Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Лауринчикас, Теорема типа Эллиотта для сверток L -функций эллиптических кривых, *Матем. заметки*, 2016, том 99, выпуск 1, 78–88

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10704>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 13:37:26

Теорема типа Эллиотта для сверток L -функций эллиптических кривых

А. Лауринчикас

В статье получена предельная теорема с растущим модулем характера для сверток с Дирихле характером L -функций эллиптических кривых.

Библиография: 15 названий.

DOI: 10.4213/mzm10704

1. Введение. Пусть $s = \sigma + it$ – комплексная переменная, χ – характер Дирихле по модулю $q \in \mathbb{N}$, а $L(s, \chi)$ – соответствующая L -функция Дирихле, которая в полуплоскости $\sigma > 1$ определяется рядом Дирихле

$$L(s, \chi) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\chi(m)}{m^s}.$$

Если χ_0 – главный характер по модулю q , то $L(s, \chi_0)$ имеет аналитическое продолжение на всю комплексную плоскость, за исключением простого полюса в точке $s = 1$ с вычетом

$$\prod_{p|q} \left(1 - \frac{1}{p}\right),$$

где p обозначает простое число. Если $\chi \neq \chi_0$, то $L(s, \chi)$ является целой функцией.

Первый результат для функции $L(s, \chi)$ с растущим модулем q был получен Човой и Ердешем, доказавшими предельную теорему [1] для $L(1, \chi)$ с действительным характером χ . Дальнейший прогресс в этой области принадлежит Эллиотту. Пусть q – простое число и при $Q \geq 2$

$$M_Q = \sum_{q \leq Q} \sum_{\substack{\chi = \chi \pmod{q} \\ \chi \neq \chi_0}} 1.$$

Из закона распределения простых чисел следует, что

$$M_Q = \frac{Q^2}{2 \log Q} + O\left(\frac{Q^2}{\log^2 Q}\right).$$

Для краткости положим

$$\mu_Q(\dots) = \frac{1}{M_Q} \sum_{q \leq Q} \sum_{\substack{\chi = \chi \pmod{q} \\ \chi \neq \chi_0 \\ \dots}} 1,$$

где вместо $\dots$ будем писать условие, которому удовлетворяет пара $(q, \chi \pmod{q})$. Кроме того, пусть

$$\varepsilon(\chi) = \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\chi(m)}{m^s} \right) e^{-\chi(m)m^{-s}}.$$

В [2] было получено, что при $\sigma > 1/2$ функция распределения

$$\mu_Q \left(\frac{1}{|\varepsilon(\chi)|} |L(s, \chi)| < x \right),$$

когда $Q \rightarrow \infty$, слабо сходится к некоторой функции распределения.

В [3] Эллиотт получил предельную теорему для аргумента функции $L(s, \chi)$. При $1/2 < \sigma \leq 1$ и $L(s, \chi) \neq 0$ пусть $\arg L(s, \chi)$ означает значение аргумента $L(s, \chi)$, получаемое путем непрерывного изменения из точки $s = 2$ вдоль дуги, на которой $L(s, \chi) \neq 0$. Таким образом, $\arg L(s, \chi)$ определен только с точностью до слагаемого, кратного $2\pi i$. Тогда упомянутый результат Эллиотта гласит, что при $\sigma > 1/2$

$$\mu_Q \left(\frac{1}{2\pi} \arg L(s, \chi) < x \pmod{1} \right),$$

когда $Q \rightarrow \infty$, слабо сходится к непрерывной функции распределения $\pmod{1}$, преобразование Фурье которой

$$\prod_p \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} \binom{-k/2}{m} \binom{k/2}{m} \frac{1}{p^{2m\sigma}} \right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Результаты Эллиотта были обобщены Станкусом [4] на двумерный случай; он доказал предельную теорему с растущим модулем для $L(s, \chi)$ на комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Через $\mathcal{B}(X)$ будем обозначать борелевское σ -поле пространства X . Напомним, что характеристическое преобразование $w(\tau, k)$, $\tau \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$, вероятностной меры P на $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ определяется формулой

$$w(\tau, k) = \int_{\mathbb{C} \setminus \{0\}} |z|^{i\tau} e^{i \arg z} dP.$$

Известно, что мера P однозначно определяется своим характеристическим преобразованием $w(\tau, k)$.

