Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. Г. Амосов, В. Ж. Сакбаев, О самосопряженных расширениях оператора Шрёдингера с вырождением на двух полупрямых и определяемых ими марковских коциклах, *Матем. заметки*, 2004, том 76, выпуск 3, 335–343

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm107>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 12:37:50

УДК 517.958

О САМОСОПРЯЖЕННЫХ РАСШИРЕНИЯХ ОПЕРАТОРА ШРЁДИНГЕРА С ВЫРОЖДЕНИЕМ НА ДВУХ ПОЛУПРЯМЫХ И ОПРЕДЕЛЯЕМЫХ ИМИ МАРКОВСКИХ КОЦИКЛАХ

Г. Г. Амосов, В. Ж. Сакбаев

Рассматривается уравнение Шрёдингера на прямой для частицы с массой, зависящей от положения частицы. Исследуется корректная постановка задачи Коши для уравнения Шрёдингера с вырожденным оператором, характеристическая форма которого обращается в нуль вне некоторого отрезка $I = [-l, l]$ на прямой $\mathbb{R}$. Показано, что такая задача порождает унитарный марковский коцикл.

Библиография: 19 названий.

Введение. В настоящей работе изучаются задачи, связанные с описанием динамики квантовых механических систем, эффективная масса которых зависит от положения в координатном пространстве. Примеры таких систем возникают в физике твердого тела при описании движения электрона в неоднородной среде (металл – полупроводник) (см. [1, гл. 9]), и при описании движения систем со связями (см. [2]). В случае, когда эффективная масса системы обращается в нуль в некоторых точках координатного (или фазового) пространства, описание динамики механической системы уравнениями классической механики становится некорректным (см. [2]). Мы осуществляем попытку описать движение таких систем с помощью уравнения Шрёдингера, гамильтониан которого не является равномерно эллиптическим оператором, а вырождается в некоторых точках координатного пространства. Мы устанавливаем, что решение такого уравнения определяет унитарный марковский коцикл в смысле определения [3]. То есть, вторичное квантование этого коцикла в бозонном пространстве Фока является марковским коциклом в смысле согласованности с естественной фильтрацией фоковского пространства (см. [4], [5] и содержащиеся там ссылки). Таким образом, из рассматриваемого примера видно, что для уравнений Шрёдингера с вырождением должно быть эффективно квантовое стохастическое исчисление.

В работе изучается корректность постановки задачи Коши для уравнения Шрёдингера с гамильтонианом, являющимся дифференциальным оператором переменного типа,

$$i \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = \mathbf{L}u(t, x), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Уравнение (1) дополнено начальным условием

$$u(+0, x) = u_0(x); \quad (2)$$

ниже будет указано, в каком смысле выполнено условие (2).

Пусть координатное пространство $\mathbb{R}$ разделено на три области $\omega_1: x < -l$, $\omega_2: x > l$ и $\Omega: x \in [-l, l]$ границами $\gamma_1: x = -l$ и $\gamma_2: x = l$, $l > 0$. Исследуем задачу (1), (2) с оператором $\mathbf{L}$, вырождающимся в областях ω_1 и ω_2 . Действие оператора $\mathbf{L}$ задается формулой

$$\mathbf{L}v = -\frac{\partial}{\partial x} \left[\epsilon(x) \frac{\partial v}{\partial x} \right] + \frac{i}{2} \left(a(x) \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial a(x)v}{\partial x} \right), \quad (3)$$

где $\epsilon(x) = \chi_l(x)$, $a(x) = a(1 - \chi_l(x))$, $a \in \mathbb{R}$; здесь $\chi_l(x)$ – характеристическая функция отрезка $[-l, l]$.

Заметим, что изучение вопросов о корректности постановки начально-краевых задач для эллиптико-параболических уравнений второго порядка проводилось в работе [6], где были указаны области задания краевых условий в зависимости от вида дифференциального оператора. Исследование задачи Коши типа (1), (2) для уравнения Шрёдингера с оператором переменного типа, вырождающимся на полупрямой, проводилось в работах [7], [8], в которых была сформулирована постановка задачи Коши и получены необходимые и достаточные условия существования и единственности ее решения.

