P}} = m_i$ для $m_{i-1} \leq x < m_i$. Измеримая функция $f \in L_{\text{loc}}^p(\mathbb{R}_+)$ принадлежит $\mathbf{P}$ -ичному пространству Герца $K(\alpha, p, q)$, если

$$\|f\|_{K(\alpha, p, q)} := \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} \|m_l^\alpha X_{[m_{l-1}, m_l)} f\|_p^q \right)^{1/q} < \infty,$$

где X_E – индикатор множества E . Ясно, что

$$\|f\|_{K(\alpha, p, p)} = \left(\int_{\mathbb{R}_+} |x|_{\mathbf{P}}^{\alpha p} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \quad \text{при } q = p.$$

Оневиром [7] была установлена

ТЕОРЕМА D. 1) Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$, $1 \leq p \leq 2$ и $0 < q < \infty$. Тогда

- а) если $f \in \Lambda(\alpha, p, q)$, то $\widehat{f} \in K(\alpha, p', q)$;
- б) если $f \in L^p(\mathbb{R}_+) \cap K(\alpha, p, q)$, то $f \in \Lambda(\alpha, p', q)$.

2) В условиях пункта 1) имеем

- а) если $1 \leq r \leq p'$, то $f \in \Lambda(\alpha, p, q)$ влечет $\widehat{f} \in K(\alpha + 1/p' - 1/r, r, q)$;
- б) если $p' \leq r \leq \infty$, то $f \in L^r(\mathbb{R}_+) \cap K(\alpha, p, q)$ влечет $\widehat{f} \in \Lambda(\alpha + 1/r - 1/p, r, q)$.

В нашей работе устанавливается аналог теоремы D для $\mathbf{P}$ -ичных весовых пространств Бесова со степенным весом. Кроме того, даны аналоги теорем A и B. Работа является продолжением статьи авторов [8].

2. Основные определения. Пусть $\mathbf{P} = \{p_j\}_{j \in \mathbb{N}}$, где для всех $j \in \mathbb{N}$ справедливо $p_j \in \mathbb{N}$, $2 \leq p_j \leq N$, $p_{-j} = p_j$. Положим $m_j = p_1 \cdots p_j$ при $j \in \mathbb{N}$, $m_0 = 1$ и $m_{-l} = 1/m_l$ при $l \in \mathbb{N}$. Тогда каждому $x \in \mathbb{R}_+$ можно сопоставить разложение

$$x = \sum_{j=1}^{k(x)} x_{-j} m_{j-1} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x_j}{m_j}, \quad x_j \in \mathbb{Z} \cap [0, p_j) =: \mathbb{Z}(p_j), \quad |j| \in \mathbb{N}. \quad (2.1)$$

Это разложение определяется однозначно, если при $x = k/m_n$, $k \in \mathbb{Z}_+$, брать разложения с конечным числом ненулевых x_j .

Пусть $G(\mathbf{P})$ – группа, состоящая из последовательностей вида

$$\tilde{x} = (\dots, x_{-2}, x_{-1}, x_1, x_2, \dots), \quad x_j \in \mathbb{Z}(p_j),$$

$x_{-j} = 0$ при $j \geq j_0(\tilde{x})$, с операцией $\tilde{x} \oplus \tilde{y} = \tilde{z}$, где $z_j = x_j + y_j \pmod{p_j}$, $|j| \in \mathbb{N}$. Аналогично определяется обратная операция $\tilde{x} \ominus \tilde{y}$. Отображение $\lambda_{\mathbf{P}} : G(\mathbf{P}) \rightarrow \mathbb{R}_+$, определяемое равенством

$$\lambda_{\mathbf{P}}(\tilde{x}) = \sum_{i=1}^{\infty} x_{-i} m_{i-1} + \sum_{j=1}^{\infty} x_j m_j^{-1},$$

не является взаимно однозначным, поскольку элементам вида

$$x = \frac{k}{m_l} \in \mathbb{R}_+, \quad k, l \in \mathbb{N}, \quad (2.2)$$

соответствуют два элемента $G(\mathbf{P})$. При определении обратного отображения $\lambda_{\mathbf{P}}^{-1}$ для x вида (2.2) будем считать

$$x_j = [m_j x] \pmod{p_j}, \quad j \in \mathbb{N}, \quad x_{-j} = [x m_{j-1}^{-1}] \pmod{p_j}, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Тогда

$$\lambda_{\mathbf{P}}^{-1}(x) = (\dots, x_{-1}, x_1, \dots, x_l, 0, 0, \dots).$$

Для остальных $x \in \mathbb{R}_+$ существует единственный элемент $\tilde{x} \in G(\mathbf{P})$ со свойством $\lambda_{\mathbf{P}}(\tilde{x}) = x$, и тогда $\lambda_{\mathbf{P}}^{-1}(x) = \tilde{x}$. Определим обобщенные расстояние

$$\rho(x, y) = \lambda_{\mathbf{P}}(\lambda_{\mathbf{P}}^{-1}(x) \ominus \lambda_{\mathbf{P}}^{-1}(y))$$

и сложение

$$x \oplus y = \lambda_{\mathbf{P}}(\lambda_{\mathbf{P}}^{-1}(x) \oplus \lambda_{\mathbf{P}}^{-1}(y))$$

на $\mathbb{R}_+$. При этом $x \oplus y$ не определено, если

$$\lambda_{\mathbf{P}}^{-1}(x) \oplus \lambda_{\mathbf{P}}^{-1}(y) = \tilde{z},$$

где $z_j = p_j - 1$ при $j \geq j_0$, т.е. $x \oplus y$ определено для п.в. $x \in \mathbb{R}_+$ при фиксированном $y \in \mathbb{R}_+$. Легко видеть, что сумма $x \oplus 1/m_{k+1}$, $k \in \mathbb{Z}_+$, определена всегда и что $\rho(x \oplus 1/m_{k+1}, x) < 1/m_k$.

Для $x, y \in [0, +\infty)$, записанных в виде (2.1), определим ядро $\chi(x, y)$ равенством

$$\chi(x, y) = \exp \left\{ 2\pi i \left(\sum_{j=1}^{\infty} (x_j y_{-j} + x_{-j} y_j) / p_j \right) \right\}.$$

Для почти всех пар $(x, z) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ при фиксированном $y \in \mathbb{R}_+$ имеют место равенства

$$\chi(x \oplus z, y) = \chi(x, y) \chi(z, y), \quad \chi(x \ominus z, y) = \chi(x, y) \overline{\chi(z, y)}.$$

Отсюда следует, что $\chi(x, y) = \chi(\{x\}, [y]) \chi([x], \{y\})$ ($\{x\}$ – дробная часть x , $[x]$ – целая часть x), и что при $y < m_k$, $k \in \mathbb{Z}_+$, функция $\chi(x, y)$ постоянна по x на всех

$I_j^k := [j/m_k, (j+1)/m_k)$, $j \in \mathbb{Z}_+$ (см. [6; § 1.5]). Кроме того, $I_j^k \ominus t = \{u \ominus t : u \in I_j^k\}$ совпадает с некоторым $I_{j_1}^k$ и аналогичное свойство верно для операции $\oplus$.

