Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. Б. Сабитов, Знакоопределенность решения неоднородного уравнения смешанного эллипτικο-гиперболического типа высокого порядка, *Матем. заметки*, 2016, том 100, выпуск 3, 433–440

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10697>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 13:24:48

Знакоопределенность решения неоднородного уравнения смешанного эллипτικο-гиперболического типа высокого порядка

К. Б. Сабитов

Для неоднородного уравнения смешанного эллипτικο-гиперболического типа высокого порядка установлена знакоопределенность решения в зависимости от знака правой части.

Библиография: 15 названий.

Ключевые слова: неоднородное уравнение смешанного типа, оператор Лаврентьева–Бицадзе, высокий порядок, полигармоническое уравнение.

DOI: 10.4213/mzm10697

1. Постановка задачи

Рассмотрим уравнение смешанного типа высокого порядка

$$L^m u(x, y) = f(x, y), \quad m \in \mathbb{N}, \quad (1.1)$$

где

$$L^1 v = Lv = (\operatorname{sgn} y) v_{xx} + v_{yy} = \begin{cases} \Delta v = v_{xx} + v_{yy}, & y > 0, \\ \square v = -v_{xx} + v_{yy}, & y < 0, \end{cases}$$

$$f(x, y) = \begin{cases} f_1(x, y), & y > 0, \\ f_2(x, y), & y < 0, \end{cases}$$

в области D , ограниченной кусочно-гладкой кривой Γ , лежащей в полуплоскости $y > 0$ с концами в точках $A(0, 0)$ и $B(l, 0)$, $l > 0$, и характеристиками AC : $x + y = 0$, и CB : $x - y = l$, уравнения (1.1).

Рассмотрим следующую краевую задачу, которая является аналогом задачи Трикоми для уравнений смешанного типа высоких порядков.

Задача Трикоми–Жегалова. Найти в области D функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$u(x, y) \in C^{2m}(D_+ \cup D_-) \cap C^{2m-1}(D) \cap C^{2m-2}(\overline{D}), \quad (1.2)$$

$$L^m u(x, y) \equiv f(x, y), \quad (x, y) \in D_+ \cup D_-, \quad (1.3)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке фонда РФФИ-Поволжье (грант № 14-01-97003).

$$L^k u(x, y)|_{\Gamma} = \varphi_k(x, y), \quad (x, y) \in \bar{\Gamma}, \quad (1.4)$$

$$L^k u(x, y)|_{AC} = \psi_k(x), \quad 0 \leq x \leq \frac{l}{2}, \quad (1.5)$$

где $f(x, y)$, $\varphi_k(x, y)$, $\psi_k(x)$ – заданные достаточно гладкие функции, $\varphi_k(0, 0) = \psi_k(0)$, $k = 0, \dots, m-1$,

$$D_+ = D \cap y > 0, \quad D_- = D \cap y < 0.$$

Отметим, что на важность изучения такого рода задач отмечалась Бицадзе [1; с. 236]. Первая попытка решения задачи, аналогичной поставленной при $m = 2$, была сделана Агишевым [2]. Для произвольных $m \geq 2$ задача (1.2)–(1.5) при $f(x, y) = 0$ исследована Жегаловым [3], [4], т.е. им были установлены теоремы единственности и существования поставленной задачи.

В данной работе ставится задача качественного характера о том, что если правая часть уравнения (1.1) $f(x, y) > 0$ на $D_+ \cup D_-$, то как ведет себя функция $u(x, y)$ в D , т.е. требуется доказать, что $u(x, y) \neq 0$ на $D_+ \cup D_-$.

Поскольку оператор $L^m u$ в области D_+ совпадает с полигармоническим $\Delta^m u$, естественно возникает вопрос о знакоопределенности решения неоднородного полигармонического уравнения в зависимости от знака правой части. В связи с этим в данной работе исследован этот вопрос и дан полный ответ на поставленную задачу, т.е. показано, что если в задаче (1.2)–(1.5) функции $\varphi_k(x, y) \equiv 0$, $\psi_k(x) \equiv 0$ при $k = 0, \dots, m-1$ и $f_1(x, y) \geq 0$ (≤ 0) и $f_1(x, y) \not\equiv 0$ на D_+ , $f_2(x, y) > 0$ (< 0) на D_- , то $u(x, y) > 0$ (< 0) на $D_+ \cup D_-$, когда m – четное натуральное число; $u(x, y) < 0$ (> 0) на $D_+ \cup D_-$, когда m – нечетное натуральное число.