1. Постановка задачи. Зададим максимальную область определения оператора $\mathbf{L}$, состоящую из таких функций u , что $\mathbf{L}u \in L_2(\mathbb{R})$. Область определения $D(\mathbf{L})$ оператора $\mathbf{L}$ включается в линейное пространство M функций, сужение которых на множество $\omega_l = (-\infty, -l) \cup (l, +\infty)$ принадлежит пространству $W_2^1(\omega)$, а сужение на $\Omega_l = [-l, l]$ принадлежит пространству $W_2^2(\Omega_l)$ (см. [9, гл. 3]). Тогда функции из области определения оператора $\mathbf{L}$ и их первые производные имеют (см. [9, гл. 3]) следы $u(-l \pm 0)$, $u(l \pm 0)$, $u'(-l - 0)$, $u'(l - 0)$ на границе $\gamma_+ = \{-l, l\}$ областей Ω_l и ω_l .

Укажем такое линейное многообразие $M' \subset M$, что для любого $u \in M'$ выполняется включение $\mathbf{L}u \in D'(\mathbb{R})$, где $D'(\mathbb{R})$ есть пространство обобщенных функций на оси $\mathbb{R}$ (см. [10, гл. 2]). Для того, чтобы произведение функции $\epsilon(x)$ с разрывом на границе γ и функции $du(x)/dx$ являлось элементом пространства $D'(\mathbb{R})$, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$$M' = \{u \in M : u(-l - 0) = u(-l + 0), u(l - 0) = u(l + 0)\}. \quad (4)$$

Рассмотрим оператор $\mathbf{L}$ как линейный оператор из линейного пространства M' в линейное топологическое пространство $D'(\mathbb{R})$. Для того, чтобы действие оператора $\mathbf{L}$ на функцию $u \in M'$ являлось элементом $\mathbf{L}u$ пространства $L_2(\mathbb{R})$, выделим такое линейное подпространство $D(\mathbf{L}) \subset M'$, что для любого $u \in D(\mathbf{L})$ обобщенная функция $\mathbf{L}u = g \in D'(\mathbb{R})$ регулярна и имеет плотность $g(x) \in L_2(\mathbb{R})$ (см. [10, гл. 2]). С помощью интегрирования по частям нетрудно получить, что для этого необходимо и достаточно выполнение условия

$$D(\mathbf{L}) = \left\{ u \in M' : u'_x(-l + 0) = i \frac{a}{2} u(-l - 0), u'_x(l - 0) = i \frac{a}{2} u(l + 0) \right\}. \quad (5)$$

Тогда оператор $\mathbf{L}$ плотно определен на $L_2(\mathbb{R})$. С помощью интегрирования по частям нетрудно проверить, что условие (5) при выполнении условия (4) обеспечивает симметричность оператора $\mathbf{L}$ на пространстве $L_2(\mathbb{R})$.

Заметим, что оператор $\mathbf{L}$ на линейном многообразии $D(\mathbf{L})$ не является положительным, ибо $(u, \mathbf{L}u) = 0$ для всех гладких вещественнозначных функций с носителем на положительном множестве Ω_l . Кроме того, оператор $\mathbf{L}$ не является самосопряженным, но обладает самосопряженными расширениями, так как имеет одинаковые индексы дефекта, равные единице.

Найдем область определения сопряженного оператора $\mathbf{L}^*$. С помощью интегрирования по частям выражения $(\mathbf{L}^*v, u)$, $v \in D(\mathbf{L}^*)$, $u \in \mathbf{L}$, равного выражению $(v, \mathbf{L}u)$, для таких $u \in D(\mathbf{L})$, что $\text{supp}(u) \subset \omega_l$ или $\text{supp}(u) \subset \Omega_l$, заключаем, что $D(\mathbf{L}^*) \subset M$ (см. также [11, гл. 8, п. 2]). Тогда функции $u(x) \in D(\mathbf{L})$ имеют предельные значения $u(l \pm 0)$, $u'_x(l - 0)$, $u(-l \pm 0)$, $u'_x(-l + 0)$ и нетрудно проверить, что область определения оператора $\mathbf{L}^*$ есть

$$D(\mathbf{L}^*) = \left\{ u : u|_{\Omega_l} \in W_2^2(\Omega_l), u|_{\omega_l} \in W_2^1(\omega_l), -iu'_x(l - 0) + i\frac{a}{2}u(l - 0) = iau(l + 0), \right. \\ \left. u'_x(-l + 0) + i\frac{a}{2}u(-l + 0) = iau(-l - 0) \right\}. \quad (6)$$