Пространство $L_w^p(\mathbb{R}_+)$, где $w(x)$ – положительная измеримая (по Лебегу) функция на $\mathbb{R}_+$, состоит из измеримых на $\mathbb{R}_+$ функций f , для которых

$$\|f\|_{p,w} := \left(\int_{\mathbb{R}_+} |f(x)|^p w(x) dx \right)^{1/p} < \infty.$$

При $w \equiv 1$ используем обозначения L^p и $\|\cdot\|_p$ соответственно.

Пространство $UC^*(\mathbb{R}_+)$ содержит все измеримые функции со следующим свойством: для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех $x, y \in \mathbb{R}_+$, удовлетворяющих неравенству $\rho(x, y) < \delta$, верно неравенство $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Если, кроме того, $\|f\|_\infty := \sup_{x \in \mathbb{R}_+} |f(x)| < \infty$, то $f \in BUC^*(\mathbb{R}_+)$.

Для функции $f \in L^1(\mathbb{R}_+)$ мультипликативное $\mathbf{P}$ -преобразование Фурье определяется формулой

$$\widehat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}_+} f(y) \overline{\chi(x, y)} dy$$

(справа стоит интеграл Лебега). Легко видеть, что из $f_n \rightarrow f$ в $L^1(\mathbb{R}_+)$ вытекает равномерная сходимость $\widehat{f}_n(x)$ к $\widehat{f}(x)$ на $\mathbb{R}_+$. Для $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$, $1 < p \leq 2$, $\mathbf{P}$ -преобразование Фурье вводится, как предел

$$\int_0^a f(y) \overline{\chi(x, y)} dy \quad \text{в } L^q(\mathbb{R}_+), \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad \text{при } a \rightarrow \infty.$$

При этом, согласно [6; гл. 6, теорема 6.1.7] справедлив аналог неравенства Хаусдорфа–Юнга

$$\|\widehat{f}\|_q \leq \|f\|_p.$$

Аналогично вводится $\widetilde{f}(x) = \int_{\mathbb{R}_+} f(t) \chi(x, t) dt$. Назовем f *допустимой* функцией на $\mathbb{R}_+$, если

- 1) $f \in L^1[0, 1)$;
- 2) $f \in BV[1, +\infty)$;
- 3) $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$.

Для допустимых на $\mathbb{R}_+$ функции f можно определить $\widehat{f}$, как несобственный интеграл (см. [8]).

Далее важную роль играет аналог ядра Дирихле

$$D_y(x) = \int_0^y \chi(x, t) dt.$$

Аналогично доказательству теоремы 6.3.2 в [6; гл. 6], можно показать, что для $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$, $1 \leq p \leq 2$, справедливо равенство

$$S_y(f)(x) := \int_0^y \widehat{f}(t) \chi(x, t) dt = \int_0^\infty f(t) D_y(x \ominus t) dt. \quad (2.3)$$

Для $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$, $2 < p < \infty$, по определению

$$S_y(f)(x) = \int_{\mathbb{R}_+} f(t) D_y(x \ominus t) dt.$$

Аналогично

$$S_y(\widehat{f})(x) := \int_0^y f(t) \overline{\chi(x, t)} dt$$

для $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$. Поскольку по теореме 6.3.1 из [6; гл. 6] $D_y(\cdot) \in L^r(\mathbb{R}_+)$ при всех $y \in \mathbb{R}_+$ и $1 < r < \infty$, существование $S_y(f)(x)$ для всех $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$, $2 < p < \infty$ и $x, y \in \mathbb{R}_+$, вытекает из неравенства Гёльдера.

Пусть $n \in \mathbb{Z}_+$ и G_n – множество функций g , постоянных на всех I_k^n , $k \in \mathbb{Z}_+$, а G^k – множество функций g таких, что $g(x) = 0$ вне $[0, m_k)$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Множество тест-функций D состоит из φ , принадлежащих $G_n \cap G^k$ для некоторых $n, k \in \mathbb{Z}_+$. Известно (см. [6; § 6.2]), что из $\varphi \in D$ следует $\widehat{\varphi} \in D$. Для $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$, $1 \leq p < \infty$, или $f \in UC^*(\mathbb{R}_+)$ ($p = \infty$) пусть

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{m_n}(f)_p &= \inf_{g \in G_n} \|f - g\|_p, \\ \omega^*(f, \delta)_p &= \sup_{0 < h < \delta} \|f(\cdot) - f(\cdot \oplus h)\|_p, \quad 1 \leq p < \infty, \\ \omega^*(f, \delta)_\infty &= \sup_{\rho(x, y) < \delta} |f(x) - f(y)|, \\ \omega_n(f)_p &= \omega^*\left(f, \frac{1}{m_n}\right)_p, \quad 1 \leq p \leq \infty. \end{aligned}$$

Для $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$, $1 \leq p < \infty$, или $f \in UC^*(\mathbb{R}_+)$ имеет место неравенство Ефимова (см. [6; гл. 10, теорема 10.5.2])

$$\mathcal{E}_{m_n}(f)_p \leq \|f - S_{m_n}(f)\|_p \leq \omega_n(f)_p \leq 2\mathcal{E}_{m_n}(f)_p, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

При этом из $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{E}_{m_n}(f)_\infty = 0$ следует, что $f \in UC^*(\mathbb{R}_+)$.

Через H_p^ω , $1 \leq p < \infty$, обозначим пространство

$$\{f \in L^p(\mathbb{R}_+) : \omega_n(f)_p \leq C\omega_n, n \in \mathbb{Z}_+\},$$

где $\omega = \{\omega_n\}_{n=0}^\infty$ убывает к нулю. Аналогично определяется $H^\omega = H_\infty^\omega$. Убывающая к нулю последовательность $\omega = \{\omega_n\}_{n=0}^\infty$ принадлежит классу Бари B , если

$$\sum_{k=n}^\infty \omega_k = O(\omega_n), \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

и классу Бари–Стечкина B_l , $l > 0$, если

$$\sum_{k=0}^n m_k^l \omega_k = O(m_n^l \omega_n), \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Для $\omega \in B_l$ ясно, что $m_{n-1}^l \omega_{n-1} \leq C m_n^l \omega_n$, т.е. $\omega_{n-1} \leq C N^l \omega_n$, $n \in \mathbb{N}$.