Отметим, что в работах [5]–[9] для эллиптических уравнений высокого порядка, в частности, для полигармонического уравнения, установлены оценки решения задачи Дирихле через граничные функции или правую часть. Эти оценки названы принципом максимума, из которых не следует классический принцип максимума (максимум решения не может достигаться внутри области); следовательно, и знакоопределенность решения.

2. О положительности решения неоднородного полигармонического уравнения

2.1. Рассмотрим в начале бигармоническое уравнение

$$\Delta^2 u(x) = \Delta(\Delta u) = f(x) \quad (2.1)$$

в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, с достаточно гладкой границей Γ , и задачу: найти решение $u(x)$ уравнения (2.1) в области Ω из класса

$$u(x) \in C^4(\Omega) \cap C^2(\bar{\Omega}), \quad (2.2)$$

удовлетворяющего граничным условиям

$$u(x) = 0, \quad x \in \Gamma, \quad (2.3)$$

$$\Delta u(x) = 0, \quad x \in \Gamma. \quad (2.4)$$

Отметим, что уравнение (2.1) играет большую роль в теории упругости, особенно в таких ее разделах, как плоская задача и изгиб тонких пластинок [10; с. 394], [11;

с. 108]. В работе [12; гл. XII] вариационными методами разработана теория граничных задач для полигармонического уравнения.

В этом разделе ставится задача о том, что если правая часть уравнения (2.1) $f(x) > 0$ в области Ω , то требуется доказать, что $u(x) > 0$ в Ω .

Ранее мне было сообщено А. О. Бибаян, что в случае когда область Ω является кругом или прямоугольником и $f(x) \equiv 1$ такая задача решается положительно.

В дальнейшем рассмотрим задачу (2.1)–(2.4) и докажем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. *Если выполнены условия (2.1)–(2.4) и $f(x) > 0$ (< 0) в Ω , то $u(x) > 0$ (< 0) в Ω .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Задача (2.1)–(2.4) равносильна задаче Дирихле для системы

$$\Delta v = f, \quad v|_{\Gamma} = 0, \quad (2.5)$$

$$\Delta u = v, \quad u|_{\Gamma} = 0. \quad (2.6)$$

Из (2.5) видно, что функция $v(x)$ является решением уравнения Пуассона, для которого справедливы следующие утверждения.

ЛЕММА 1. *Пусть $v(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ и $\Delta v(x) \equiv f(x)$ в Ω . Тогда если $f(x) > 0$ (< 0) в Ω , то функция $v(x)$ не может иметь точек локального максимума (минимума) внутри области Ω и наибольшее (наименьшее) значение функции $v(x)$ по $\bar{\Omega}$ достигается только на границе Γ области Ω .*

СЛЕДСТВИЕ 1. *Пусть выполнены условия леммы 1 и $f(x) > 0$ (< 0) в Ω . Тогда если $v(x) \leq 0$ (≥ 0) на Γ , то $v(x) < 0$ (> 0) в Ω .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что существует точка $x_1 \in \Omega$ такая, что $v(x_1) > 0$. Тогда по лемме 1 $\max_{\bar{\Omega}} v(x) = v(x_0) > 0$ достигается только на границе Γ , т.е. $x_0 \in \Gamma$, что противоречит условию $v(x) \leq 0$ на Γ . Следовательно, $v(x) \leq 0$ в Ω и $v(x_0) = 0$, $x_0 \notin \Omega$. Отсюда следует, что $v(x) < v(x_0) = 0$ в D .