Сформулируем теорему работы [4], см. также [5]. Пусть $c_{\tau, k}(m)$ – мультипликативная функция, которая для степеней простых чисел p^l определена формулой

$$c_{\tau, k}(p^l) = \frac{\xi(\xi + 1) \cdots (\xi + l - 1)}{l!}, \quad \xi = \frac{i\tau + k}{2},$$

и

$$w_{\widehat{P}}(\tau, k) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_{\tau, k}(m) c_{\tau, -k}(m)}{m^{2\sigma}}, \quad \sigma > \frac{1}{2}.$$

Тогда при $\sigma > 1/2$

$$\mu_Q(L(s, \chi) \in A), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}),$$

когда $Q \rightarrow \infty$, слабо сходится к предельной мере $\widehat{P}$ на $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$, определяемой характеристическим преобразованием $w_{\widehat{P}}(\tau, k)$.

В статьях [6]-[8] были получены предельные теоремы типа Эллиотта для сверток L -функций эллиптических кривых с характером Дирихле, однако только в области абсолютной сходимости ряда, которым определяется L -функция. Пусть E – эллиптическая кривая над полем рациональных чисел, заданная уравнением Вейерштрасса

$$y^2 = x^3 + ax + b, \quad a, b \in \mathbb{Z},$$

дискриминант которого $\Delta = -16(4a^3 + 27b^2) \neq 0$. Для простого числа p через E_p обозначим редукцию кривой E по модулю p , являющуюся кривой над конечным полем $\mathbb{F}_p$, и определим целое число $\lambda(p)$ равенством

$$|E(\mathbb{F}_p)| = p + 1 - \lambda(p),$$

где $|E(\mathbb{F}_p)|$ – число точек E_p . Тогда L -функция $L_E(s)$ кривой E определяется эйлеровским произведением

$$L_E(s) = \prod_{p|\Delta} \left(1 - \frac{\lambda(p)}{p^s}\right)^{-1} \prod_{p \nmid \Delta} \left(1 - \frac{\lambda(p)}{p^s} + \frac{1}{p^{2s-1}}\right)^{-1},$$

которое в силу оценки Хассе

$$|\lambda(p)| \leq 2\sqrt{p}$$

абсолютно сходится при $\sigma > 3/2$. В этой же области функция $L_E(s)$ может быть записана в виде ряда Дирихле

$$L_E(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda(m)}{m^s} \tag{1.1}$$

с некоторыми коэффициентами $\lambda(m)$. Пусть χ – характер Дирихле по простому модулю q . В полуплоскости $\sigma > 3/2$ определим свертку $L_E(s, \chi)$ функции $L_E(s)$ произведением

$$L_E(s, \chi) = \prod_{p|\Delta} \left(1 - \frac{\lambda(p)\chi(p)}{p^s}\right)^{-1} \prod_{p \nmid \Delta} \left(1 - \frac{\lambda(p)\chi(p)}{p^s} + \frac{\chi^2(p)}{p^{2s-1}}\right)^{-1},$$

или же рядом

$$L_E(s, \chi) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda(m)\chi(m)}{m^s}. \tag{1.2}$$

Пусть $\gamma = \{s \in \mathbb{C} : |s| = 1\}$ – единичная окружность на комплексной плоскости. Предположим, что $\sigma > 3/2$. Тогда в [6]–[8] была получена слабая сходимость при $Q \rightarrow \infty$ соответственно для

$$\begin{aligned}\mu_Q(|L_E(s, \chi)| \in A), & \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \\ \mu_Q(\exp\{i \arg L_E(s, \chi)\} \in A), & \quad A \in \mathcal{B}(\gamma), \\ \mu_Q(L_E(s, \chi) \in A), & \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}).\end{aligned}$$

Работа [9] посвящена многомерной предельной теореме такого же типа для модулей сверток L -функций эллиптических кривых.

Пусть $D = \{s \in \mathbb{C} : \sigma > 1\}$, а $H(D)$ – пространство аналитических в D функций, снабженное топологией равномерной сходимости на компактах. Цель настоящей статьи – доказать предельную теорему о слабой сходимости

$$\mu_Q(L_E(s, \chi) \in A), \quad A \in \mathcal{B}(H(D)),$$

при $Q \rightarrow \infty$ и тем самым распространить приведенные выше результаты за пределы абсолютной сходимости ряда (1.2). Для этой цели мы сначала должны иметь аналитическое продолжение функции $L_E(s, \chi)$ на полуплоскость D . Отметим, что предельная мера будет задана в явном виде.