Оператор $\mathbf{L}^*$ каждой функции $u(x)$ из $D(\mathbf{L}^*)$ сопоставляет функцию $\mathbf{L}^*u(x) \in L_2(\mathbb{R})$, задаваемую условиями

$$\mathbf{L}^*u(x)|_{\omega_l} = ia \frac{\partial}{\partial x} u(x)|_{\omega_l}, \quad \mathbf{L}^*u(x)|_{\Omega_l} = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x)|_{\Omega_l}.$$

Тогда можно непосредственно проверить, что если $a \neq 0$, то $\text{Ker}(\mathbf{L}^* - ia\mathbf{I})$ и $\text{Ker}(\mathbf{L}^* + ia\mathbf{I})$ есть нетривиальные одномерные линейные подпространства, а именно:

$$\text{Ker}(\mathbf{L}^* + i\mathbf{I}) = \text{Lin}(\varphi_+(x)), \quad \text{Ker}(\mathbf{L}^* - i\mathbf{I}) = \text{Lin}(\varphi_-(x)),$$

где $\varphi_+(x)|_{(-\infty, -l)} = 0$, $\varphi_+(x)|_{(l, \infty)} = e^{-x}$ и $\varphi_+(x)|_{\Omega_l}$ есть решение неоднородной третьей краевой задачи на отрезке Ω_l :

$$-\frac{\partial^2 \varphi_+}{\partial x^2} + i\varphi_+ = 0, \quad x \in \Omega_l, \\ \varphi'_+(-l + 0) + i\frac{a}{2}u(-l + 0) = 0, \quad \varphi'_+(l - 0) + i\frac{a}{2}u(l - 0) = 1,$$

которая, как несложно проверить, имеет единственное решение. Ядро $\text{Ker}(\mathbf{L}^* - i\mathbf{I})$ устроено аналогично.

Определим, какие самосопряженные расширения допускает симметрический оператор $\mathbf{L}$ на $D(\mathbf{L})$. Область определения оператора $\mathbf{L}$ задана как подпространство в пространстве M с помощью четырех линейных связей на шесть граничных значений функции и ее производной на границах раздела типа оператора, а область определения оператора $\mathbf{L}^*$ задана как подпространство в пространстве M с помощью двух таких линейных связей. Поэтому самосопряженное расширение оператора $\mathbf{L}$ следует задать как

подпространство в пространстве $D(\mathbf{L}^*)$ с помощью одного уравнения линейной связи на четыре независимых граничных значения $u(l \pm 0)$, $u(-l \pm 0)$ функции и ее производной на границах раздела типа оператора $\mathbf{L}^*$ (так как две связи

$$u'(\pm(l-0)) = ia\left(u(\pm(l+0)) - \frac{1}{2}u(\pm(l-0))\right)$$

уже наложены на функции из $D(\mathbf{L}^*)$).

Будем искать самосопряженное расширение $\mathcal{L}$ оператора $\mathbf{L}$ в виде сужения оператора $\mathbf{L}^*$ на следующее линейное многообразие:

$$D(\mathcal{L}) = \{u \in D(\mathbf{L}^*) : u(l+0) = \alpha_1 u(l-0) + \alpha_2 u(-l+0) + \alpha_3 u(-l-0)\},$$

где α_j , $j \in \overline{(1, 3)}$ – неопределенные постоянные. Тогда ограничения на коэффициенты α_i , $i = 1, 2, 3$, обеспечивающие самосопряженность $(\mathcal{L}u, v) = (u, \mathcal{L}v)$, $u, v \in D(\mathcal{L})$ принимают вид $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = -\alpha_3$, $|\alpha_3| = 1$, т.е.

$$u(l+0) - u(l-0) = e^{i\varphi}(u(-l+0) - u(-l-0)), \quad \varphi \in [0, 2\pi]. \quad (7)$$

Положим $\mathcal{L} = \mathcal{L}_\varphi$, $D(\mathcal{L}_\varphi) = \{u \in D(\mathbf{L}^*) : u(l+0) - u(l-0) = e^{i\varphi}(u(-l+0) - u(-l-0))\}$. Оператор $\mathcal{L}_\varphi$ каждой функции $u(x)$ из $D(\mathcal{L})$ сопоставляет функцию $\mathcal{L}_\varphi u(x) \in L_2(\mathbb{R})$, задаваемую условием $\mathcal{L}_\varphi u(x) = \mathbf{L}^* u(x)$.