3. Вспомогательные утверждения.

ЛЕММА 1 (см. [6; §§ 1.5 и 11.1]). При всех $n \in \mathbb{Z}$, $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$, $1 \leq p < \infty$, и $x \in \mathbb{R}_+$ имеем

$$D_{m_n}(x) = m_n X_{[0, 1/m_n)}(x),$$

где X_E – индикатор множества E ,

$$S_{m_n}(f)(x) = m_n \int_0^{1/m_n} f(x \oplus t) dt, \quad x \in \mathbb{R}_+, \quad \|S_{m_n}(f)\|_p \leq \|f\|_p.$$

ЛЕММА 2 [8]. Для функции $D_y(x)$ справедливо неравенство $|D_y(x)| \leq (N+1)x^{-1}$, $x, y \in (0, +\infty)$, где N – мажоранта для $\{p_n\}_{n=1}^\infty$.

Следующая лемма, обобщающая неравенство Харди (см. [9; теорема 330]), доказана Брэдли [10].

ЛЕММА 3. Пусть $1 \leq p \leq q \leq \infty$ и весовые функции $u(x), v(x)$ измеримы и положительны п.в. на $\mathbb{R}_+$. Для выполнения неравенства

$$\left(\int_0^\infty \left(\int_0^x f(t) dt \right)^p u(x) dx \right)^{1/p} \leq C \left(\int_0^\infty f^q(x) v(x) dx \right)^{1/q} \quad (3.1)$$

при всех измеримых $f(x) \geq 0$ необходимо и достаточно, чтобы

$$A := \sup_{x>0} \left(\int_x^\infty u(t) dt \right)^{1/p} \left(\int_0^x v^{1-q'}(t) dt \right)^{1/q'} < \infty, \quad \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1.$$

Как следствие, для $u(x) = x^\alpha$ и $v(x) = x^\beta$ неравенство (3.1) имеет место при $\beta < q - 1$ и

$$\alpha = \frac{p\beta}{q} - \frac{p}{q'} - 1 \quad \left(\beta = \frac{q(\alpha + 1)}{p} + q - 1 \right).$$

Лемма 4 установлена в [6; гл. 6] при доказательстве теоремы 6.3.2.

ЛЕММА 4. Пусть $f \in L^r(\mathbb{R}_+)$, $1 \leq r \leq 2$. Тогда

$$\int_0^{m_n} \widehat{f}(y) dy = \int_0^\infty f(t) D_{m_n}(t) dt = m_n \int_0^{1/m_n} f(t) dt.$$

Лемма 5 является аналогом неравенства Стейна [11] для классического преобразования Фурье и доказана Оневиром [12].

ЛЕММА 5. Пусть $1 < p \leq 2$ и $0 \leq \alpha \leq 1 - 1/p = 1/p'$. Существует продолжение оператора $F(f) = \widehat{f}$ с D на $K(\alpha, p, p)$, т.е. на множество функций f , для которых интеграл

$$\int_0^\infty |f(x)|^p |x|_{\mathbf{P}}^{\alpha p} dx$$

конечен, причем $F(f) \in K(-\alpha, p', p')$ и выполнено неравенство

$$\left(\int_0^\infty |F(f)(x)|^{p'} |x|_{\mathbf{P}}^{-\alpha p'} dx \right)^{1/p'} \leq C \left(\int_0^\infty |f(x)|^p |x|_{\mathbf{P}}^{\alpha p} dx \right)^{1/p}.$$

ЛЕММА 6. Пусть $f(x) \geq 0$ на $\mathbb{R}_+$ и удовлетворяет условию (1.3) для некоторых $b > 1$ и $\theta \in (0, 1]$. Тогда справедливо неравенство

$$|\widehat{f}(x)| \leq C \left(\int_0^{1/x} f(t) dt + x^{-\theta} \int_{1/x}^\infty t^{-\theta} f(t) dt \right). \quad (3.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем по определению

$$|\widehat{f}(x)| \leq \left| \left(\int_0^{1/x} + \int_{1/x}^\infty \right) f(t) \overline{\chi(x, t)} dt \right| \leq \int_0^{1/x} f(t) dt + \left| \int_{1/x}^\infty f(t) d\overline{D_t(x)} \right| =: I_1 + I_2.$$

В силу формулы интегрирования по частям, леммы 2 и условия (1.3) получаем

$$\begin{aligned} I_2(x) &\leq |f(x^{-1})D_{x^{-1}}(x)| + \left| \int_{1/x}^\infty D_t(x) df(t) \right| \\ &\leq (N+1)x^{-1}|f(x^{-1})| + (N+1)x^{-1} \int_{1/x}^\infty |df(t)| \\ &\leq 2(N+1)x^{-1} \int_{1/x}^\infty |df(t)| \leq C_1 x^{-\theta} \int_{1/xb}^\infty t^{-\theta} f(t) dt. \end{aligned}$$

Поскольку $\theta \in (0, 1]$, $b > 1$ и $x^{-\theta} \leq b^\theta t^\theta$ на $[1/xb, 1/x]$, мы находим, что

$$x^{-\theta} \int_{1/xb}^{1/x} t^{-\theta} f(t) dt \leq b^\theta \int_0^{1/x} f(t) dt = b^\theta I_1.$$

Объединяя полученные оценки, мы приходим к (3.2). Лемма доказана.

Последняя лемма представляет собой вариант теоремы Литтлвуда–Пэли для мультипликативного преобразования Фурье и доказана в [12].

ЛЕММА 7. Пусть $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$ и для всех $x \in \mathbb{R}_+$ справедливо равенство

$$\lim_{l \rightarrow -\infty} D_{m_l} * f(x) = 0.$$

Если $1 < p < \infty$ и $-1/p < \alpha < 1 - 1/p$, то

$$\left(\int_{\mathbb{R}_+} |f(x)|^p |x|^{\alpha p} dx \right)^{1/p} \asymp \left(\int_{\mathbb{R}_+} \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} |(D_{m_l} - D_{m_{l-1}}) * f(x)|^2 \right)^{p/2} |x|^{\alpha p} dx \right)^{1/p}.$$

4. Основные результаты.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $(f, \beta) \in GM$ и $\lim_{t \rightarrow +\infty} t\beta(t) = 0$. Тогда $\int_0^\infty f(t) \overline{\chi(x, t)} dt$ сходится равномерно по $x \in \mathbb{R}_+$ в том и только в том случае, когда сходится интеграл $\int_0^\infty f(t) dt$. При этом имеет место оценка

$$\begin{aligned} \left| \int_A^\infty f(t) \overline{\chi(x, t)} dt \right| &= |\widehat{f}(x) - S_A(\widehat{f})(x)| \\ &\leq C \left(\sup_{y \geq A} \left| \int_A^y f(t) dt \right| + \sup_{s \geq N^{-1}A/2} s \int_s^{2s} |df(t)| \right), \end{aligned}$$

