Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. В. Осипов, Дискретная группа Гейзенберга и ее группа автоморфизмов, *Матем. заметки*, 2015, том 98, выпуск 1, 152–155

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10694>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 13:43:17

Дискретная группа Гейзенберга и ее группа автоморфизмов

Д. В. Осипов

В этой заметке мы даем более простое и короткое доказательство утверждения, полученного первоначально Каном в [1], что группа автоморфизмов дискретной группы Гейзенберга $\text{Heis}(3, \mathbb{Z})$ изоморфна группе $(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) \rtimes \text{GL}(2, \mathbb{Z})$. Предлагаемый метод построения этого изоморфизма дает гораздо более прозрачную картину структуры группы автоморфизмов группы $\text{Heis}(3, \mathbb{Z})$.

Рассмотрим дискретную группу Гейзенберга $G = \text{Heis}(3, \mathbb{Z})$, которая есть группа матриц вида

$$\begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где элементы a, b, c принадлежат группе $\mathbb{Z}$. Мы можем рассматривать группу G также как множество всех целочисленных троек, снабженное групповым законом

$$(a_1, b_1, c_1)(a_2, b_2, c_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2 + a_1 b_2). \quad (1)$$

Ясно, что выполнено равенство $[(1, 0, 0), (0, 1, 0)] = (0, 0, 1)$, и что группа G порождена элементами $(1, 0, 0)$ и $(0, 1, 0)$.

Пусть $\text{Aut}(G)$ – группа автоморфизмов группы G . Отправным пунктом для написания этой заметки была конструкция гомоморфизма групп: $\mathbb{Z} \rightarrow \text{Aut}(G)$, который был построен в [2; § 5] и задается формулой

$$R_d((a, b, c)) = \left(a + db, b, c + \frac{b(b-1)d}{2} \right), \quad (2)$$

где R_d – автоморфизм группы G , индуцированный элементом $d \in \mathbb{Z}$. Формула (2) была получена в [2] в результате некоторого вычисления автоморфизмов, которые являются аналогами “вращений петли” в теории групп петель. Однако то, что формула (2) определяет гомоморфизм из группы $\mathbb{Z}$ в группу $\text{Aut}(G)$, является также легким прямым следствием формул (1) и (2).

Для группы G имеем следующую точную последовательность групп:

$$1 \rightarrow C \rightarrow G \xrightarrow{\lambda} H \oplus P \rightarrow 1, \quad (3)$$

где 1 – тривиальная группа, группа $C = \{(0, 0, c) \mid c \in \mathbb{Z}\} \simeq \mathbb{Z}$ – это центр группы G , и группы $H = \{(a, 0, 0) \mid a \in \mathbb{Z}\} \simeq \mathbb{Z}$, $P = \{(0, b, 0) \mid b \in \mathbb{Z}\} \simeq \mathbb{Z}$.

Из точной последовательности (3) получаем следующую последовательность:

$$1 \rightarrow \text{Inn}(G) \xrightarrow{\theta} \text{Aut}(G) \xrightarrow{\vartheta} \text{GL}(2, \mathbb{Z}), \quad (4)$$

где группа внутренних автоморфизмов $\text{Inn}(G) \simeq G/C \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, и гомоморфизм ϑ – это гомоморфизм $\text{Aut}(G) \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})$, который индуцирован гомоморфизмом λ из точной последовательности (3). Ясно, что выполнено $\text{Im}(\theta) \subset \text{Ker}(\vartheta)$.

Мы утверждаем, что последовательность (4) точна в члене $\text{Aut}(G)$. В самом деле, достаточно показать, что выполнено $\text{Ker}(\vartheta) \subset \text{Im}(\theta)$. Рассмотрим любой элемент $\omega \in \text{Ker}(\vartheta)$.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 13-01-12420 офи_м2, 14-01-00178 а).

Тогда имеем равенства: $\omega((1, 0, 0)) = (1, 0, c_1)$ и $\omega((0, 1, 0)) = (0, 1, c_2)$ для некоторых целых чисел c_1 и c_2 . Прямыми вычислениями получаем равенства

$$(c_2, -c_1, 0)(1, 0, 0) = (1, 0, c_1)(c_2, -c_1, 0), \quad (c_2, -c_1, 0)(0, 1, 0) = (0, 1, c_2)(c_2, -c_1, 0).$$

Так как элементы $(1, 0, 0)$ и $(0, 1, 0)$ порождают группу G , то мы получаем, что внутренний автоморфизм, определенный элементом $(c_2, -c_1, 0)$, совпадает с автоморфизмом ω .