Тогда при каждом $\varphi \in [0, 2\pi]$ получаем $D(\mathbf{L}) \subset D(\mathcal{L}_\varphi) \subset D(\mathbf{L}^*)$, $\varphi \in [0, 2\pi]$ и оператор $\mathcal{L}_\varphi$ является самосопряженным расширением оператора $\mathbf{L}$.

Фиксируем некоторое $\varphi \in [0, 2\pi]$ и превратим область определения $D(\mathcal{L}_\varphi)$ в гильбертово пространство, снабдив его нормой графика оператора $\mathcal{L}_\varphi$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Решением задачи (1), (2) назовем функцию*

$$u(t, x) \in C(\mathbb{R}_+, D(\mathcal{L}_\varphi)) \cap C^1(\mathbb{R}_+, L_2(\mathbb{R})), \quad (8)$$

которая удовлетворяет уравнению (1) почти всюду на $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ и условию (2) в том смысле, что $\|u(t, x) - u_0(x)\|_{L_2(\mathbb{R})} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Функцию $u(t, x) \in C(\mathbb{R}_+, L_2(\mathbb{R}))$ назовем *обобщенным решением задачи (1), (2)*, если существует последовательность начальных условий $\{u_{0,n}(x)\}$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_{0,n}(x) - u_0(x)\|_{L_2(\mathbb{R})} = 0$$

такая, что при каждом $n \in \mathbb{N}$ существует решение $u_n(t, x)$ задачи (1), (2) с начальными данными $u_{0,n}(x)$ и выполняется условие

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n(t, x) - u(t, x)\|_{C(\mathbb{R}_+, L_2(\mathbb{R}))} = 0.$$

Заметим, что если $u(t, x)$ есть обобщенное решение задачи (1), (2), то

$$\lim_{t \rightarrow +0} \|u(t, x) - u_0(x)\|_{L_2(\mathbb{R})} = 0. \quad (9)$$

Действительно,

$$u(t, x) - u_0(x) = u(t, x) - u_n(t, x) + u_n(t, x) - u_{0,n}(x) + u_{0,n}(x) - u_0(x),$$

откуда следует требуемое утверждение.

Кроме того, нетрудно показать, что если $u(t, x)$ есть решение задачи (1), (2), то оно удовлетворяет интегральному тождеству

$$-i \int_0^T (\mathbf{L}^* v, u(t)) dt = (v, u(T)) - (v, u(0)) \quad \forall T > 0 \quad (10)$$

при любом выборе $v(x) \in D(\mathbf{L}^*)$.

2. Основные результаты о корректной разрешимости вырожденной задачи (1), (2). Напомним, что мы выбрали некоторое значение $\varphi \in [0, 2\pi]$ и, тем самым, некоторое самосопряженное расширение $\mathcal{L}_\varphi$ оператора $\mathbf{L}$.

Поскольку оператор $\mathcal{L}_\varphi$ самосопряжен, из теоремы Стоуна (см. [1]) вытекает теорема 1.

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполнено условие $u_0 \in L_2(\mathbb{R})$. Тогда, если $a \in \mathbb{R}$, то задача (1), (2) имеет единственное обобщенное решение $u(x, t)$, причем $\|u(t, x)\|_{L_2(\mathbb{R})} = \|u_0\|_{L_2(\mathbb{R})}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Обобщенное решение задачи (1), (2) определяется с помощью группы унитарных преобразований $\tilde{U} = (\tilde{U}_t)_{t \in \mathbb{R}}$ пространства $L_2(\mathbb{R})$ (см. [10]):

$$u(t, x) = \tilde{U}_t u_0(x), \quad \tilde{U}_t = \exp(i\mathcal{L}_\varphi t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Из теоремы о спектральном разложении самосопряженного оператора $\mathcal{L}_\varphi$ вытекает следствие 1.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $a \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$ и функция $u_0(x)$ такова, что $u_0 \in D(\mathcal{L}_\varphi^m)$. Тогда существует единственное решение $u(t, x)$ задачи (1), (2), которое принадлежит пространству $C(\mathbb{R}_+, D(\mathcal{L}_\varphi^m)) \cap C^m(\mathbb{R}_+, L_2(\mathbb{R}))$ и причем

$$\|u(x, t)\|_{L_2(\mathbb{R})} = \|u_0(x)\|_{L_2(\mathbb{R})}, \quad (11)$$

$$\|u(x, t)\|_{C(\mathbb{R}_+, D(\mathcal{L}_\varphi^m)) \cap C^m(\mathbb{R}_+, L_2(\mathbb{R}))} = \|u_0(x)\|_{D(\mathcal{L}_\varphi^m)}. \quad (12)$$

