Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. В. Хамисов, Нахождение корней нелинейного уравнения методом вогнутых опорных функций, *Матем. заметки*, 2015, том 98, выпуск 3, 427–435

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10705>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 14:37:57

Нахождение корней нелинейного уравнения методом вогнутых опорных функций

О. В. Хамисов

Предлагается метод нахождения корней нелинейных уравнений на отрезке, обобщающий метод Ньютона. Определяется класс функций, для которых предлагаемый метод является сходящимся. Оценивается скорость сходимости и приводятся результаты численного эксперимента.

Библиография: 10 названий.

DOI: 10.4213/mzm10705

Введение. В статье описан, обоснован и протестирован метод нахождения корней нелинейного уравнения на отрезке, предложенный ранее для нахождения корней полинома на отрезке [1]. Предлагаемый метод имеет некоторое сходство с методом Мюллера (или методом парабол [2]) и его модификациями [3]. В отличие от метода парабол метод вогнутых опорных функций основан на других геометрических конструкциях и для функций, рассматриваемых в данном разделе, является сходящимся, тогда как метод парабол может не сходиться (для этих же функций). В [4] приведен более строгий результат: при любых начальных данных метод парабол поиска корней полинома не является сходящимся. Аналогичный подход для функций, удовлетворяющих условию Липшица, описан в [5], [6]. Данная статья является дальнейшим развитием исследований, проведенных в указанных статьях; основной ее результат состоит в оценке скорости сходимости предлагаемого метода.

1. Постановка задачи. Задача формулируется следующим образом: задана функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ и отрезок $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$, $\alpha \leq \beta$. Требуется найти точку $x^* \in [\alpha, \beta]$ такую, что

$$f(x^*) = 0, \quad (1.1)$$

или установить, что такой точки не существует. В статье предполагается, что функция f удовлетворяет следующему определению.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Будем говорить, что функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ имеет выпуклую опорную функцию-мажоранту и вогнутую опорную функцию-миноранту, если существуют функции $\varphi: \mathbb{R} \times [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ и $\psi: \mathbb{R} \times [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ такие, что

- 1) функция $\varphi(\cdot, y)$ непрерывна и выпукла $\forall y \in [\alpha, \beta]$;
- 2) функция $\psi(\cdot, y)$ непрерывна и вогнута $\forall y \in [\alpha, \beta]$;

$$3) \psi(x, y) \leq f(x) \leq \varphi(x, y) \quad \forall (x, y) \in [\alpha, \beta] \times [\alpha, \beta];$$

$$4) \psi(y, y) = f(y) = \varphi(y, y) \quad \forall y \in [\alpha, \beta].$$

Функцию φ будем называть *выпуклой опорной функцией-мажорантой*, а ψ – *вогнутой опорной функцией-минорантой*.

Класс функций, удовлетворяющих данному определению, и конструктивные правила построения опорных функций мажорант и минорант описан в [7], там же показано, что функции f из данного класса непрерывны на $[\alpha, \beta]$.

Не уменьшая общности, будем считать, что

$$f(\alpha) > 0. \quad (1.2)$$

Действительно, если $f(\alpha) = 0$, то корень найден, $x^* = \alpha$; если $f(\alpha) < 0$, то, переходя от функции f к функции $-f$, добьемся желаемого.

2. Метод опорных вогнутых функций. Предлагаемый в статье метод использует выпуклые и вогнутые опорные функции для исключения части отрезка $[\alpha, \beta]$, которая не содержит решения задачи (1.1). Идея метода состоит в следующем. Пусть f удовлетворяет введенному выше определению. Если $\psi(\beta, \alpha) > 0$, то в силу вогнутости $\psi(\cdot, \alpha)$ и условия (1.2)

$$\min_{x \in [\alpha, \beta]} f(x) \geq \min_{x \in [\alpha, \beta]} \psi(x, \alpha) = \min\{\psi(\alpha, \alpha), \psi(\beta, \alpha)\} = \min\{f(\alpha), \psi(\beta, \alpha)\} > 0,$$