где постоянная $C > 0$ не зависит от $A > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть сходится интеграл $\int_0^\infty f(t) dt$. Поскольку при фиксированном $x \in [0, m_n)$, $n \in \mathbb{Z}$, функция $\chi(x, t)$ является постоянной на всех $I_k^n = [k/m_n, (k+1)/m_n)$, то на каждом участке постоянства $[a, b)$ имеем равенство

$$\int_a^b f(t) \overline{\chi(x, t)} dt = \int_a^b f(t) d\overline{D_t(x)}$$

и это равенство верно в силу аддитивности интеграла Лебега–Стилтьеса на любом промежутке. Имеем

$$\int_A^\infty f(t) \overline{\chi(x, t)} dt = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) \overline{D_t(x)} - f(A) \overline{D_A(x)} - \lim_{B \rightarrow +\infty} \int_A^B \overline{D_t(x)} df(t). \quad (4.1)$$

В [1] при выполнении условий теоремы получена оценка

$$|f(t)| \leq \int_t^\infty |df(s)| \leq C_1 t^{-1} \sup_{s \geq t/2} s \int_s^{2s} |df(u)|. \quad (4.2)$$

Отсюда следует существование предела $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = f(+\infty) \in \mathbb{R}$ и если $f(+\infty) \neq 0$, то это противоречит существованию $\int_0^\infty f(t) dt$, поэтому в силу леммы 2 имеем равенство

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) \overline{D_t(x)} = 0.$$

Ввиду условия и (4.2) функция f является функцией ограниченной вариации на $[t, \infty)$ при $t > 0$. Отсюда по теореме 3 из [8] следует существование интеграла в левой части (4.1) при всех $A > 0$. Пусть $x \geq 1/A$. Подставляя оценку (4.2) в (4.1), находим, что

$$\left| \int_A^\infty f(t) \overline{\chi(x, t)} dt \right| \leq 2(N+1)C_1(xA)^{-1} \sup_{s \geq A/2} s \int_s^{2s} |df(u)| \leq C_2 \sup_{s \geq A/2} s\beta(s) < \varepsilon$$

при достаточно больших A , где C_2 не зависит от x . Пусть теперь $0 < x < 1/A$. Запишем

$$\int_A^\infty f(t) \overline{\chi(x, t)} dt = \left(\int_A^{1/x} + \int_{1/x}^\infty \right) f(t) \overline{\chi(x, t)} dt = I_1(x) + I_2(x).$$

Тот факт, что $I_2(x) \rightarrow 0$ при $A \rightarrow \infty$ равномерно по x , доказывается, как выше. Оценим $I_1(x)$ следующим образом:

$$|I_1(x)| \leq \left| \int_A^{1/x} f(t) dt \right| + \left| \int_A^{1/x} f(t) (1 - \overline{\chi(x, t)}) dt \right| = I_1^{(1)} + I_1^{(2)}.$$

Ясно, что

$$I_1^{(1)} \leq \sup_{y \geq A} \left| \int_A^y f(t) dt \right|$$

и при условии сходимости интеграла $\int_0^\infty f(t) dt$ правая часть последнего неравенства и $I_1^{(1)}$ стремятся к нулю при $A \rightarrow \infty$. Пусть теперь $1/x \in (m_n, m_{n+1}]$, т.е. $x \in [m_{n+1}^{-1}, m_n^{-1})$. По свойствам ядра $\chi(x, t)$ имеем $\chi(x, t) = 1$ при $t \in [0, m_n)$. Так как $A < 1/x$, то либо $A \leq m_n$, либо $A \in (m_n, m_{n+1})$. В любом случае имеем

$$m_n \geq N^{-1}A.$$

Используя сказанное выше, (4.2) и неравенство $Nxt \geq 1$, $t \in [m_n, 1/x) \subset [m_n, m_{n+1})$, находим, что

$$\begin{aligned} I_1^{(2)}(x) &\leq \int_{m_n}^{1/x} 2|f(t)| dt \leq C_1 \int_{m_n}^{1/x} t^{-1} \sup_{s \geq t/2} s \int_s^{2s} |df(u)| 2N^2(xt)^2 dt \\ &\leq C_3 \sup_{s \geq N^{-1}A/2} s \int_s^{2s} |df(u)| \int_0^{1/x} x^2 t dt = 2^{-1} C_3 \sup_{s \geq N^{-1}A/2} s \int_s^{2s} |df(u)|. \end{aligned} \quad (4.3)$$

В силу условия теоремы правая часть (4.3) стремится к нулю при $A \rightarrow \infty$. Таким образом, I_1 и I_2 сходятся к нулю равномерно по $x \in (0, \infty)$ и, поскольку случай $x = 0$ очевиден, получаем равномерную сходимость $\int_0^\infty f(t)\chi(x, t) dt$ на $\mathbb{R}_+$. Обратное утверждение очевидно, так как из равномерной сходимости интеграла по $x \in \mathbb{R}_+$ следует его сходимость при $x = 0$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Теорема 1 является аналогом теоремы А. При $f(t) \geq 0$ (или если действительная и мнимая части $f(t)$ сохраняют знак) на $\mathbb{R}_+$ из сходимости $\int_0^\infty f(t) dt$ следует включение $f \in L^1(\mathbb{R}_+)$ и равномерная сходимость интеграла $\int_0^\infty f(t)\chi(x, t) dt$. Обратное утверждение снова очевидно.

ТЕОРЕМА 2. 1) Пусть $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$, $\{\omega_n\}_{n=1}^\infty$ убывает к нулю и

$$\int_{m_n}^\infty f(t)\overline{\chi(x, t)} dt = O(\omega_n), \quad n \in \mathbb{N},$$

равномерно по x . Тогда $f \in L^1(\mathbb{R}_+)$ и $\hat{f} \in H^\omega$. Здесь интеграл в левой части и $\hat{f}$ понимаются как несобственные интегралы.