Мы утверждаем также, что гомоморфизм ϑ из последовательности (4) сюръективен. В самом деле, по формуле (2) имеем гомоморфизм из группы $\mathbb{Z}$ в группу $\text{Aut}(G)$. Легко видеть, что этот гомоморфизм есть сечение гомоморфизма ϑ над подгруппой $\left\{\begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}_{d \in \mathbb{Z}}$ группы $\text{GL}(2, \mathbb{Z})$. По формуле (2) действие матриц из этой подгруппы на элементы группы G задается следующим образом:

$$\begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (a, b, c) = \left(a + db, b, c + \frac{b(b-1)d}{2}\right). \quad (5)$$

Симметрично к формуле (5) мы можем написать следующую формулу:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ d & 1 \end{pmatrix} (a, b, c) = \left(a, da + b, c + \frac{a(a-1)d}{2}\right). \quad (6)$$

При помощи легкого прямого вычисления получаем, что формула (6) определяет корректный автоморфизм группы G . Этот автоморфизм зависит от элемента $d \in \mathbb{Z}$ и задает гомоморфизм из подгруппы $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ d & 1 \end{pmatrix}\right\}_{d \in \mathbb{Z}}$ группы $\text{GL}(2, \mathbb{Z})$ в группу $\text{Aut}(G)$. Последний гомоморфизм есть сечение гомоморфизма ϑ над этой подгруппой.

Кроме того, легко видеть, что гомоморфизм из подгруппы $\left\{\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ группы $\text{GL}(2, \mathbb{Z})$ в группу $\text{Aut}(G)$, который задан формулой

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (a, b, c) = (-a, b, -c - b), \quad (7)$$

определяет сечение гомоморфизма ϑ над этой подгруппой.

Классический результат (доказательство которого можно найти, например, в книге [3; Appendix A]) утверждает, что группа $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$ может быть задана следующим способом образующими и соотношениями:

$$\langle \rho, \tau \mid \rho\tau\rho = \tau\rho\tau, (\rho\tau\rho)^4 = 1 \rangle,$$

где элемент ρ соответствует матрице $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ и элемент τ соответствует матрице $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Группа $\text{GL}(2, \mathbb{Z})$ порождена элементами группы $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$ и матрицей $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Поэтому группа $\text{GL}(2, \mathbb{Z})$ может быть задана следующим способом образующими и соотношениями:

$$\langle \rho, \tau, \kappa \mid \rho\tau\rho = \tau\rho\tau, (\rho\tau\rho)^4 = 1, \kappa\tau\kappa^{-1} = \tau^{-1}, \kappa\rho\kappa^{-1} = \rho^{-1}, \kappa^2 = 1 \rangle, \quad (8)$$

где элемент κ соответствует матрице D . Таким образом, мы получаем, что гомоморфизм ϑ сюръективен.

Отметим, что группа $\text{Aut}(G)$ содержит отмеченную подгруппу $\text{Aut}^+(G) = \vartheta^{-1}(\text{SL}(2, \mathbb{Z}))$ индекса 2. Так как для любого элемента $\omega \in \text{Aut}(G)$ выполнено

$$\omega((0, 0, 1)) = \omega([(1, 0, 0), (0, 1, 0)]) = [\omega(1, 0, 0), \omega(0, 1, 0)] = (0, 0, \det(\vartheta(\omega))),$$

то получаем, что группа $\text{Aut}^+(G)$ состоит из элементов ω группы $\text{Aut}(G)$ таких, что $\omega((0, 0, 1)) = (0, 0, 1)$. Другими словами, группа $\text{Aut}^+(G)$ состоит из автоморфизмов группы G , которые действуют тождественно на центре группы G .

ТЕОРЕМА. *Частичные сечения гомоморфизма ϑ , заданные формулами (5)–(7), склеиваются вместе и определяют сечение гомоморфизма ϑ над всей группой $\text{GL}(2, \mathbb{Z})$. Отсюда получаем, что группа $\text{Aut}(G) \simeq (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) \rtimes \text{GL}(2, \mathbb{Z})$, где действие группы $\text{GL}(2, \mathbb{Z})$ на группе $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ (задаваемое внутренними автоморфизмами в группе $\text{Aut}(G)$) есть естественное матричное действие. Кроме того, выполнено $\text{Aut}^+(G) \simeq (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) \rtimes \text{SL}(2, \mathbb{Z})$.*

Доказательство. Из рассуждений выше видим, что достаточно проверить, что автоморфизмы группы G , заданные матрицами $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ и $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (при помощи формул (5)–(7)) удовлетворяют соотношениям из формулы (8). Так как группа G порождена элементами $(1, 0, 0)$ и $(0, 1, 0)$, достаточно проверить эти соотношения между автоморфизмами после применения к этим элементам. Имеем

$$\begin{aligned} ABA(1, 0, 0) &= AB(1, 0, 0) = A(1, -1, 0) = (0, -1, 1), \\ BAB(1, 0, 0) &= BA(1, -1, 0) = B(0, -1, 1) = (0, -1, 1). \end{aligned}$$

Кроме того, имеем

$$\begin{aligned} ABA(0, 1, 0) &= AB(1, 1, 0) = A(1, 0, 0) = (1, 0, 0), \\ BAB(0, 1, 0) &= BA(0, 1, 0) = B(1, 1, 0) = (1, 0, 0). \end{aligned}$$

