Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Домрина, О четырехлистных полиномиальных отображениях $\mathbb{C}^2$. Общий случай, *Матем. заметки*, 1999, том 65, выпуск 3, 464–467

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1070>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 18:24:57

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

О ЧЕТЫРЕХЛИСТНЫХ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ОТОБРАЖЕНИЯХ $\mathbb{C}^2$. ОБЩИЙ СЛУЧАЙ

А. В. Домрина

Введение. Пусть $\tilde{\mathbb{C}}^2$ и $\mathbb{C}^2$ – два экземпляра комплексной плоскости, $f: \tilde{\mathbb{C}}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ – полиномиальное отображение, якобиан которого есть ненулевая константа. Известная гипотеза о якобиане состоит в том, что такое отображение f полиномиально обратимо (см. обзоры в [1], [2]).

Отображение f полиномиально обратимо тогда и только тогда, когда общая точка из $\mathbb{C}^2$ имеет один прообраз. Число прообразов общей точки называется *топологической степенью* отображения. Известно, что полиномиальных отображений топологической степени 2 или 3, якобиан которых есть ненулевая константа, не существует (см. [3]). Нас интересует случай степени 4. Результатом статьи является следующее утверждение.

ТЕОРЕМА. *Если топологическая степень полиномиального отображения $f: \tilde{\mathbb{C}}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ равна 4, то якобиан отображения f не может быть ненулевой константой.*

Эта работа продолжает статью [4], в которой доказана невозможность частного случая, когда f имеет одну дикритическую компоненту. Здесь мы обсудим оставшиеся случаи.

Схема доказательства. Предположим от противного, что существует полиномиальное отображение f топологической степени 4, якобиан которого является ненулевой константой.

1. **Свойства дикритических компонент и их разрешения на бесконечности.** С помощью конечно-го числа σ -процессов на бесконечности f продолжается до регулярного рационального отображения $F: \tilde{X} \rightarrow X$, где $\tilde{X}$, X – неособые компактные многообразия, содержащие соответственно $\tilde{\mathbb{C}}^2$ и $\mathbb{C}^2$ в качестве открытых подмножеств, а кривые $\tilde{L} := \tilde{X} \setminus \tilde{\mathbb{C}}^2$ и $L := X \setminus \mathbb{C}^2$ состоят из конечного числа неособых рациональных компонент, пересекающихся трансверсально и не более чем попарно. Как и в [4], положим $\tilde{L}_\infty := F^{-1}(L)$, неприводимые компоненты кривой $\tilde{L}$ будем помечать тильдой, а их образы при отображении F будем обозначать теми же буквами, но без тильды. Например, $a := F(\tilde{a})$. Дикритическими компонентами отображения F называются неприводимые компоненты $\tilde{l} \subset \tilde{L} - \tilde{L}_\infty$, на которых F непостоянно. Будем считать, что отображение F удовлетворяет условию минимальности (см. [4]). Тогда многообразия $\tilde{X}$ и X можно выбрать так, что выполнены следующие свойства.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Отображение F имеет две дикритические компоненты $\tilde{g}_1$ и $\tilde{g}_2$, локально биголоморфно на $(\tilde{g}_1 \cup \tilde{g}_2) \setminus \tilde{L}_\infty$ и имеет вдоль $\tilde{g}_1$ ветвление первого порядка, вдоль $\tilde{g}_2$ – ветвление второго порядка, $\tilde{L} = \tilde{L}_\infty + \tilde{g}_1 + \tilde{g}_2$. Каждая из кривых $\tilde{g}_1, \tilde{g}_2$ пересекает $\tilde{L}_\infty$ в единственной точке.*

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-01-01218.

Рис. 1

Рис. 2

Рис. 3

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Каждая из кривых g_1, g_2 пересекает L трансверсально и в единственной точке. Сплайс-диаграмма кривой $g = g_1 \cup g_2$ возле L устроена, как на одном из рис. 1–3. Правая стрелка отвечает g_2 , верхняя – g_1 . Для каждой нодальной вершины $p \in L$ обозначим через R_p, L_p, D_p, A_p соответственно правую, левую, нижнюю и верхнюю ветви графа L (возможно пустые), выходящие из p . Тогда

- 1) $\det L = -1$;
- 2) если $p \in A_h$, то $\det A_p = 1, \det R_p > 1$;
- 3) если $p \in L - A_h, p \neq h$, то $\det R_p = 1, \det D_p > 1, \det L_p > 1$;
- 4) в случае рис. 1 $\det A_h = 1, \det R_h = 1, \det D_h > 1, \det L_h > 1$;
- 5) в случае рис. 3 с $\det A_h \neq 1$ имеем $\det R_h = 1, \det L_h > 1$.

Далее мы будем использовать обозначения из [4, п. 1]. Аналогично [4, лемма 6], степень линейной цепочки смежной с $\tilde{g}_1$ равна 1, степень линейной цепочки смежной с $\tilde{g}_2$ равна 2.