Здесь и далее через $C^m(\Delta, X)$ и $D(\mathcal{L}_\varphi^m)$ обозначается пространство m раз непрерывно дифференцируемых отображений промежутка Δ в линейное нормированное пространство X и область определения m -й степени оператора $\mathcal{L}_\varphi$ соответственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ. Единственность обобщенного решения следует из теоремы 1. Существование и гладкость решения, выражаемая соотношением (12), вытекают из утверждений теоремы 1 для задачи (1), (2) с начальными условиями $\mathcal{L}_\varphi^k u_0(x)$, $k = 0, \dots, m$. Следствие доказано.

Пусть $u_0(x) \in D(\mathcal{L}_\varphi^m)$ и $a < 0$. Заметим, что тогда из (12) при $m = 2$ следует непрерывная дифференцируемость решения $u(t, x)$ в областях $D_- = \mathbb{R} \times (-\infty, -l)$ и $D_+ = \mathbb{R} \times (l, +\infty)$, и что сужение решения на область D_- удовлетворяет соотношениям

$$\|u(t, x) - u_0(x + at)\|_{C(\mathbb{R}_+, L_2(-\infty, -l))} = 0, \quad t \geq 0, \quad (13)$$

$$\|u(t, x) - u_0(x + at)\|_{C(\mathbb{R}_-, L_2(l, +\infty))} = 0, \quad t < 0. \quad (14)$$

Поэтому в силу плотности линейного многообразия $D(\mathcal{L}_\varphi)$ в пространстве $L_2(\mathbb{R})$ и соотношения (11) равенства (13), (14) справедливы для обобщенного решения задачи (1), (2) с любым начальным условием $u_0(x) \in L_2(\mathbb{R})$.

Аналогично, если $a > 0$, то имеют место равенства

$$\|u(t, x) - u_0(x + at)\|_{C(\mathbb{R}_+, L_2(l, \infty))} = 0, \quad t \geq 0, \quad (15)$$

$$\|u(t, x) - u_0(x + at)\|_{C(\mathbb{R}_-, L_2(-\infty, -l))} = 0, \quad t < 0. \quad (16)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. В работах [7], [8] проводилось изучение корректной разрешимости задачи типа (1), (2) с оператором переменного типа, характеристическая форма которого вырождается на полуоси прямой $\mathbb{R}$. Тогда, как показано в работе [7], оператор $\mathbf{L}$ не имеет самосопряженных расширений. Это обстоятельство послужило причиной дать в работе [7] определение решения, отличающееся от определения 1 настоящей работы (в некотором смысле, более ограничительное: в определении 1 настоящей работы требуется принадлежность решения области определения расширения оператора $\mathbf{L}$, а в определении 1 работы [7] – области определения самого оператора $\mathbf{L}$). Поэтому в зависимости от коэффициента при “младшем” члене оператора $\mathbf{L}$ задача Коши типа (1), (2) в работе [7] имеет решение не при любом начальном условии. В работе [8] проводится исследование корректности задачи (1), (2) при различных обобщениях определения ее решения. А в настоящей работе для любого самосопряженного расширения $\mathcal{L}$ оператора $\mathbf{L}$ теорема 1 утверждает существование и единственность решения задачи (1), (2) при любом начальном условии из пространства $L_2(\mathbb{R})$, однако выбор самосопряженного расширения и, тем самым, группы U унитарных преобразований пространства $L_2(\mathbb{R})$, не является однозначным.