2) Пусть $f(t) \geq 0$, $t \in \mathbb{R}_+$, $f \in L^1(\mathbb{R}_+)$, $\omega \in B$ и $\hat{f} \in H^\omega$. Тогда справедливо соотношение

$$\int_{m_n}^\infty f(t)\overline{\chi(x, t)} dt = O(\omega_n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) По условию $f \in L^1[0, m_n)$, $n \in \mathbb{Z}$, и $\hat{f}(x) = \int_0^\infty f(t)\overline{\chi(x, t)} dt$ существует как несобственный интеграл. Тогда при $x, y \in \mathbb{R}_+$ таких, что $\rho(x, y) < 1/m_n$, $n \in \mathbb{Z}_+$, имеем

$$\begin{aligned} |\hat{f}(y) - \hat{f}(x)| &\leq \left| \int_0^{m_n} f(t)(\overline{\chi(y, t)} - \overline{\chi(x, t)}) dt \right| \\ &\quad + \left| \int_{m_n}^\infty f(t)\overline{\chi(y, t)} dt \right| + \left| \int_{m_n}^\infty f(t)\overline{\chi(x, t)} dt \right| \\ &\leq 2C_1\omega_n, \end{aligned}$$

поскольку $\chi(y, t) = \chi(x, t)$ при данных x, y и $t \in [0, m_n)$.

2) Пусть $f \in L^1(\mathbb{R}_+)$, $f(t) \geq 0$ на $\mathbb{R}_+$ и $\hat{f} \in H^\omega$. Тогда

$$C_2\omega_n \geq \left| \hat{f}\left(\frac{1}{m_{n+1}}\right) - \hat{f}(0) \right| = \left| \int_0^\infty f(t)(1 - \overline{\chi(m_{n+1}^{-1}, t)}) dt \right|.$$

При $t \in [m_n, m_{n+1})$, $n \in \mathbb{Z}_+$, имеем

$$\overline{\chi(m_{n+1}^{-1}, t)} = \exp\left(\frac{2\pi i k}{p_{n+1}}\right), \quad 1 \leq k < p_{n+1}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

В силу ограниченности $\{p_n\}_{n=1}^\infty$ имеем неравенство $\text{Re}(1 - \chi(m_{n+1}^{-1}, t)) \geq C_3 > 0$ для всех $t \in [m_n, m_{n+1})$ и $\text{Re}(1 - \chi(m_{n+1}^{-1}, t)) \geq 0$ для остальных t . В итоге находим, что $C_2\omega_n \geq C_3 \int_{m_n}^{m_{n+1}} f(t) dt$, откуда с помощью условия $\omega \in B$ вытекает неравенство

$$\left| \int_{m_n}^\infty f(t)\overline{\chi(x, t)} dt \right| \leq \int_{m_n}^\infty f(t) dt \leq \sum_{k=n}^\infty \int_{m_k}^{m_{k+1}} f(t) dt \leq C_4 \sum_{k=n}^\infty \omega_k \leq C_5\omega_n.$$

Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $f(t) \geq 0$, $t \in \mathbb{R}_+$, $f \in L^1(\mathbb{R}_+)$ и $\omega \in B \cap B_l$, $l \in (0, \infty)$. Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) $f \in H^\omega$;
- 2) $\int_{m_n}^\infty f(t) dt = O(\omega_n)$, $n \in \mathbb{Z}_+$;
- 3) $\int_0^{m_n} t^l f(t) dt = O(m_n^l \omega_n)$, $n \in \mathbb{Z}_+$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эквивалентность 1) и 2) установлена в теореме 2. Так как $\omega = \{\omega_n\}_{n=0}^\infty \in B_l$, то $\omega_{n-1} m_{n-1}^l \leq C_1 \omega_n m_n^l$ или $\omega_{n-1} \leq C_1 N^l \omega_n$. Если $\omega(x)$ – функция, равная ω_n при $x = 1/m_n$, линейная на $[m_{n+1}^{-1}, m_n^{-1}]$, $n \in \mathbb{N}$, и $\omega(0) = 0$, то $\omega(x)$ есть непрерывная, возрастающая, равная нулю в нуле функция, удовлетворяющая Δ_2 -условию $\omega(2x) \leq C_2 \omega(x)$ и классическому условию B_l :

$$\sum_{k=1}^n k^{l-1} \omega\left(\frac{1}{k}\right) = O\left(n^l \omega\left(\frac{1}{n}\right)\right), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (4.4)$$

В силу Δ_2 -условия на $\omega(x)$ и ограниченности $\{p_n\}_{n=1}^\infty$ легко видеть, что условие 3) равносильно соотношению

$$\int_0^y t^l f(t) dt = O\left(y^l \omega\left(\frac{1}{y}\right)\right), \quad y > 0. \quad (4.5)$$

Согласно лемме 4 из [13], условие (4.5) равносильно условию

$$\int_y^\infty f(t) dt = O\left(\omega\left(\frac{1}{y}\right)\right), \quad y > 0. \quad (4.6)$$

при ω , удовлетворяющем соотношению (4.4). В свою очередь легко видеть, что (4.6) равносильно 2). Следствие доказано.

ТЕОРЕМА 3. Пусть f – допустимая функция, $f(x)$ неотрицательна на $\mathbb{R}_+$ и удовлетворяет условию (1.3) при некотором $\theta \in (0, 1]$.

1) Если $1 < q \leq p < \infty$, $1/p - \theta < \gamma < 1/p$ и $f(x)x^{\gamma+1-1/p-1/q} \in L^q(\mathbb{R}_+)$, то

$$x^{-\gamma} \widehat{f}(x) \in L^p(\mathbb{R}_+).$$

2) Если $f \in L^r(\mathbb{R}_+)$ при некотором $1 \leq r \leq 2$, $1 < p \leq q < \infty$, $1/p - \theta < \gamma < 1/p$ и $x^{-\gamma} \widehat{f}(x) \in L^p(\mathbb{R}_+)$, то

$$f(x)x^{\gamma+1-1/p-1/q} \in L^q(\mathbb{R}_+).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) В силу леммы 6 справедливо неравенство

$$\begin{aligned} & \left(\int_0^\infty |\widehat{f}(x)|^p x^{-\gamma p} dx \right)^{1/p} \\ & \leq C_1 \left(\left[\int_0^\infty \left(\int_0^{1/x} f(t) dt \right)^p x^{-\gamma p} dx \right]^{1/p} \right. \\ & \quad \left. + \left[\int_0^\infty x^{-\theta p} \left(\int_{1/x}^\infty t^{-\theta} f(t) dt \right)^p x^{-\gamma p} dx \right]^{1/p} \right). \end{aligned}$$

Производя замену переменной $u = 1/x$, приходим к неравенству

$$\begin{aligned} & \left(\int_0^\infty |\widehat{f}(x)|^p x^{-\gamma p} dx \right)^{1/p} \\ & \leq C_1 \left(\left[\int_0^\infty \left(\int_0^u f(t) dt \right)^p u^{\gamma p-2} du \right]^{1/p} \right. \\ & \quad \left. + \left[\int_0^\infty u^{(\theta+\gamma)p-2} \left(\int_u^\infty t^{-\theta} f(t) dt \right)^p du \right]^{1/p} \right) \\ & = I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Для I_1 имеем по лемме 3

$$I_1 \leq C_2 \left[\int_0^\infty f^q(u) u^{q(\gamma p-1)/p+q-1} du \right]^{1/q} = C_2 \left[\int_0^\infty f^q(u) u^{q\gamma+q-q/p-1} du \right]^{1/q}.$$