В силу этих утверждений $\max_{\bar{\Omega}} v(x)$ достигается только на границе Γ . Функция $v(x) = 0$ на Γ ; следовательно, $v(x) < 0$ в Ω . Функция $u(x)$ в свою очередь является решением уравнения Пуассона $\Delta u = v(x)$, у которого правая часть $v(x) < 0$ в Ω . Тогда наименьшее по $\bar{\Omega}$ значение функции $u(x)$ не может достигать внутри области Ω , т.е. это значение принимается только на Γ . В силу (2.6) функция $u(x) = 0$ на Γ ; следовательно, $u(x) > 0$ в Ω .

СЛЕДСТВИЕ 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда $\min_{\bar{\Omega}} u(x)$ (соответственно $\max_{\bar{\Omega}} u(x)$) достигается только на границе Γ области Ω .*

Теперь возникает вопрос: если $f(x) \geq 0$ в Ω и $f(x) \not\equiv 0$ в Ω , то останется ли справедливым утверждение теоремы 1?

ЛЕММА 2. *Пусть $v(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, $\Delta v \equiv f(x)$ в Ω и $f(x) \geq 0$ (≤ 0) в Ω . Тогда наибольшее (наименьшее) значение функции $v(x)$ по $\bar{\Omega}$ не может достигаться внутри области Ω , т.е. наибольшее (наименьшее) значение достигается только на границе Γ области Ω .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем следуя [13; с. 211], [14; с. 126]. Пусть $\max_{\Gamma} v(x) = m$, $\max_{\bar{\Omega}} v(x) = M$. Предположим, что функция $v(x)$ внутри области Ω принимает

значения, большие, чем m . Тогда существует точка $x_0 \in \Omega$ такая, что $v(x_0) = M$, $M > m$. Введем в области Ω вспомогательную функцию

$$z(x) = v(x) + \frac{M - m}{2d^2} r^2, \quad (2.7)$$

где r – расстояние между точками x_0 и x , d – диаметр области Ω . Заметим, что $z(x_0) = v(x_0) = M$ и $z|_{\Gamma} < M$. Следовательно, функция $z(x)$ во внутренней точке $\xi \in \Omega$ принимает наибольшее по $\bar{\Omega}$ значение. Тогда по необходимому условию экстремума

$$\Delta z(\xi) \leq 0. \quad (2.8)$$

С другой стороны, на основании (2.7) имеем

$$\Delta z = \Delta v + \frac{M - m}{2d^2} \Delta r^2 = f(x) + \frac{M - m}{d^2} n > 0,$$

что при $x = \xi$ противоречит неравенству (2.8).

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть выполнены условия леммы 2 и $v(x) \leq 0$ (≥ 0) на Γ . Тогда $v(x) < 0$ (> 0) в Ω .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 2 наибольшее по $\bar{\Omega}$ значение функции $v(x)$ достигается только на Γ , а по условию $v(x) \leq 0$ на Γ ; следовательно, $v(x) < 0$ в области Ω .

На основании леммы 2 $\max_{\bar{D}} v(x)$ достигается только на границе Γ области Ω . По условию $v(x) = 0$ на Γ . Тогда по следствию 3 функция $v(x) < 0$ в Ω . В силу (2.6) функция $u(x)$ является решением $\Delta u = v(x)$, где $v(x) < 0$ в Ω . Тогда на основании следствия 1 получаем, что $u(x) > 0$ в Ω .

Таким образом, нами доказана следующая

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполнены условия (2.1)–(2.4) и $f(x) \geq 0$ (≤ 0) и $f(x) \not\equiv 0$ в области Ω . Тогда $u(x) > 0$ (< 0) в Ω .

СЛЕДСТВИЕ 4 (Принцип экстремума для бигармонического уравнения). Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда $\min_{\bar{\Omega}} u(x)$ (соответственно $\max_{\bar{\Omega}} u(x)$) достигается только на границе Γ области Ω .

Пусть теперь в задаче (2.1)–(2.4) функция $f(x) \equiv 0$. В этом случае наименьшее и наибольшее значения функции $u(x)$ по Ω достигаются на Γ . Отсюда следует, что $u(x) \equiv 0$ в D , т.е. из принципа экстремума для уравнения (2.1) следует единственность решения задачи (2.1)–(2.4).