т.е. f не имеет корней на $[\alpha, \beta]$. Если $\psi(\beta, \alpha) \leq 0$, то опять же в силу вогнутости $\psi(\cdot, \alpha)$ существует единственная точка $\gamma \in [\alpha, \beta]: \psi(\gamma, \alpha) = 0$. Нетрудно видеть, что

$$f(x) \geq \psi(x, \alpha) > 0 \quad \forall x \in [\alpha, \gamma].$$

Следовательно, если корень существует, то он принадлежит отрезку $[\gamma, \beta]$. Если $f(\gamma) = 0$, то корень найден, $x^* = \gamma$; иначе $f(\gamma) > 0$ и, повторяя все рассуждения уже для отрезка $[\gamma, \beta]$, снова сократим область поиска и т.д. Таким образом, двигаясь слева направо, либо найдем корень уравнения, либо установим, что такого корня не существует.

Опишем теперь принципиальную схему метода вогнутых опорных функций.

Входная информация: функция f , имеющая вогнутую опорную функцию-миноранту ψ и удовлетворяющая условию (1.2), отрезок $[\alpha, \beta]$.

Шаг 0. Присвоить $x_0 \leftarrow \alpha$, $k \leftarrow 0$.

Шаг 1. Вычислить $\psi(\beta, x_k)$. Если $\psi(\beta, x_k) > 0$, то задача (1.1) не имеет решения, перейти на шаг 5. Иначе перейти на шаг 2.

Шаг 2. Найти точку x_{k+1} такую, что

$$\psi(x_{k+1}, x_k) = 0. \quad (2.1)$$

Шаг 3. Если $f(x_{k+1}) = 0$, то x_{k+1} есть решение задачи (1.1), перейти на шаг 5. В противном случае перейти на шаг 4.

Шаг 4. Увеличить k : $k \leftarrow k + 1$ и перейти на шаг 1.

Шаг 5. Стоп.

Отметим, что попадание на шаг 2 возможно только в случае, если $\psi(x_k, x_k) > 0$ и $\psi(\beta, x_k) \leq 0$. Непрерывность и вогнутость функции $\psi(\cdot, x_k)$ гарантируют существование единственного корня уравнения $\psi(x, x_k) = 0$ на отрезке $[x_k, \beta]$, поиск которого можно осуществлять любым известным методом, например, методом половинного деления или секущих. Очевидно, что если метод конечен, то либо устанавливается неразрешимость задачи (1.1) на шаге 1, либо находится искомым корень на шаге 3.

Перейдем к обоснованию сходимости метода.

ТЕОРЕМА 1. *Предположим, что функция $\psi(x, \cdot)$ полунепрерывна снизу. Тогда если последовательность $\{x_k\}$ бесконечна, то она сходится к решению задачи (1.1).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу построения последовательность $\{x_k\}$ монотонна и ограничена сверху:

$$x_1 < x_2 < \dots < \beta.$$

Поэтому существует

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x^*, \quad x^* \in [\alpha, \beta].$$

Далее, $f(x_k) > 0 \quad \forall k$ и в силу непрерывности f

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = f(x^*) \geq 0. \quad (2.2)$$

С другой стороны, поскольку $x_{k+1} \leq x^*$, из (2.1) имеем $\psi(x^*, x^k) \leq 0 \quad \forall k$. Переходя к пределу и используя полунепрерывность снизу ψ по второму аргументу, получаем

$$f(x^*) = \psi(x^*, x^*) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \psi(x^*, x_k) \leq 0. \quad (2.3)$$

Из (2.2) и (2.3) следует $f(x^*) = 0$, что и требовалось доказать.

Как показывает следующий пример, требование полунепрерывности снизу по второму аргументу функции-миноранты ψ нельзя ослабить.