Для I_2 производим сначала замены $v = 1/t$ и $x = 1/u$ и применяем лемму 3, после чего делаем обратную замену $u = 1/x$:

$$\begin{aligned} I_2 &= C_1 \left[\int_0^\infty u^{(\theta+\gamma)p-2} \left(\int_0^{1/u} v^{\theta-2} f(v^{-1}) dv \right)^p du \right]^{1/p} \\ &= C_1 \left[\int_0^\infty x^{-(\theta+\gamma)p} \left(\int_0^x v^{\theta-2} f(v^{-1}) dv \right)^p dx \right]^{1/p} \\ &\leq C_3 \left(\int_0^\infty f^q(x^{-1}) x^{q(\theta-2)} x^{q(1-(\theta+\gamma)p)/p+q-1} dx \right)^{1/q} \\ &= C_3 \left(\int_0^\infty f^q(x^{-1}) x^{q/p-q\gamma-q-1} dx \right)^{1/q} = C_3 \left(\int_0^\infty f^q(u) u^{q+q\gamma-q/p-1} du \right)^{1/q}. \end{aligned}$$

Для применения леммы 3 к I_1 надо, чтобы $q\gamma - q/p < 0$, а для I_2 нужно выполнение неравенства $1 - (\gamma + \theta)p < 0$, т.е. $1/p - \theta < \gamma < 1/p$.

2) Пусть $x \in (m_{n+1}^{-1}, m_n^{-1}]$ (т.е. $1/x \in [m_n, m_{n+1})$). Тогда в силу неотрицательности $f(t)$ и леммы 4 имеем

$$\int_0^{1/x} |\widehat{f}(t)| dt \geq \int_0^{m_n} \widehat{f}(t) dt = m_n \int_0^{1/m_n} f(t) dt \geq (Nx)^{-1} \int_0^x f(t) dt. \quad (4.7)$$

Производя перемену порядка интегрирования для $g(s, z) \geq 0$, получаем

$$\int_a^\infty \int_{s/2}^s g(s, z) dz ds \geq \int_a^\infty \int_z^{2z} g(s, z) ds dz.$$

В частности,

$$\int_a^\infty s^{-\theta} \int_{s/2}^s z^{-1} f(z) dz ds \geq (1 - \theta)^{-1} (2^{1-\theta} - 1) \int_a^\infty z^{-\theta} dz, \quad a > 0.$$

Используя неравенство выше, (1.3), (4.2) и (4.7), находим, что

$$\begin{aligned} f(t) &\leq C_4 t^{\theta-1} \int_{t/b}^{\infty} s^{-\theta} f(s) ds \leq C_5 t^{\theta-1} \int_{t/b}^{\infty} s^{-\theta} \int_{s/2}^s z^{-1} f(z) dz ds \\ &\leq 2C_5 t^{\theta-1} \int_{t/b}^{\infty} s^{-\theta} s^{-1} \int_0^s f(z) dz ds \leq 2NC_5 t^{\theta-1} \int_{t/b}^{\infty} s^{-\theta} \int_0^{1/s} |\widehat{f}(u)| du ds. \end{aligned} \quad (4.8)$$

В силу леммы 3 из (4.8) выводим с помощью замен $1/s = u$ и $b/t = y$

$$\begin{aligned} &\left(\int_0^{\infty} f^q(x) x^{q+q\gamma-q/p-1} dx \right)^{1/q} \\ &\leq C_6 \left(\int_0^{\infty} t^{q\gamma+q\theta-q/p-1} \left(\int_{t/b}^{\infty} s^{-\theta} \int_0^{1/s} |\widehat{f}(z)| dz ds \right)^q dt \right)^{1/q} \\ &= C_6 \left(\int_0^{\infty} t^{q(\gamma+\theta-1/p)-1} \left(\int_0^{b/t} u^{\theta-2} \int_0^u |\widehat{f}(z)| dz du \right)^q dt \right)^{1/q} \\ &= C_7 \left(\int_0^{\infty} y^{-q(\gamma+\theta-1/p)-1} \left(\int_0^y u^{\theta-2} \int_0^u |\widehat{f}(z)| dz du \right)^q dy \right)^{1/q} \\ &\leq C_8 \left(\int_0^{\infty} y^{-p\gamma-p} \left(\int_0^y |\widehat{f}(z)| dz \right)^p dy \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Применяя неравенство Харди (частный случай леммы 3 при $p = q$, $\alpha = -p\gamma - p$ и $\beta = \alpha + p = -p\gamma$), находим, что

$$\left(\int_0^{\infty} f^q(x) x^{q+q\gamma-q/p-1} dx \right)^{1/q} \leq C_9 \left(\int_0^{\infty} |\widehat{f}(y)|^p y^{-p\gamma} dy \right)^{1/p}.$$

Для того, чтобы применить лемму 3 в первом случае требуется выполнение неравенства $\gamma + \theta - 1/p > 0$, а во втором случае – неравенства $-p\gamma < p - 1$, которое следует из $\gamma > 1/p - \theta$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $1 < p < \infty$ и f – допустимая функция, $f(t) \geq 0$ на $\mathbb{R}_+$, $f \in L^r(\mathbb{R}_+)$ при некотором $r \in [1, 2]$ и удовлетворяет условию (1.3) при некотором $\theta \in (0, 1]$. Если $1/p - \theta < \gamma < 1/p$, то условия

$$f(x) x^{\gamma+1-2/p} \in L^p(\mathbb{R}_+) \quad \text{и} \quad x^{-\gamma} \widehat{f}(x) \in L^p(\mathbb{R}_+)$$

равносильны.

Рассмотрим пространства Липшица–Бесова со степенным весом вида $w_a(x) = |x|_{\mathbf{P}}^a$. Пространство $\Lambda(\alpha, p, q, \beta)$, где $1 \leq p < \infty$, $0 < q \leq \infty$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, состоит из $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$, таких что норма

$$\|f\|_{\Lambda(\alpha, p, q, \beta)} := \|f\|_{p, w_{\beta p}} + \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} \left(\int_{\mathbb{R}_+} |m_l^\alpha(D_{m_l} - D_{m_{l-1}}) * f(x)|^p w_{\beta p}(x) dx \right)^{q/p} \right)^{1/p}$$

конечна.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$, $1 \leq p \leq 2$, $0 < q \leq \infty$, $\beta \in [0, 1 - 1/p]$.