3. Унитарные марковские коциклы порождаемые вырожденной задачей (1), (2). Пусть $U = (U_t)_{t \in \mathbb{R}}$ есть сильно непрерывная группа унитарных операторов в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Сильно непрерывное семейство $W = (W_t)_{t \in \mathbb{R}}$ ограниченных операторов в $\mathcal{H}$ называется (мультипликативным) U -коциклом, если выполнено условие $W_{t+s} = W_t U_t W_s U_{-t}$, $s, t \in \mathbb{R}$. Коцикл W называется унитарным, если все операторы W_t унитарные. Теория коциклов широко используется в квантовой теории вероятностей, где в качестве $\mathcal{H}$ обычно берется симметричное (бозонное) Фоковское пространство $\Gamma(\mathcal{K})$ над одночастичным гильбертовым пространством $\mathcal{K} = L_2(\mathbb{R})$,

а в качестве U – унитарная группа в $\mathcal{H}$, полученная вторичным квантованием группы сдвигов в $\mathcal{K}$ (см. [12]). Обыкновенно рассматриваются квантовые стохастические дифференциальные уравнения, решениями которых являются коциклы (см. [12]–[14]). Отметим, что квантовое стохастическое дифференциальное уравнение унитарно эквивалентно краевой задаче в фоковском комплексе (см. [13]). Часто выделяется подкласс *марковских коциклов*, удовлетворяющих специальному условию локализации действия (см. [5]–[6] и приведенные там ссылки). Другим направлением исследования является изучение возможности дилатации коциклов, состоящих из сжимающих операторов в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ до унитарных коциклов в некотором гильбертовом пространстве $\mathcal{H}'$, $\mathcal{H} \subset \mathcal{H}'$ (см. [15]). К унитарным коциклам можно подойти с точки зрения теории возмущений групп унитарных операторов следующим образом. Пусть $U = (U_t)_{t \in \mathbb{R}}$ и $\tilde{U} = (\tilde{U}_t)_{t \in \mathbb{R}}$ есть две сильно непрерывных группы унитарных операторов в $\mathcal{H}$. Тогда семейство операторов $W_t = \tilde{U}_t U_{-t}$, $t \in \mathbb{R}$, является U -коциклом. Группу $\tilde{U}$ естественно в этом случае назвать *коциклическим возмущением* группы U коциклом W . Поскольку любые две группы унитарных операторов связаны некоторым унитарным коциклом, для того, чтобы задача о коциклическом возмущении фиксированной группы была содержательной, нужно ограничить класс используемых при этом возмущений коциклов. Ниже мы рассмотрим задачу о коциклическом возмущении группы сдвигов в $\mathcal{K}$ коциклами, являющимися марковскими в смысле определения [4]. Коциклы в $\mathcal{K}$, марковские в смысле [4] (см. определение ниже), порождают марковские коциклы в $\mathcal{H} = \Gamma(\mathcal{K})$ в ходе процедуры вторичного квантования (см. [16]). Ниже мы будем систематически использовать основные факты теории инвариантных подпространств сдвигов (см. [17]).

Рассмотрим группу сдвигов U , действующую в пространстве $\mathcal{K}$ по формуле

$$(U_t f)(x) = f(x + t), \quad f \in \mathcal{K}, \quad t, x \in \mathbb{R}.$$

Пусть подпространство $\mathcal{K}(t) \subset \mathcal{K}$ состоит из функций с носителем, принадлежащим интервалу $[-t, +\infty)$. При процедуре вторичного квантования семейство подпространств $\mathcal{K}(t)$, $t \geq 0$, задает естественную фильтрацию $\mathcal{H}_t = \Gamma(\mathcal{K}(t))$, $\mathcal{H}_t^\perp = \Gamma(\mathcal{K}(t)^\perp)$, $t \geq 0$, фоковского пространства $\mathcal{H} = \Gamma(\mathcal{K})$ такую, что $\mathcal{H} \approx \mathcal{H}_t \otimes \mathcal{H}_t^\perp$. Унитарный U -коцикл W называется *марковским*, если $W_t|_{\mathcal{K}(t)^\perp} = I$, $t \geq 0$ (см. [4], [16]). Условие коцикла приводит к выполнению тождества $W_{-t} = U_{-t} W_t^* U_t$, $t \geq 0$. Следовательно, для того чтобы коцикл W был марковским необходимо и достаточно, чтобы выполнялось тождество (см. [4])

$$W_{-t}|_{\mathcal{K}(0)^\perp} = I, \quad t \geq 0. \quad (\text{M})$$

Вторично квантованный марковский коцикл $\Gamma(W_t)$ является марковским в смысле согласованности с фильтрацией $\mathcal{H}_t$, $t \geq 0$, так что $\Gamma(W_t) \approx \mathcal{W}_t \otimes I$, $t \geq 0$, по отношению к представлению $\mathcal{H} \approx \mathcal{H}_t \otimes \mathcal{H}_t^\perp$.