2.2. Теперь рассмотрим в указанной области Ω полигармоническое уравнение

$$\Delta^m u = f(x), \quad m \in \mathbb{N}. \quad (2.9)$$

Пусть $u(x)$ решение уравнения (2.9) из класса

$$u(x) \in C^{2m}(\Omega) \cap C^{2m-2}(\bar{\Omega}), \quad (2.10)$$

удовлетворяющее граничным условиям на Γ :

$$u = 0, \quad \Delta u = 0, \quad \dots, \quad \Delta^{m-1} u = 0. \quad (2.11)$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть выполнены условия (2.9)–(2.11) и $f(x) \geq 0$ (≤ 0) и $f(x) \neq 0$ в Ω . Тогда $u(x) < 0$ (> 0) в области Ω , если t нечетное натуральное число; $u(x) > 0$ (< 0) в Ω , если t четное натуральное число.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При произвольном $m \geq 2$ задача (2.9)–(2.11) равносильна задаче Дирихле для системы из m уравнений Пуассона:

$$\Delta v_1(x) = f(x), \quad v_1(x)|_{\Gamma} = 0, \quad (D_1)$$

$$\Delta v_2(x) = v_1(x), \quad v_2(x)|_{\Gamma} = 0, \quad (D_2)$$

$$\Delta v_3(x) = v_2(x), \quad v_3(x)|_{\Gamma} = 0, \quad (D_3)$$

$$\Delta v_4(x) = v_3(x), \quad v_4(x)|_{\Gamma} = 0, \quad (D_4)$$

.....

$$\Delta v_{m-1}(x) = v_{m-2}(x), \quad v_{m-1}(x)|_{\Gamma} = 0, \quad (D_{m-1})$$

$$\Delta u(x) = v_{m-1}(x), \quad u(x)|_{\Gamma} = 0, \quad (D_m)$$

Рассмотрим задачи (D_1) , (D_2) и применим им теорему 2. Тогда получим $v_2(x) > 0$ в Ω . Затем применив эту теорему паре задач (D_3) и (D_4) , будем иметь $v_4(x) > 0$ в Ω . Повторяя аналогичные рассуждения при m четном придем последней паре задач (D_{m-1}) и (D_m) , где $v_{m-2}(x) > 0$ в Ω . Отсюда в силу теоремы 2 следует, что $u(x) > 0$ в Ω .

Если m – нечетное число, то из последней пары задач (D_{m-2}) и (D_{m-1}) в силу теоремы 2 следует, что $v_{m-1}(x) > 0$ в Ω . Теперь применяя к задаче (D_m) следствие 3 получим, что $u(x) < 0$ в Ω .

3. Принцип экстремума для неоднородного уравнения Лаврентьева–Бицадзе

Рассмотрим уравнение смешанного типа второго порядка

$$Lv = (\operatorname{sgn} y)v_{xx} + v_{yy} = f(x, y) \quad (3.1)$$

в области D , описанной в разделе 1.

ТЕОРЕМА 4. Пусть функция $v(x, y)$ удовлетворяет условиям:

$$v(x, y) \in C^2(D_+ \cup D_-) \cap C^1(D) \cap C(\bar{D}), \quad (3.2)$$

$$Lv(x, y) \equiv f(x, y), \quad (x, y) \in D_+ \cup D_-, \quad (3.3)$$

$$v|_{AC} = v(-x, x) = 0, \quad 0 \leq x \leq \frac{l}{2}. \quad (3.4)$$

Тогда если $f_1(x, y) \geq 0$ (≤ 0) и $f_1(x, y) \not\equiv 0$ на D_+ , $f_1(x, y) \in C(D_+)$, $f_2(x, y) > 0$ (< 0) на D_- и $f_2(x, y) \in C^1(D_-)$, то $\max_{\bar{D}} v(x, y)$ (соответственно $\min_{\bar{D}} v(x, y)$) достигается на кривой $\bar{\Gamma}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $v(x, y)$ достигает глобального максимума по $\bar{D}$ в некоторой точке $Q \in \bar{D}$, т.е. $\max_{\bar{D}} v(x, y) = v(Q)$, $Q \in \bar{D}$. Надо доказать, что $Q \in \bar{\Gamma}$. В области D_+ функция $v(x, y)$ является решением уравнения Пуассона