2. Аналитическое продолжение. Аналитическое продолжение $L_E(s, \chi)$ на всю комплексную плоскость следует из доказанной в [10] гипотезы Вейля–Шимуры–Таниямы и свойств L -функций новых параболических форм. Мы кратко коснемся определений и некоторых результатов.

Пусть

$$SL(2, \mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc = 1 \right\}$$

– полная модулярная группа, и при $N \in \mathbb{N}$ пусть

$$\Gamma_0(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z}) : c \equiv 0 \pmod{N} \right\}$$

– ее подгруппа Гекке. Если функция $F(z)$ голоморфна в полуплоскости $\text{Im } z > 0$, для всех

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$$

с некоторым $\kappa \in 2\mathbb{N}$ удовлетворяет функциональному уравнению

$$F\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^\kappa F(z),$$

голоморфна и нулевая во всех параболических точках подгруппы $\Gamma_0(N)$, то она называется *параболической формой веса κ и уровня N* . Форма $F(z)$ называется *новой* или *примитивной*, если она не является параболической формой уровня, меньшего чем N . Пусть $S_\kappa(\Gamma_0(N))$ – пространство всех параболических форм веса κ и уровня N . Тогда всякая форма $F \in S_\kappa(\Gamma_0(N))$ в бесконечности имеет разложение в ряд Фурье

$$F(z) = \sum_{m=1}^{\infty} c(m) e^{2\pi i m z},$$

а функция

$$L(s, F) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c(m)}{m^s}, \quad \sigma > \frac{\kappa + 1}{2},$$

называется *L-функцией* параболической формы F . Хорошо известно, что функция $L(s, F)$ аналитически продолжается до целой функции.

Для указания связи между функциями $L_E(s)$ и $L(s, F)$ напомним определение кондуктора кривой E с дискриминантом $\Delta \neq 0$. Если простое число $p \nmid \Delta$, то говорится, что E имеет *хорошую редукцию* в p , а если $p \mid \Delta$ – то *плохую редукцию* в p . Плохая редукция называется *мультипликативной*, если $p \mid \Delta$ и $p \nmid 48a$, и *аддитивной*, если $p \mid \Delta$ и $p \mid 48a$. Пусть

$$f_p = \begin{cases} 0, & \text{если } E \text{ имеет хорошую редукцию в } p, \\ 1, & \text{если } E \text{ имеет мультипликативную редукцию в } p, \\ 2, & \text{если } E \text{ имеет аддитивную редукцию в } p \neq 2, 3. \end{cases}$$

Тогда кондуктор N эллиптической кривой определяется формулой

$$N = \prod_p p^{f_p}.$$

Известно, что f_2 и f_3 – некоторые ограниченные числа.

Доказанная в [10], см. также [11], гипотеза Вейля–Шимуры–Таниямы утверждает, что для всякой эллиптической кривой E кондуктора N существует новая параболическая форма

$$F(z) = \sum_{m=1}^{\infty} c(m) e^{2\pi i m z} \in S_2(\Gamma_0(N))$$

такая, что в (1.1) $\lambda(m) = c(m)$. Последнее означает, что

$$L_E(s) = L(s, F) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c(m)}{m^s}.$$

Отсюда вытекает, что $L_E(s)$ – целая функция. Если χ – характер Дирихле по модулю q , то опять имеем, что

$$L_E(s, \chi) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda(m)\chi(m)}{m^s} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c(m)\chi(m)}{m^s}.$$

В силу теоремы 14.19 из [11]

$$F(z, \chi) = \sum_{m=1}^{\infty} c(m)\chi(m)e^{2\pi i m z}$$

является параболической формой. Следовательно, функция $L_E(s, \chi)$ имеет аналитическое продолжение до целой функции.