Таким образом, мы видим, что автоморфизм группы G , заданный композицией ABA , совпадает с автоморфизмом группы G , заданным композицией BAB . Проверим теперь, что композиция $(ABA)^4$ задает тождественный автоморфизм группы G . В самом деле, мы уже проверили, что $ABA(1, 0, 0) = (0, -1, 1) = (0, 1, 0)^{-1}$. Поэтому, используя снова вышесделанные вычисления, имеем

$$(ABA)^2(1, 0, 0) = ABA((0, 1, 0)^{-1}) = (ABA(0, 1, 0))^{-1} = (1, 0, 0)^{-1}.$$

Отсюда получаем

$$(ABA)^4(1, 0, 0) = (ABA)^2((1, 0, 0)^{-1}) = (1, 0, 0).$$

Аналогично имеем

$$(ABA)^2(0, 1, 0) = ABA(1, 0, 0) = (0, 1, 0)^{-1}$$

и отсюда

$$(ABA)^4(0, 1, 0) = (ABA)^2((0, 1, 0)^{-1}) = (0, 1, 0).$$

Кроме того, вычислим

$$\begin{aligned} DAD^{-1}(0, 1, 0) &= DA(0, 1, -1) = D(1, 1, -1) = (-1, 1, 0) = A^{-1}(0, 1, 0), \\ DAD^{-1}(1, 0, 0) &= DA(-1, 0, 0) = D(-1, 0, 0) = (1, 0, 0) = A^{-1}(1, 0, 0), \\ DBD^{-1}(0, 1, 0) &= DB(0, 1, -1) = D(0, 1, -1) = (0, 1, 0) = B^{-1}(0, 1, 0), \\ DBD^{-1}(1, 0, 0) &= DB(-1, 0, 0) = D(-1, 1, -1) = (1, 1, 0) = B^{-1}(1, 0, 0). \end{aligned}$$

Непосредственно из формулы (7) получаем также, что автоморфизм группы G , заданный композицией D^2 , является тождественным автоморфизмом. Теорема доказана.

Замечание. Кан построил в [1] сечение гомоморфизма ϑ над всей группой $\mathrm{GL}(2, \mathbb{Z})$ при помощи прямых вычислений в группе $\mathrm{Aut}(G)$ (в отличие от нашего подхода, который произошел из конструкции явного гомоморфизма, заданного формулой (2), и этот гомоморфизм был получен в [2; § 5] из аналога “вращений петли”). Отметим, что сечение $\mathrm{GL}(2, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathrm{Aut}(G)$, построенное Каном, не совпадает с сечением из теоремы.

Пусть α_1 и α_2 – два сечения гомоморфизма ϑ . Определим $\varphi(g) = \alpha_2(g)\alpha_1(g)^{-1} \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ для любого элемента $g \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{Z})$. Тогда имеем $\varphi(g_1 g_2) = \varphi(g_1) + g_1 \cdot \varphi(g_2)$ для любых элементов $g_1, g_2 \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{Z})$, т.е. отображение $\varphi: \mathrm{GL}(2, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ является 1-коциклом. Обратно, для любого сечения α гомоморфизма ϑ и для любого 1-коцикла $\varphi: \mathrm{GL}(2, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ имеем, что отображение $(\varphi \cdot \alpha): \mathrm{GL}(2, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathrm{Aut}(G)$ является гомоморфизмом, который есть сечение гомоморфизма ϑ . Используя последовательность Майера–Вьеториса для группы $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_4 *_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{Z}_6$, заданной как амальгамированное свободное произведение, Кан вычислил в [1], что $H^1(\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}), \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) = 0$ для естественного матричного действия

группы $SL(2, \mathbb{Z})$ на группе $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Отсюда, при помощи спектральной последовательности Линдона–Хохшильда–Серра, примененной к вложению $SL(2, \mathbb{Z}) \hookrightarrow GL(2, \mathbb{Z})$, непосредственно получаем, что $H^1(GL(2, \mathbb{Z}), \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) = 0$. Поэтому отображение φ является 1-кограницей, т. е. имеется элемент $a \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ такой, что $\varphi(g) = ga - a$ для любого элемента $g \in GL(2, \mathbb{Z})$. Отсюда получаем, что группа 1-коциклов группы $GL(2, \mathbb{Z})$ со значениями в группе $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ изоморфна группе $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Таким образом, множество всех сечений гомоморфизма ϑ есть главное однородное пространство над группой $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] P. Kahn, *Automorphisms of the discrete Heisenberg groups*, Preprint, 2005, <http://www.math.cornell.edu/m/People/Faculty/kahn>. [2] Д. В. Осипов, А. Н. Паршин, Тр. МИАН, **292**, 2016 (в печати). [3] C. Kassel, V. Turaev, *Braid Groups*, Grad. Texts in Math., **247**, Springer, New-York, 2008.

Д. В. Осипов

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: d_osipov@mi.ras.ru

Поступило

02.02.2015