$$v_{xx} + v_{yy} = f_1(x, y), \quad (x, y) \in D_+,$$

и поскольку $f_1(x, y) \geq 0$ в D_+ , в силу леммы 2 точка $Q \notin D_+$, т.е. $Q \in \bar{\Gamma} \cup AB$. Пусть $Q \in AB$; тогда $Q = (x_0, 0)$, $0 < x_0 < l$. В области D_- для уравнения (3.1) рассмотрим задачу Дарбу:

$$v_{xx} - v_{yy} = -f_2(x, y), \quad (x, y) \in D_-; \quad (3.5)$$

$$v(x, 0) = \tau(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad v(x, -x) = 0, \quad 0 \leq x \leq \frac{l}{2}. \quad (3.6)$$

Если $\tau(x) \in C[0, l] \cap C^2(0, l)$, $f_2(x, y) \in C^1(D_-)$, то единственное решение задачи (3.5), (3.6) определяется по формуле [15]

$$v(x, y) = \tau(x + y) - \int_0^{x+y} d\xi \int_{x+y}^{x-y} g(\xi, \eta) d\eta, \quad (3.7)$$

где

$$g(\xi, \eta) = \frac{1}{4} f_2\left(\frac{\xi + \eta}{2}, \frac{\xi - \eta}{2}\right), \quad \tau(0) = 0.$$

Из формулы (3.7) видно, что

$$\max_{D_-} v(x, y) \leq \max_{AB} \tau(x + y) = \max_{0 \leq t \leq l} \tau(t) = \tau(x_0).$$

На основании формулы (3.7) вычислим

$$v_y(x, y) = \tau'(x + y) - \int_{x+y}^{x-y} g(x + y, \eta) d\eta + \int_0^{x+y} [g(\xi, x - y) + g(\xi, x + y)] d\eta. \quad (3.8)$$

Переходя в равенстве (3.8) к пределу при $y \rightarrow 0 - 0$, найдем

$$v_y(x_0, 0 - 0) = \tau'(x_0) + 2 \int_0^{x_0} g(\xi, x_0) d\xi = 2 \int_0^{x_0} g(\xi, x_0) d\xi \geq 0. \quad (3.9)$$

С другой стороны, в силу граничного принципа экстремума для уравнения (3.1) в области D_+ имеем

$$v_y(x_0, 0 + 0) < 0,$$

что в силу (3.3) противоречит (3.9). Следовательно, точка $Q \notin AB$, и остается случай, когда $Q \in \bar{\Gamma}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Условие $f_2(x, y) > 0$ (< 0) в области D_- можно ослабить заменив на $f_2(x, y) \geq 0$ (≤ 0) в D_- и дополнительно потребовав, чтобы интеграл

$$\int_0^{x_0} f(\xi, x_0) d\xi > 0 \quad (< 0).$$

Последнее неравенство будет иметь место, если на каждой прямой $\eta = x_0 \in (0, l)$ хотя бы в одной точке $\xi = \xi_1 \in (0, x_0]$ функция $f(\xi_1, x_0) > 0$ (< 0).

Отметим, что теорема 4 при $f(x, y) = 0$ впервые была установлена Бицадзе [1; с. 212] в 1950 году.

СЛЕДСТВИЕ 5. Если выполнены условия теоремы 4 и $v(x, y) \leq 0$ (≥ 0) на Γ , то $v(x, t) \leq 0$ (≥ 0) в D .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что существует точка Q_1 из D такая, что $v(Q_1) > 0$. Тогда $\max_{\overline{D}} v(x, y) = v(Q) > 0$ и в силу теоремы 4 точка $Q \in \Gamma$, что противоречит условию $v(x, y) \leq 0$ на Γ . Следовательно, $v(x, y) \leq 0$ в D .