3. Формулирование основной теоремы. Напоминаем, что γ – единичная окружность. Определим множество

$$\Omega = \prod_p \gamma_p,$$

где $\gamma_p = \gamma$ для всех простых p . Бесконечномерный тор Ω с топологией произведения и операцией поточечного перемножения в силу теоремы Тихонова является компактной топологической абелевой группой. Поэтому на $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$ может быть определена вероятностная мера Хаара m_H . Это дает нам вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$. Через $\omega(p)$ обозначим проекцию элемента $\omega \in \Omega$ на координатное пространство γ_p и на $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$ определим $H(D)$ -значный случайный элемент $L_E(s, \omega)$ формулой

$$L_E(s, \omega) = \prod_{p|\Delta} \left(1 - \frac{\lambda(p)\omega(p)}{p^s}\right)^{-1} \prod_{p \nmid \Delta} \left(1 - \frac{\lambda(p)\omega(p)}{p^s} + \frac{\omega^2(p)}{p^{2s-1}}\right)^{-1}.$$

Пусть P_{L_E} – распределение случайного элемента $L_E(s, \omega)$, т.е.

$$P_{L_E}(A) = m_H\{\omega \in \Omega : L_E(s, \omega) \in A\}, \quad A \in \mathcal{B}(H(D)).$$

Тогда имеет место следующее утверждение. Напоминаем, что q пробегает простые числа.

ТЕОРЕМА 1. При $Q \rightarrow \infty$

$$\mu_Q(L_E(s, \chi) \in A), \quad A \in \mathcal{B}(H(D)),$$

слабо сходится к мере P_{L_E} .

4. Вспомогательные результаты. Доказательство теоремы 1 опирается на утверждение 4.4.1 из [12], предназначенное для изучения дискретного распределения рядов Дирихле, например, для исследования слабой сходимости меры

$$\frac{1}{N+1} \#\{0 \leq k \leq N : L(s + ikh, \chi) \in A\}, \quad A \in \mathcal{B}(H(\hat{D})),$$

где $\hat{D} = \{s \in \mathbb{C} : 1/2 < \sigma < 1\}$, а h – фиксированное положительное число, когда $N \rightarrow \infty$. Это утверждение также применимо для изучения распределения сверток рядов Дирихле с характером Дирихле по растущему модулю. Мы формулируем его в виде, удобном для $L_E(s, \chi)$.

ЛЕММА 1 [12]. Пусть $\{a_m : m \in \mathbb{N}\}$ – последовательность комплексных чисел такая, что при $n \rightarrow \infty$

$$\sum_{m=1}^n |a_m|^2 = O\left(n^{2\alpha}\right), \quad \alpha > 0,$$

и для $\omega \in \Omega$, $\sigma > \alpha + 1/2$

$$X(s, \omega) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m \omega(m)}{m^s}.$$

Предположим, что $\{A_m : m \in \mathbb{N}\}$ – последовательность конечных подмножеств тора Ω такая, что для всякого $\omega \in \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m$ $X(s, \omega)$ имеет аналитическое продолжение в полуплоскость $D_\alpha = \{s \in \mathbb{C} : \sigma > \alpha\}$, удовлетворяющее условиям

1) при $|t| \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{\#A_m} \sum_{\omega \in A_m} |X(\sigma + it, \omega)|^2 = O\left(|t|^A\right), \quad A > 0,$$

равномерно относительно $m \geq 1$ и σ на компактных подмножествах интервала (α, ∞) ;

2) имеем

$$\sum_{\omega \in A_m} |X(s, \omega)|^2 = O(\#A_m), \quad m \rightarrow \infty,$$

равномерно относительно s на компактных подмножествах полуплоскости D_α .

Кроме того, предположим, что выполняется требование:

3) при $m \rightarrow \infty$

$$\frac{\#(A \cap A_m)}{\#A_m}, \quad A \in \mathcal{B}(\Omega),$$

слабо сходится к мере Хаара m_H .

Тогда

$$\frac{1}{\#A_m} \#\{\omega \in A_m : X(s, \omega) \in A\}, \quad A \in H(D_\alpha),$$

при $m \rightarrow \infty$ слабо сходится к распределению случайного элемента $X(s, \omega)$.

Пусть

$$d(m) = \sum_{d|m} 1.$$

ЛЕММА 2. Если c_m – коэффициенты формы $F \in S_\kappa(\Gamma_0(N))$, то

$$|c(m)| \leq m^{(\kappa-1)/2} d(m).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО дано в [13].