2. Структура графа $\tilde{L}_\infty$. В статье [4] мы строили граф $\tilde{L}_\infty$ как состоящий из развилок и соединяющих их максимальных подграфов постоянной степени. Напомним, что вершина $\tilde{l}$ называется *развилкой*, если $m(\tilde{l}) > 1$; подграф постоянной степени называется *максимальным*, если не существует другого содержащего его подграфа постоянной степени. Здесь мы введем другой класс подграфов, соединяющих развилки.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $a \in L, A_h$ – верхняя ветвь L (см. предложение 2). Обозначим $a' := \{\tilde{a} \in F^{-1}(a), \text{ на которых } F \text{ непостоянно}\}, A' = F^{-1}(A_h)$. Пусть $\tilde{h} \in h'$ и либо $m(\tilde{h}) = 1$, либо $\det A_h = 1$ и L отвечает один из рис. 2, 3. Определим подграф $\Delta_{\tilde{h}}$ следующим образом: если $m(\tilde{h}) \neq 1$, то $\Delta_{\tilde{h}}$ состоит из всех максимальных подграфов постоянной степени смежных с $\tilde{h}$ и всех компонент связности множества A' смежных с $\tilde{h}$; если $m(\tilde{h}) = 1$, то $\Delta_{\tilde{h}}$ состоит из максимального подграфа постоянной степени, содержащего $\tilde{h}$, и компоненты связности множества A' смежные с $\tilde{h}$.

Мы будем рассматривать граф $\tilde{L}_\infty$ как состоящий из подграфов трех видов:

- а) максимальные подграфы постоянной степени, не пересекающиеся с h' ,
- б) компоненты связности множества A' ,
- в) подграфы $\Delta_{\tilde{h}}$ из определения 1

и соединяющих их развилок. Несложно показать, что каждый подграф $\tilde{Q}$ вида а)–в) обладает следующими свойствами.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Подграф $\tilde{Q}$ смежен не более чем с двумя вершинами графа $\tilde{L}_\infty + \tilde{g}_2$ и F непостоянно на этих вершинах. Если $\tilde{Q}$ смежен только с одной такой вершиной $\tilde{a}$ графа $\tilde{L}_\infty + \tilde{g}_2$, то

$$\det \tilde{Q} = \frac{n(\tilde{a})}{\text{Deg } \tilde{Q}} \det F(\tilde{Q}).$$

Если $\tilde{Q}$ смежен с двумя такими вершинами $\tilde{a}, \tilde{b} \in \tilde{L}_\infty + \tilde{g}_2$, то

$$\det \tilde{Q} = \frac{n(\tilde{a})n(\tilde{b})}{\text{Deg } \tilde{Q}} \det F(\tilde{Q}).$$

Если $\tilde{a} \in \tilde{L}_\infty + \tilde{g}_2$ – смежная с $\tilde{Q}$ вершина, а $\tilde{T} \subset \tilde{Q}$ – смежная с ней линейная цепочка, то $\text{Deg } \tilde{T} = \text{Deg } \tilde{Q}$.

(Заметим, что в случае с одной дикритической компонентой максимальные подграфы постоянной степени обладали свойствами из предложения 3.) Из предложения 3 и [4, предложение 1] следует, что при $\det A_h = 1$ компоненты связности множества A' не дают вклада в правую часть формулы (5) из [4], и их определители равны 1, поэтому они не будут изображаться на дальнейших рисунках.

Пусть $\tilde{a} \in \tilde{L}_\infty$ – вершина, не содержащаяся ни в одном из подграфов вида а)–в) (заметим, что $\tilde{a}$ – развилка). Аналогично [4, п. 3], обозначим через $U_{\tilde{a}}$ подграф графа $\tilde{L}_\infty$, содержащий $\tilde{a}$ и все подграфы вида а)–в), смежные с $\tilde{a}$. Сопоставим подграфу $U_{\tilde{a}}$ диаграмму, вершина которой отвечает $\tilde{a}$, рядом с ней указана пара $(m(\tilde{a}), n(\tilde{a}))$, ребра отвечают компонентам связности $(U_{\tilde{a}} \setminus \tilde{a})$, рядом с ними указана их степень, ребра слева (соответственно справа) от $\tilde{a}$ отвечают подграфам, чей образ при F лежит слева (соответственно справа) от a , ребра под $\tilde{a}$ отвечают подграфам, чей образ при F лежит над (или под) a (мы не отмечаем компоненты связности A' в случае $\det A_h = 1$).