Пространство $\mathcal{K}$ естественным образом разбивается в ортогональную сумму пространств $\mathcal{K}_+$ и $\mathcal{K}_-$, состоящих из функций с носителем, принадлежащим $\mathbb{R}_+$ и $\mathbb{R}_-$ соответственно. Аналитическая функция $\Theta(\lambda)$, голоморфная в полуплоскости $\text{Im } \lambda > 0$, называется *внутренней*, если $|\Theta(x)| = 1$, $x \in \mathbb{R}$. Обозначим $M_\Theta = \mathcal{F}^{-1} \Theta \mathcal{F}$ – изометрический оператор в пространстве $\mathcal{K}_+$. Здесь $\mathcal{F}$ – преобразование Фурье, переводящее

пространство $\mathcal{K}_+$ в пространство Харди H^2 в полуплоскости $\text{Im } \lambda > 0$, где оператор умножения на функцию $\Theta(\lambda)$ является изометрическим. Оператор M_Θ обладает свойством $U_{-t}M_\Theta f = M_\Theta U_{-t}f$, $f \in \mathcal{K}_+$, $t \geq 0$, и определяет подпространство $\mathcal{K}_\Theta = M_\Theta \mathcal{K}_+$, инвариантное относительно сдвигов вправо U_{-t} , $t \geq 0$. Обозначим $V^+ = (V_t^+)_{t \geq 0}$ и $V^- = (V_t^-)_{t \geq 0}$ полугруппы изометрических операторов в пространствах $\mathcal{K}_\Theta$ и $\mathcal{K}_-$, где

$$V_t^+ = U_{-t}|_{\mathcal{K}_\Theta}, \quad V_t^- = U_t|_{\mathcal{K}_-}, \quad t \geq 0. \quad (\text{C})$$

Поскольку полугруппы V^+ и V^- состоят из сдвигов, т.е. $\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} V_{tn}^+ \mathcal{K}_\Theta = \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} V_{tn}^- \mathcal{K}_- = \{0\}$ для любого $t > 0$, и выполнено (C), группа сдвигов U называется *унитарным сцеплением* полугрупп V^+ и V^- в пространстве $\mathcal{K}$ (см. [18], [19]). Другим сцеплением V^+ и V^- является группа $\tilde{U} = (\tilde{U}_t)_{t \in \mathbb{R}}$ в пространстве $\mathcal{K} = \mathcal{K}_\Theta \oplus \mathcal{K}_-$, действующая следующим образом:

$$\begin{aligned} \tilde{U}_t f &= U_t f, \quad f \in \mathcal{K}_-, \quad t \geq 0, \\ \tilde{U}_t f &= U_t P_{[0, t]} g + M_\Theta U_t P_{[t, +\infty)} g, \quad f = M_\Theta g \in \mathcal{K}_\Theta, \quad t \geq 0, \end{aligned}$$

где $P_{[0, t]}$ и $P_{[t, +\infty)}$ есть проекторы на подпространства функций с носителем, принадлежащим $[0, t]$ и $[t, +\infty)$ соответственно. Таким образом, мы приходим к модели марковского коцикла, приведенной в [4].

ТЕОРЕМА 2. Пусть действие $\tilde{U}_t$ продолжено в $(\mathcal{K}_\Theta \oplus \mathcal{K}_-)^\perp$, так что получившиеся операторы образуют сильно непрерывную группу унитарных операторов в $\mathcal{K}$. Тогда семейство унитарных операторов $W_t = \tilde{U}_t U_{-t}$, $t \geq 0$, определяет марковский U -коцикл.

Для доказательства теоремы достаточно заметить, что условие (М) выполнено в силу того, что $\tilde{U}_t|_{\mathcal{K}_-} = U_t$, $t \geq 0$.