Пусть, как обычно, $\Gamma(s)$ обозначает гамма-функцию Эйлера. Положим

$$\psi(s) = (-1)^{\kappa/2} (2\pi)^{2s-\kappa} \frac{\Gamma(\kappa-s)}{\Gamma(s)}.$$

ЛЕММА 3. Пусть $F \in S_\kappa(\Gamma_0(N))$. Тогда при $|\sigma - \kappa/2| \leq 1/2$, $|t| \geq 10$, $1 \leq x, y \leq (t/2\pi)^2$, $xy = (t/2\pi)^2$ имеет место приближенное функциональное уравнение

$$L(s, F) = \sum_{m \leq x} \frac{c(m)}{m^s} + \psi(s) \sum_{m \leq y} \frac{c(m)}{m^{\kappa-s}} + \rho(s, x),$$

где

$$\begin{aligned} \rho(s, x) &\ll |t|^{1/2} x^{(\kappa-1)/2-\sigma} \min\left(1, \frac{x}{|t|}\right) \log |t| \log\left(\frac{|t|}{x} + \frac{x}{|t|}\right) \\ &+ \frac{1}{|t|} x^{(\kappa+1)/2-\sigma} \left(1 + \frac{|t|}{x}\right) \min(x^\varepsilon + \log |t|, y^\varepsilon + \log |t|) \end{aligned}$$

и константа в символе $\ll$ может зависеть только от $\varepsilon > 0$.

Утверждение леммы 3 в [14] получено в случае полной модулярной группы. Поскольку доказательство опирается только на функциональное уравнение, оно остается таким же и в случае подгруппы Гекке.

Пусть G – компактная абелева группа. Тогда на $(G, \mathcal{B}(G))$ существует вероятностная мера Хаара μ . Последовательность $\{x_m : m \in \mathbb{N}\} \subset G$ называется *равномерно распределенной*, если для всякой действительной, ограниченной, измеримой по Борелю функции f

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n f(x_m) = \int_G f d\mu.$$

ЛЕММА 4. Пусть G – компактная абелева группа. Тогда последовательность $\{x_m : m \in \mathbb{N}\} \subset G$ равномерно распределена в G тогда и только тогда, когда для всякого нетривиального характера χ_G имеет место равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n \chi_G(x_m) = 0.$$

Доказательство леммы можно найти, например, в [15; гл. 4, следствие 1.2].

5. Доказательство основной теоремы. Докажем, что

$$Q_q(A) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{q} \#\{\chi \pmod{q}, \chi \neq \chi_0, L_E(s, \chi) \in A\}, \quad A \in \mathcal{B}(H(D)),$$

когда $q \rightarrow \infty$, пробегая простые числа, слабо сходится к P_{L_E} . Для этой цели будем проверять условия леммы 1. В нашем случае $a_m = \lambda(m)\chi(m) = c(m)\chi(m)$. Поэтому из леммы 2 вытекает, что

$$\sum_{m=1}^n |a_m|^2 \leq \sum_{m=1}^n |c(m)|^2 = O\left(\sum_{m=1}^n md^2(m)\right) = O(n^2 \log^4 n).$$

Следовательно, $\alpha = 1$ в лемме 1.

Пусть $\mathbb{P}$ – множество всех простых чисел, а χ – характер Дирихле по модулю $q \in \mathbb{P}$. Определим

$$\widehat{\chi}(p) = \begin{cases} \chi(p), & \text{если } p \in \mathbb{P} \setminus \{q\}, \\ 1, & \text{если } p = q. \end{cases}$$

Тогда $\widehat{\chi}$ является элементом тора Ω . Кроме того имеем, что для всякого характера Дирихле χ по модулю q

$$L_E(s, \chi) = l_{E,q}(s) L_E(s, \widehat{\chi}), \quad (5.1)$$

где

$$l_{E,q} = \begin{cases} 1 - \frac{\lambda(q)}{q^s}, & \text{если } q \mid \Delta, \\ 1 - \frac{\lambda(q)}{q^s} + \frac{1}{q^{2s-1}}, & \text{если } q \nmid \Delta. \end{cases}$$

Через p_m будем обозначать m -е простое число. Пусть χ_0 – главный характер Дирихле и

$$A_m = \{\chi \pmod{p_m} : \chi \neq \chi_0\}.$$

Тогда имеем $\#A_m = p_m - 2$. Определим еще одно множество

$$\hat{A}_m = \{\hat{\chi} : \chi \in A_m\}.$$

На некотором вероятностном пространстве с мерой P определим $H(D)$ -значные случайные элементы $X_m = X_m(s)$ и $\hat{X}_m = \hat{X}_m(s)$ соответственно формулами

$$\begin{aligned} P(X_m = L_E(s, \chi)) &= \frac{1}{p_m - 2}, & \chi \in A_m, \\ P(\hat{X}_m = L_E(s, \hat{\chi})) &= \frac{1}{p_m - 2}, & \hat{\chi} \in \hat{A}_m. \end{aligned}$$