1) Если $f \in \Lambda(\alpha, p, q, \beta)$, то $\widehat{f} \in K(\alpha - \beta, p', q)$.

2) Если $f \in L^p_{w_{\beta p}}(\mathbb{R}_+) \cap K(\alpha + \beta, p, q)$, то $\widehat{f} \in \Lambda(\alpha, p', q, -\beta)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Известно, что для $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$, $g \in L^1(\mathbb{R}_+)$ верно соотношение $\widehat{f * g}(x) = \widehat{f}(x)\widehat{g}(x)$ п.в. на $\mathbb{R}_+$ (см., например, лемму 12 в [14]). Используя лемму 1, получаем

$$\widehat{f}(y)X_{[m_l, m_{l+1})}(y) = ((D_{m_{l+1}} - D_{m_l}) * f)\widehat{}(y) \quad (4.9)$$

п.в. на $\mathbb{R}_+$. По лемме 5 имеем

$$\left(m_l^{\alpha p'} \int_{m_{l-1}}^{m_l} |\widehat{f}(x)|^{p'} |x|^{-\beta p'} dx \right)^{1/p'} \leq C_1 \left(\int_{\mathbb{R}_+} m_l^{\alpha p} |(D_{m_l} - D_{m_{l-1}}) * f(y)|^p |y|^{\beta p} dy \right)^{1/p}.$$

Отсюда находим, что

$$\begin{aligned} \|\widehat{f}\|_{K(\alpha-\beta, p', q)} &= \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} \left(m_l^{(\alpha-\beta)p'} \int_{m_{l-1}}^{m_l} |\widehat{f}(x)|^{p'} dx \right)^{q/p'} \right)^{1/q} \\ &\leq C_1 \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} \left(\int_{\mathbb{R}_+} |m_l^\alpha (D_{m_l} - D_{m_{l-1}}) * f(y)|^p |y|^{\beta p} dy \right)^{q/p} \right)^{1/q} \\ &= C_1 \|f\|_{\Lambda(\alpha, p, q, \beta)}. \end{aligned}$$

2) Докажем, что при выполнении условий теоремы

$$(D_{m_{l+1}} - D_{m_l}) * \widehat{f} = \widehat{X_{S_l} f}, \quad S_l = [m_l, m_{l+1}), \quad l \in \mathbb{Z}. \quad (4.10)$$

Пусть $f = \varphi \in D$; тогда согласно [6; § 6.2] $\widehat{\varphi} \in D$ и по теореме 6.2.2 из [6; § 6.2]

$$(\widehat{\varphi})\widehat{}(x) = (\widehat{\varphi})\widehat{}(x) = \varphi(x)$$

во всех точках $x \in \mathbb{R}_+$. С учетом леммы 1 получаем

$$((D_{m_{l+1}} - D_{m_l}) * \widehat{\varphi})\widehat{} = X_{[m_l, m_{l+1})}\varphi,$$

откуда следует (4.10) для $f = \varphi \in D$. Так как D плотно в $L^p(\mathbb{R}_+)$ и мультипликативное преобразование Фурье ограничено, как оператор из этого пространства в $L^{p'}(\mathbb{R}_+)$, то (4.10) верно для всех $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$. Имеем в силу леммы 5 и (4.10)

$$\begin{aligned} \|\widehat{f}\|_{\Lambda(\alpha, p', q, -\beta)} &= \|\widehat{f}\|_{p', w_{-\beta p'}} + \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} \left(\int_{\mathbb{R}_+} |m_l^\alpha (D_{m_l} - D_{m_{l-1}}) * \widehat{f}(x)|^{p'} |x|^{-\beta p'} dx \right)^{q/p'} \right)^{1/q} \\ &\leq C_2 \left(\|f\|_{p, w_{\beta p}} + \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} \left(\int_{\mathbb{R}_+} |m_l^\alpha X_{[m_{l-1}, m_l)} f(y)|^p |y|^{\beta p} dy \right)^{q/p} \right)^{1/q} \right) \\ &\leq C_4 \left(\|f\|_{p, w_{\beta p}} + \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} \|m_l^{\alpha+\beta} X_{[m_{l-1}, m_l)} f\|_p^q \right)^{1/q} \right) \\ &= C_4 (\|f\|_{p, w_{\beta p}} + \|f\|_{K(\alpha+\beta, p, q)}). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 3. 1) Если $f \in \Lambda(\alpha, p', p, \alpha)$, где $1 \leq p \leq 2$, $\alpha \in [0, 1 - 1/p]$, то

$$\widehat{f} \in L^p(\mathbb{R}_+).$$

2) Если $f \in L^p_{w_{\beta p}}(\mathbb{R}_+)$, $1 \leq p \leq 2$ и $\beta \in [0, 1 - 1/p]$, то

$$\widehat{f} \in \Lambda(0, p', p, -\beta).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как отмечено во введении, $K(0, p, p) = L^p(\mathbb{R}_+)$ и $K(\beta, p, p) = L^p_{w_{\beta p}}(\mathbb{R}_+)$, откуда с помощью теоремы 4 следуют оба утверждения следствия.

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть $\alpha \in [0, 1 - 1/p]$, $1 \leq p \leq 2$. Тогда для $f \in L^p_{w_{\alpha p}}$ верно включение $\widehat{f} \in K(-\alpha, p', 2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко видеть, что при $l \rightarrow +\infty$

$$m_l^{-1} \int_0^{m_l} |f(t)| dt \leq m_l^{-1} \|f\|_{p, w_{\alpha p}} \left(\int_0^{m_l} |t|^{-\alpha p'} dx \right)^{1-1/p} = O(m_l^{-1/p-\alpha}) = o(1)$$

и первое условие леммы 7 выполнено. Оценим

$$\begin{aligned} \|f\|_{\Lambda(0, p, 2, \alpha)} &= \|f\|_{p, w_{\alpha p}} + \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} \|D_{m_l} - D_{m_{l+1}}\| * f \|_{p, w_{\alpha p}}^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \|f\|_{p, w_{\alpha p}} + \left\| \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} |D_{m_l} - D_{m_{l+1}}| * f \right)^2 \right\|_{p, w_{\alpha p}}^{1/2} \end{aligned}$$

в силу обобщенного неравенства Минковского (см. [15]), поэтому по лемме 7 имеем неравенство $\|f\|_{\Lambda(0, p, 2, \alpha)} \leq C_1 \|f\|_{p, w_{\alpha p}}$ и по теореме 4 для $f \in \Lambda(0, p, 2, \alpha)$ выполнено $\widehat{f} \in K(-\alpha, p', 2)$. Следствие доказано.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $1 \leq p \leq 2$, $0 < q < \infty$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