СЛЕДСТВИЕ 6. Пусть выполнены условия теоремы 4 и $f(x, y) \equiv 0$ на $D_+ \cup D_-$. Тогда наибольшее и наименьшее значения функции $v(x, y)$ по замкнутой области $\overline{D}$ достигаются на $\overline{\Gamma}$.

Из следствия 6 следует единственность решения задачи Трикоми для уравнения (3.1).

ТЕОРЕМА 5. Пусть выполнены условия теоремы 4 и $v(x, y) \leq 0$ (≥ 0) на Γ . Тогда $v(x, t) < 0$ (> 0) на $D_+ \cup D_-$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу следствия 5 функция $v(x, y) \leq 0$ в D . Допустим, что существует точка $M \in D_+$ такая, что $v(M) = 0$. Тогда получаем, что функция $v(x, y)$ свое наибольшее по $\overline{D}_+$ значение достигает внутри области D_+ , что противоречит лемме 2. Следовательно, $v(x, y) < 0$ в D_+ .

По условию $f_2(x, y) > 0$ на D_- , а функция $v(x, 0) = \tau(x) \leq 0$ на $[0, l]$. Из формулы (3.7) решения задачи (3.5) и (3.6) следует, что $v(x, y) < 0$ в области D_- .

4. О знакоопределенности решения

неоднородного уравнения смешанного типа высокого порядка

По аналогии с разделом 2 предварительно рассмотрим случай, когда $m = 2$. В этом случае задача (1.2)–(1.5) с нулевыми граничными условиями равносильна задаче Трикоми для системы уравнений смешанного типа второго порядка:

$$Lv = f, \quad v|_{\Gamma \cup AC} = 0, \quad (4.1)$$

$$Lu = v, \quad u|_{\Gamma \cup AC} = 0. \quad (4.2)$$

Задача (4.1) представляет собой задачу Трикоми для неоднородного уравнения Лаврентьева–Бицадзе с нулевыми граничными условиями. Если $f(x, y) \geq 0$ на $D_+ \cup D_-$, то в силу теоремы 5 функция $v(x, y) < 0$ на $D_+ \cup D_-$. Функция $u(x, y)$, в свою очередь, является решением задачи (4.2), т.е. является решением уравнения Лаврентьева–Бицадзе: $Lu = v(x, y)$, у которого правая часть $v(x, y) < 0$ на $D_+ \cup D_-$ и $u(x, y) = 0$ на $\Gamma \cup AC$. Тогда на основании теоремы 5 получаем, что $u(x, y) \geq 0$ в D и $u(x, y) > 0$ на $D_+ \cup D_-$.

При произвольном $m \geq 2$ задача (1.2)–(1.5) при $\varphi_k(x, y) \equiv 0$ и $\psi_k(x) \equiv 0$ при $k = 0, \dots, m-1$ эквивалентна задаче Трикоми для системы m уравнений Лаврентьева–Бицадзе:

$$Lv_1(x, y) = f(x, y), \quad v_1(x, y) = 0 \quad \text{на } \Gamma \cup AC, \quad (T_1)$$

$$Lv_2(x, y) = v_1(x, y), \quad v_2(x, y) = 0 \quad \text{на } \Gamma \cup AC, \quad (T_2)$$

$$\dots \dots \dots Lv_{m-2}(x, y) = v_{m-3}(x, y), \quad v_{m-2}(x, y) = 0 \quad \text{на } \Gamma \cup AC, \quad (T_{m-2})$$

$$Lv_{m-1}(x, y) = v_{m-2}(x, y), \quad v_{m-1}(x, y) = 0 \quad \text{на } \Gamma \cup AC, \quad (T_{m-1})$$

$$Lu(x, y) = v_{m-1}(x, y), \quad u(x, y) = 0 \quad \text{на } \Gamma \cup AC. \quad (T_m)$$

Рассмотрим задачи (T_1) и (T_2) и на основе приведенных выше рассуждений получим, что $v_2(x, y) > 0$ на $D_+ \cup D_-$. Рассуждая аналогично разделу 2 при четном m придем последней паре задач (T_{m-1}) и (T_m) , где $v_{m-2}(x, y) > 0$ на $D_+ \cup D_-$. Тогда в силу теоремы 5 функция $v_{m-1}(x, y) < 0$ на $D_+ \cup D_-$. Отсюда, снова применяя теорему 5, получим, что $u(x, y) > 0$ на $D_+ \cup D_-$.