Из формулы (5.1) имеем, что для всех $m \geq 2$

$$X_m(s) = l_{E, p_m}(s) \hat{X}_m(s).$$

Для слабой сходимости Q_q при $q \rightarrow \infty$ следует показать, что X_m при $m \rightarrow \infty$ сходится по распределению к P_{L_E} . Очевидно, что

$$l_{E, p_m}(s) \rightarrow 1 \quad (5.2)$$

при $m \rightarrow \infty$ в пространстве $H(D)$. Поэтому достаточно изучить сходимость случайного элемента $\hat{X}_m$. Таким образом, последовательности $\{A_m : m \in \mathbb{N}\}$ в лемме 1 будет соответствовать последовательность $\{\hat{A}_m : m \in \mathbb{N}\}$, а $X(s, \omega) = L_E(s, \hat{\chi})$. В силу (5.2) $L_E(s, \hat{\chi})$ можем заменить на $L_E(s, \chi)$.

Обычным путем из леммы 3 получаем, что при $|t| \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{q} \sum_{\substack{\chi \pmod{q} \\ \chi \neq \chi_0}} |L_E(\sigma + it, \chi)|^2 = O\left(|t|^A\right), \quad A > 0,$$

равномерно для $q \geq 3$ и σ на компактных подмножествах $K \subset (1, \infty)$. Аналогично, при $q \rightarrow \infty$ имеет место оценка

$$\frac{1}{q} \sum_{\substack{\chi \pmod{q} \\ \chi \neq \chi_0}} |L_E(s, \chi)|^2 = O(1)$$

равномерно по s на компактных подмножествах $K \subset H(D)$.

Остается проверить условие 3° леммы 1, означающее равномерную распределенность последовательности $\{\hat{A}_m : m \in \mathbb{N}\}$. Для этого воспользуемся леммой 4. Хорошо известно, что характер χ_Ω группы Ω имеет вид

$$\chi_\Omega(\omega) = \prod_p \omega^{k_p}(p),$$

где только конечное число целых k_p не равны 0. Отсюда, собирая положительные и отрицательные k_p , находим, что $\chi_\Omega(\omega) = \omega(m_1) \overline{\omega(m_2)}$, причем $(m_1, m_2) = 1$, а черта обозначает комплексную сопряженность. Отсюда имеем, что

$$\frac{1}{\#\hat{A}_m} \sum_{\omega \in \hat{A}_m} \chi_\Omega(\omega) = \frac{1}{p_m - 2} \sum_{\omega \in \hat{A}_m} \omega(m_1) \overline{\omega(m_2)} = \frac{1}{p_m - 2} \sum_{\substack{\chi \pmod{p_m} \\ \chi \neq \chi_0}} \hat{\chi}(m_1) \overline{\hat{\chi}(m_2)}. \quad (5.3)$$

Здесь $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ – фиксированные числа. Поэтому при достаточно большом m они и их разность не делятся на p_m . Следовательно, из (5.3) и ортогональности характеров Дирихле вытекает, что при $m \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\#\hat{A}_m} \sum_{\omega \in \hat{A}_m} \chi_\Omega(\omega) &= \frac{1}{p_m - 2} \sum_{\substack{\chi \pmod{p_m} \\ \chi \neq \chi_0}} \chi(m_1) \overline{\chi(m_2)} = -\frac{\chi_0(m_1) \overline{\chi_0(m_2)}}{p_m - 2} \\ &+ \frac{1}{p_m - 2} \sum_{\chi \pmod{p_m}} \chi(m_1) \overline{\chi(m_2)} = -\frac{1}{p_m - 2} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

В силу леммы 4 заключаем, что последовательность $\{\hat{A}_m : m \in \mathbb{N}\}$ равномерно распределена.

Таким образом, все условия леммы 1 выполнены для $\hat{X}_m$, поэтому

$$\frac{1}{q} \#\{\chi \pmod{q}, \chi \neq \chi_0 : L_E(s, \hat{\chi}) \in A\}, \quad A \in \mathcal{B}(H(D)),$$

при $q \rightarrow \infty$ слабо сходится к P_{L_E} . Отсюда и из (5.2) следует, что и Q_q при $q \rightarrow \infty$ слабо сходится к P_{L_E} .