При описании подграфа $U_{\tilde{a}}$ в случае с одной дикритической компонентой [4] мы пользовались тем, что определители его нижних ветвей и тех левых ветвей, которые являются ветвями графа $\tilde{L}_\infty$, взаимно просты. В нашем случае одна из компонент связности $U_{\tilde{a}} \setminus \tilde{a}$ может быть смежна с $\tilde{g}_1$, поэтому определители перечисленных выше ветвей, кроме быть может одного, попарно взаимно просты. Повторяя *mutatis mutandis* доказательство лемм 8, 9 статьи [4], получаем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Подграфу $U_{\tilde{a}}$ отвечает одна из диаграмм, приведенных либо на рис. 10, 11, 13–16 статьи [4], либо на рис. 4–9 настоящей работы. При этом в случаях, приведенных на рис. 4, 7, 8, вершина $\tilde{g}_1$ смежна с одной из нижних ветвей графа $U_{\tilde{a}}$; в случаях, приведенных на рис. 5, 6, – с одной из левых ветвей графа $U_{\tilde{a}}$; в случаях, приведенных на рис. 6, 7, $\text{Deg}(\tilde{a}\tilde{g}_1) = 1$; в случае, приведенном на рис. 9, вершина a расположена правее вершины h .

Рис. 4

Рис. 5

Рис. 6

Рис. 7

Рис. 8

Рис. 9

Аналогично [4, следствие 5], получаем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Если изобразить подграфы, отвечающие рис. 4, 5, ребрами степени 2, подграфы, отвечающие рис. 8, ребрами степени 4, а остальные подграфы $U_{\tilde{a}}$ соответствующими им диаграммами, то $\tilde{L}_\infty + \tilde{g}_2$ отвечает либо одна из диаграмм, приведенных на рис. 20–25 статьи [4], либо одна из диаграмм, приведенных на рис. 10–12 настоящей работы.

3. Запрет диаграмм, отвечающих $\tilde{L}_\infty + \tilde{g}_2$. Если графу $\tilde{L}_\infty + \tilde{g}_2$ отвечает одна из диаграмм, приведенных на рис. 10–12, то в силу предложений 4, 5 вершина $\tilde{g}_1$ смежна с подграфом, отвечающим однозначно определенному ребру диаграммы. (Мы отождествляем ребра, выходящие из одной

Рис. 10

Рис. 11

Рис. 12

и той же вершины и отвечающие подграфам одной и той же степени, которые являются ветвями $\tilde{L}_\infty$ и образы которых при отображении F совпадают.) Если графу $\tilde{L}_\infty + \tilde{g}_2$ отвечает одна из диаграмм, приведенных на рис. 20–25 из [4], то возможны несколько случаев расположения $\tilde{g}_1$.

СЛУЧАЙ 1. Вершина $\tilde{g}_1$ смежна с подграфом $\tilde{Q}$, отвечающим одному из ребер диаграммы. Если это ребро “горизонтальное”, то либо $\tilde{Q} = \Delta_{\tilde{h}}$ (см. определение 1) для некоторой $\tilde{h} \in h'$, либо $\text{Deg } \tilde{Q} = 2$, либо $\text{Deg } \tilde{Q} = 4$ и $\tilde{Q}$ отвечает один из случаев, приведенных на рис. 4, 6, 8. Если это ребро “нижнее”, то $\tilde{Q} \subset \tilde{A}'$, графу L отвечает рис. 3, $\det A_h > 1$ и вершина $\tilde{h} \in h'$ смежная с $\tilde{Q}$ является развилкой.

СЛУЧАЙ 2. Вершина $\tilde{g}_1$ смежна с подграфом $\tilde{Q}$, не отмеченным на диаграмме. Тогда графу L отвечает рис. 1, и вершина $\tilde{h} \in h'$ смежная с $\tilde{Q}$ является развилкой.

Для каждой из диаграмм, отвечающих графу $\tilde{L}_\infty + \tilde{g}_2$, мы рассматриваем все случаи расположения вершины $\tilde{g}_1$ и доказываем невозможность каждого из них. Для этого в каждом из случаев сначала нужно убедиться, что корень графа $\tilde{L}$ принадлежит подграфу $\langle \tilde{g}_1 \tilde{g}_2 \rangle$. Затем, объединяя формулы (3) из [4] для коэффициентов при $\tilde{g}_1$ и $\tilde{g}_2$ канонического дивизора многообразия $\tilde{X}$, получаем уравнение и убеждаемся, что наши данные ему не удовлетворяют.

Автор приносит глубокую благодарность А. Г. Витушкину и С. Ю. Орекову за полезные обсуждения и помощь при выполнении данной работы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Vitushkin A. G. // *Manifolds* (Tokyo, 1973). Tokyo: Tokyo Univ. Press, 1975. P. 415–417.
2. Bass H., Connell E. H., Wright D. // *Bull. Amer. Math. Soc.* 1982. V. 7. № 2. P. 287–330.
3. Ореков С. Ю. // *Изв. АН СССР. Сер. матем.* 1986. Т. 50. № 6. С. 1231–1240.
4. Домри-на А. В., Ореков С. Ю. // *Матем. заметки.* 1998. Т. 64. № 6. С. 847–862.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступило
07.05.98