1) Если $p' \leq r < \infty$, $\gamma \in [0, 1/r]$ и $f \in K(\alpha + \gamma, p, q) \cap L^r_{w_{\gamma r'}}$, то

$$\widehat{f} \in \Lambda\left(\alpha - \frac{1}{p'} + \frac{1}{r}, r, q, -\gamma\right).$$

2) Если $1 \leq r \leq p'$, $\gamma \in [0, 1/p']$ и $f \in \Lambda(\alpha, p, q, \gamma)$, то

$$\widehat{f} \in K\left(\alpha + \frac{1}{p'} - \frac{1}{r'} - \gamma, r, q\right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Из условия $f \in L^r_{w_{\gamma r'}}$ и леммы 6 следует, что $\widehat{f}$ корректно определено. Используя равенство (4.10) и неравенство Гёльдера, имеем

$$\begin{aligned} \|\widehat{f}\|_{\Lambda(\alpha - 1/p' + 1/r, r, q, -\gamma)} \\ = \|\widehat{f}\|_{r, w_{-\gamma r}} + \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} \|m_l^{\alpha - 1/p' + 1/r} (D_{m_l} - D_{m_{l-1}}) * \widehat{f}\|_{r, w_{-\gamma r}}^q \right)^{1/q} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C_1 \|f\|_{r', w_{\gamma r'}} + C_1 \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} m_l^{q(\alpha-1/p'+1/r)} \|X_{[m_{l-1}, m_l]} f\|_{r', w_{\gamma r'}}^q \right)^{1/q} \\
&= C_1 \|f\|_{r', w_{\gamma r'}} + C_1 \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} m_l^{q(\alpha-1/p'+1/r)} \left(\int_{m_{l-1}}^{m_l} |f(x)|^{r'} m_l^{\gamma r'} dx \right)^{q/r'} \right)^{1/q} \\
&\leq C_2 \|f\|_{r', w_{\gamma r'}} \\
&\quad + C_2 \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} m_l^{q(\alpha-1/p'+1/r)} \left(\int_{m_{l-1}}^{m_l} |f(x)|^p m_l^{\gamma p} dx \right)^{q/p} m_l^{q(1/r'-1/p)} \right)^{1/q} \\
&\leq C_2 (\|f\|_{r', w_{\gamma r'}} + \|f\|_{K(\alpha+\gamma, p, q)}).
\end{aligned}$$

2) Так как $f \in \Lambda(\alpha, p, q, \gamma) \subset L_{w_{\gamma p}}^p(\mathbb{R}_+)$, то по лемме 5 $\widehat{f}$ корректно определено. Используя (4.10) и неравенство Гёльдера, получаем

$$\begin{aligned}
&\|\widehat{f}\|_{K(\alpha+1/p'-1/r'-\gamma, r, q)} \\
&= \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} m_l^{q(\alpha+1/p'-1/r')} \left(\int_{m_{l-1}}^{m_l} |\widehat{f}(x)|^r |x|^{-\gamma r} dx \right)^{q/r} \right)^{1/q} \\
&\leq C_3 \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} m_l^{q(\alpha+1/p'-1/r')} \left(\int_{m_{l-1}}^{m_l} |\widehat{f}(x)|^{p'} |x|^{-\gamma p'} dx \right)^{q/p'} m_l^{q(1/r-1/p')} \right)^{1/q} \\
&\leq C_4 \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} m_l^{q\alpha} \left(\int_{\mathbb{R}_+} |(D_{m_l} - D_{m_{l-1}}) * f(x)|^p |x|_{\mathbf{P}}^{\gamma p} dx \right)^{q/p} \right)^{1/q} \\
&\leq C_4 \|f\|_{\Lambda(\alpha, p, q, \gamma)}.
\end{aligned}$$

Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] М. Dyachenko, E. Liflyand, S. Tikhonov, “Uniform convergence and integrability of Fourier integrals”, *J. Math. Anal. Appl.*, **372**:1 (2010), 328–338.
- [2] G. Sampson, G. Tuy, “Fourier transforms and their Lipschitz classes”, *Pacific J. Math.*, **75**:2 (1978), 519–537.
- [3] F. Moricz, “Best possible sufficient conditions for the Fourier transform to satisfy Lipschitz or Zygmund condition”, *Studia Math.*, **199**:2 (2010), 199–205.
- [4] E. Liflyand, S. Tikhonov, “Extended solution of Boas’ conjecture on Fourier transforms”, *C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. I.*, **346**:21–22 (2008), 1137–1142.
- [5] С. С. Волосивец, Б. И. Голубов, “Весовая интегрируемость мультипликативных преобразований Фурье”, *Теория функций и дифференциальные уравнения*, Тр. МИАН, **269**, МАИК, М., 2010, 71–81.
- [6] Б. И. Голубов, А. В. Ефимов, В. А. Скворцов, *Ряды и преобразования Уолша. Теория и применения*, Наука, М., 1987.
- [7] C. W. Onneweer, “Generalized Lipschitz spaces and Herz spaces on certain totally disconnected groups”, *Martingale Theory in Harmonic Analysis and Banach Spaces*, Lecture Notes in Math., **939**, Springer-Verlag, Berlin, 1982, 106–121.
- [8] B. I. Golubov, S. S. Volosivets, “On the integrability and uniform convergence of multiplicative Fourier transforms”, *Georgian Math. J.*, **16**:3 (2009), 533–546.

- [9] Г. Г. Харди, Дж. Е. Литтлвуд, Г. Поля, *Неравенства*, ИЛ, М., 1948.
- [10] J. S. Bradley, “Hardy inequalities with mixed norms”, *Canad. Math. Bull.*, **21**:4 (1978), 405–408.
- [11] E. M. Stein, “Interpolation of linear operators”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **83** (1956), 482–492.
- [12] C. W. Onneweer, “The Fourier transform of Herz spaces on certain groups”, *Monatsch. Math.*, **97**:4 (1984), 297–310.
- [13] S. S. Volosivets, “Fourier transforms and generalized Lipschitz classes in uniform metric”, *J. Math. Anal. Appl.*, **383**:2 (2011), 344–352.
- [14] С. С. Волосивец, “О модифицированных мультипликативных интеграле и производной произвольного порядка на полуоси”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **70**:2 (2006), 3–24.
- [15] S. Fridli, “On the rate of convergence of Cesaro means of Walsh-Fourier series”, *J. Approx. Theory*, **76**:1 (1994), 31–53.

С. С. Волосивец

Саратовский государственный университет

им. Н. Г. Чернышевского

E-mail: VolosivetsSS@mail.ru

Поступило

27.09.2014

Б. И. Голубов

Московский физико-технический институт

(государственный университет), г. Долгопрудный

Московской обл.

E-mail: golubov@mail.mipt.ru