Остается перейти к $\mu_Q(L_E(s, \chi) \in A)$. Пусть A – множество непрерывности предельной меры P_{L_E} , т.е. $P_{L_E}(\partial A) = 0$, где ∂A – граница множества A . Тогда из слабой сходимости Q_q имеем, что

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \frac{1}{q} \#\{\chi \pmod{q}, \chi \neq \chi_0 : L_E(s, \chi) \in A\} = P_{L_E}(A).$$

Отсюда при $q \rightarrow \infty$

$$\#\{\chi \pmod{q}, \chi \neq \chi_0 : L_E(s, \chi) \in A\} = qP_{L_E}(A) + o(q). \quad (5.4)$$

Фиксируем $\varepsilon > 0$. Тогда найдется q_0 такое, что при $q \geq q_0$

$$\#\{\chi \pmod{q}, \chi \neq \chi_0 : L_E(s, \chi) \in A\} - qP_{L_E}(A) < \varepsilon q.$$

Следовательно, в силу (5.4)

$$\begin{aligned} \mu_Q(L_E(s, \chi) \in A) - \frac{P_{L_E}(A)}{M_Q} \sum_{q \leq Q} q \\ = O\left(\frac{1}{M_Q} \sum_{q \leq q_0} q\right) + O\left(\frac{\varepsilon}{M_Q} \sum_{q_0 \leq q \leq Q} q\right) = O(\varepsilon) + o(1) \end{aligned}$$

при $Q \rightarrow \infty$. Отсюда при $Q \rightarrow \infty$

$$\mu_Q(L_E(s, \chi) \in A) = P_{L_E}(A) + o(1).$$

Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] S. Chowla, P. Erdős, “A theorem on the values of L -function”, *J. Indian Math. Soc. (N.S.)*, **15** (1951), 11–18.
- [2] P. D. T. A. Elliott, “On the distribution of the values of L -series in the half-plane $\sigma > 1/2$ ”, *Indag. Math.*, **33** (1971), 222–234.
- [3] P. D. T. A. Elliott, “On the distribution of $\arg L(s, \chi)$ in the half-plane $\sigma > \frac{1}{2}$ ”, *Acta Arith.*, **20** (1972), 155–159.
- [4] Э. Станкус, “Распределение L -функций Дирихле”, *Литовск. матем. сб.*, **15:2** (1975), 127–134.
- [5] A. Laurinćikas, *Limit Theorems for the Riemann Zeta-Function*, Math. Appl., **352**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1996.
- [6] V. Garbaliuskienė, A. Laurinćikas, E. Stankus, “Limit theorems for twists of L -functions of elliptic curves”, *Lith. Math. J.*, **50:2** (2010), 187–197.
- [7] V. Garbaliuskienė, A. Laurinćikas, “Limit theorems for twists of L -functions of elliptic curves. II”, *Math. Model. Anal.*, **17:1** (2012), 90–99.
- [8] V. Garbaliuskienė, A. Laurinćikas, “Limit theorems for twists of L -functions of elliptic curves. IV”, *Math. Model. Anal.*, **19:1** (2014), 66–74.
- [9] V. Garbaliuskienė, A. Laurinćikas, “A limit theorem for twists of L -functions of elliptic curves”, *Math. Model. Anal.*, **19:5** (2014), 696–705.
- [10] C. Breuil, B. Conrad, F. Diamond, R. Taylor, “On the modularity of elliptic curves over $\mathbb{Q}$: wild 3-adic exercises”, *J. Amer. Math. Soc.*, **14:4** (2001), 843–939.
- [11] H. Iwaniec, E. Kowalski, *Analytic Number Theory*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., **53**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004.
- [12] B. Bagchi, *The Statistical Behaviour and Universality Properties of the Riemann Zeta-Function and Other Allied Dirichlet Series*, Ph.D. Thesis, Indian Stat. Institute, Calcutta, 1981.
- [13] P. Deligne, “Le conjecture de Weil. I”, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, **43** (1974), 273–307.
- [14] M. Jutila, “On the approximate functional equation for $\zeta^2(s)$ and other Dirichlet series”, *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)*, **37** (1986), 193–209.
- [15] L. Kuipers, H. Niederreiter, *Uniform Distribution of Sequences*, Pure Appl. Math., John Wiley & Sons, New York, 1974.

А. Лауринчикас

Vilnius University, Литва

E-mail: antanas.laurincikas@mif.vu.lt

Поступило

08.04.2015