При нечетном m из последней пары задач (T_{m-2}) и (T_{m-1}) следует, что выполнено $v_{m-1}(x, y) > 0$ на $D_+ \cup D_-$. Отсюда в силу теоремы 5 получим, что $u(x, y) < 0$ на $D_+ \cup D_-$.

Таким образом, нами установлено следующее основное утверждение.

ТЕОРЕМА 6. Пусть выполнены условия (1.2)–(1.4), где $\varphi_k(x, y) \equiv 0$ и $\psi_k(x) \equiv 0$, $k = 0, \dots, m-1$, и $f_1(x, y) \geq 0$ (≤ 0) и $f_1(x, y) \not\equiv 0$ на D_+ , $f_1(x, y) \in C(D_+)$; $f_2(x, y) > 0$ (< 0) на D_- и $f_2(x, y) \in C^1(D_-)$. Тогда $u(x, y) > 0$ (< 0) на $D_+ \cup D_-$ при четном m и $u(x, y) < 0$ (> 0) на $D_+ \cup D_-$ при нечетном m .

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. В. Бицадзе, *Избранные труды*, Наука, Нальчик, 2012.
- [2] Р. Я. Агишев, “К проблеме уравнений смешанного типа”, *Тр. Казанск. авиацион. ин-та*, **35:3** (1957), 3–10.
- [3] В. И. Жегалов, “Об одной краевой задаче для уравнения смешанного типа четвертого порядка”, *Изв. вузов. Матем.*, 1960, № 4, 73–78.
- [4] В. И. Жегалов, “Краевая задача для уравнения смешанного типа высшего порядка”, *Докл. АН СССР*, **136:2** (1961), 274–276.
- [5] S. Agmon, “Maximum theorems for solutions of higher order elliptic equations”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **66** (1960), 77–80.
- [6] В. Г. Мазья, Б. А. Пламеневский, “Оценки в L_p и в классах Гельдера и принцип максимума Миранда–Агмона для решений эллиптических краевых задач в областях с особыми точками на границе”, *Math. Nachr.*, **81** (1978), 25–82.
- [7] В. Г. Мазья, Б. А. Пламеневский, “О принципе максимума для бигармонического уравнения в области с коническими точками”, *Изв. вузов. Матем.*, 1981, № 2, 52–59.
- [8] J. Pipher, G. Verchota, “A maximum principle for biharmonic functions in Lipschitz and C^1 domains”, *Comment. Math. Helv.*, **68:3** (1993), 385–414.
- [9] J. Pipher, G. C. Verchota, “Maximum principles for the polyharmonic equation on Lipschitz domains”, *Potential Anal.*, **4:6** (1995), 615–636.
- [10] А. Н. Тихонов, А. А. Самарский, *Уравнения математической физики*, Наука, М., 1966.
- [11] Н. И. Muskhelishvili, *Некоторые основные задачи математической теории упругости. Основные уравнения, плоская теория упругости, кручение и изгиб*, Наука, М., 1966.
- [12] С. Л. Соболев, *Введение в теорию кубатурных формул*, Наука, М., 1974.
- [13] И. Г. Петровский, *Лекции об уравнениях с частными производными*, Гостехиздат, М.-Л., 1950.
- [14] К. Б. Сабитов, *Уравнения математической физики*, Физматлит, М., 2013.
- [15] К. Б. Сабитов, “Построение в явном виде решений задач Дарбу для телеграфного уравнения и их применение при обращении интегральных уравнений. I”, *Дифференц. уравнен.*, **26:6** (1990), 1023–1032.

К. Б. Сабитов

Институт прикладных исследований,
г. Стерлитамак
E-mail: sabitov_fmfm@mail.ru

Поступило

28.01.2015