Пусть U есть сильно непрерывная группа унитарных операторов в $\mathcal{K}$ с генератором $\mathcal{L}_0 = a\partial/\partial x$ и $\tilde{U}$ – группа унитарных операторов, определяемая обобщенным решением задачи (1), (2) с генератором $\mathcal{L}$ (см. замечание к теореме 1). Группа U унитарна эквивалентна группе сдвигов на прямой с точностью до изменения масштаба. Из формул (13) и (15) следует, что оператор, осуществляющий соответствующее унитарное отображение, можно подобрать таким образом, чтобы подпространство $L_2(\Omega_2)$ перешло в $\mathcal{K}_-$ в случае $a > 0$ и $L_2(\Omega_1)$ перешло в $\mathcal{K}_-$ в случае $a < 0$. Поскольку $\tilde{U}_t f = U_t f$, $f \in L_2(\Omega_2)$, $t \geq 0$, при $a > 0$, и $\tilde{U}_t f = U_t f$, $f \in L_2(\Omega_1)$, $t \geq 0$, при $a < 0$, получаем согласно (13) и (15), что коцикл $W_t = \tilde{U}_t U_{-t}$, $t \in \mathbb{R}$, удовлетворяет условию (М) и является марковским. Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3. Обобщенное решение задачи (1), (2) определяет такую группу унитарных операторов $\tilde{U}$, что семейство унитарных операторов $W_t = \tilde{U}_t U_{-t}$, $t \in \mathbb{R}$, где $U_t = e^{ta \frac{\partial}{\partial x}}$, образует марковский коцикл.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Уэрт Ч., Томсон Р. Физика твердого тела. М.: Мир, 1966.
- [2] Гитман Д. М., Тютин И. Д. Каноническое квантование полей со связями. М.: Наука, 1986.
- [3] Amosov G. G. On Markovian cocycle perturbations in classical and quantum probability // Int. J. Math. Math. Sci. 2003. V. 54. P. 3443–3468.
- [4] Lindsay J. M., Wills S. J. Fock space Markovian cocycles: their representation, generation and dilation // Canad. Math. Soc. Conf. Proc. 2000. V. 29. P. 455–470.
- [5] Liebscher V. How to generate Markovian cocycles on boson Fock space // Infin. Dimen. Anal. Quantum Probab. Rel. Top. 2001. V. 4. P. 215–219.
- [6] Фикера Г. К единой теории краевых задач для эллипτικο-параболических уравнений второго порядка // Математика. 1963. Т. 164. С. 99–121.
- [7] Сакбаев В. Ж. О постановке задачи Коши для уравнения Шрёдингера, вырождающегося на полупространстве // ЖВМиМФ. 2002. Т. 42. № 11. С. 1718–1729.
- [8] Сакбаев В. Ж. О свойствах решений задачи Коши для уравнения Шрёдингера, вырождающегося на полупрямой // Современная математика и ее приложения. Труды конференции “Суздаль-4”. Т. 10. Суздаль, 2003. С. 176–192.
- [9] Михайлов В. П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1983.
- [10] Владимиров В. С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1971.
- [11] Рид М., Саймон Б. Современные методы математической физики. Т. 1. М.: Мир, 1977.
- [12] Parthasarathy K. R. An Introduction to Quantum Stochastic Calculus. Basel: Birkhauser, 1992.
- [13] Чеботарев А. М. Что такое квантовое стохастическое уравнение с точки зрения функционального анализа? // Матем. заметки. 2002. Т. 71. № 3. С. 448–469.
- [14] Bhat B. V. R. Cocycles of CCR flows // Mem. Amer. Math. Soc. 2001. № 709. P. 1–114.
- [15] Bhat B. V. R. Minimal isometric dilations of operator cocycles // Integr. Equat. Operat. Theory. 2002. V. 42. P. 125–141.
- [16] Amosov G. G. Cocycle perturbation of quasifree algebraic K -flow leads to required asymptotic dynamics of associated completely positive semigroup // Infin. Dimen. Anal. Quantum Probab. Rel. Top. 2000. V. 3. P. 237–246.
- [17] Никольский Н. К. Лекции об операторе сдвига. М.: Наука, 1980.
- [18] Адамян В. М., Аров Д. З. Об одном классе операторов рассеяния и характеристических оператор-функций сжатий // Докл. АН СССР. 1965. Т. 160. С. 9–12.
- [19] Адамян В. М., Аров Д. З. Об операторах рассеяния и полугруппах сжатий в гильбертовом пространстве // Докл. АН СССР. 1965. Т. 165. С. 9–12.

Московский физико-технический институт
E-mail: amosov@fizteh.ru, fumi2003@mail.ru

Поступило
18.11.2002
Исправленный вариант
01.04.2004