ПРИМЕР 2.1. Пусть $f(x) = 2 - x$, $\alpha = 0$, $\beta = 2$. Очевидно, что корень $x^* = 2$. Зададим функцию

$$\psi(x, y) = \begin{cases} \min \left\{ 2 - x, y + \frac{2}{1-y} - \frac{2(2-y)}{1-y} x \right\}, & 0 \leq y < 1, \\ 2 - y - |x - y|, & 1 \leq y \leq 2. \end{cases} \quad (2.4)$$

Нетрудно проверить, что ψ есть опорная функция-миноранта f на $[0, 2]$. Применим метод вогнутых опорных функций, стартуя из точки $x_0 = 0$. Тогда метод будет генерировать последовательность $x_k = 1 - 1/2^k$ и $\lim_{k \rightarrow \infty} x^k = 1 < 2 = x^*$, т.е. последовательность $\{x^k\}$ не сходится к корню $x^* = 2$. Здесь все дело в том, что функция

$$\psi(x^*, y) = \psi(2, y) = \begin{cases} y - 4 + \frac{2}{y-1}, & 0 \leq y < 1, \\ 0, & 1 \leq y \leq 2 \end{cases}$$

не является полунепрерывной снизу. В общем случае (2.4) функция ψ полунепрерывна снизу по второму аргументу при $x \in [0, 1)$ и полунепрерывна сверху по второму аргументу при $x \in [1, 2]$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если известно, что корень x^* существует, то в условиях теоремы 1 достаточно потребовать лишь полунепрерывности снизу функции $\psi(x^*, \cdot)$.

Перейдем теперь к анализу скорости сходимости метода вогнутых опорных функций. Прежде всего, нам потребуется следующее вспомогательное утверждение.

ЛЕММА [8]. Если числовая последовательность $\{\mu_k\}$ такова, что

$$\mu_k - \mu_{k+1} \geq \tau_k \mu_k, \quad \mu_k > 0, \quad \tau_k \geq 0, \quad k = 0, 1, \dots,$$

то

$$\mu_k \leq \mu_0 \prod_{j=0}^{k-1} (1 - \tau_j), \quad k = 1, 2, \dots$$

В частности, если $\tau_k \geq \gamma > 0$, то

$$\mu_k \leq q \mu_{k-1} \leq \mu_0 q^k, \quad k = 1, 2, \dots,$$

где $q = 1 - \gamma$.

Условия, гарантирующие линейную сходимость, приводятся в следующей теореме.

ТЕОРЕМА 2. Пусть, как и в теореме 1, функция $\psi(x, \cdot)$ полунепрерывна снизу, последовательность $\{x_k\}$, генерируемая методом вогнутых опорных функций, бесконечна и существует константа $\rho > 0$:

$$|\psi(\beta, x_k)| \leq \rho f(x_k), \quad k = 0, 1, \dots \quad (2.5)$$

Тогда существует корень x^* и

$$x^* - x_{k+1} \leq q(x^* - x_k), \quad k = 0, 1, \dots, \quad (2.6)$$

где $q = \rho/(\rho + 1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существование корня x^* следует из теоремы 1. Уравнение прямой, проходящей через точки $(x_k, f(x_k))$ и $(\beta, \psi(\beta, x_k))$, имеет вид

$$l_k(x) = \frac{\psi(\beta, x_k) - f(x_k)}{\beta - x_k} x + \frac{\beta f(x_k) - x_k \psi(\beta, x_k)}{\beta - x_k}.$$

Найдем точку $\tilde{x}_k : l_k(\tilde{x}_k) = 0$,

$$\tilde{x}_k = \frac{\beta f(x_k) - x_k \psi(\beta, x_k)}{f(x_k) - \psi(\beta, x_k)}.$$

В силу вогнутости $\psi(\cdot, x_k)$ имеем $\psi(x, x_k) \geq l_k(x) \quad \forall x \in [x_k, \beta]$. Кроме того, по построению

$$f(x_k) = \psi(x_k, x_k) = l_k(x_k) > 0, \quad \psi(\beta, x_k) = l_k(\beta) \leq 0.$$

Поэтому $x_k \leq \tilde{x}_k \leq x_{k+1}$ и

$$\tilde{x}_k - x_k = \frac{f(x_k)(\beta - x_k)}{f(x_k) - \psi(\beta, x_k)} \leq x_{k+1} - x_k. \quad (2.7)$$

Поскольку $x^* \leq \beta$, из (2.7) имеем

$$\frac{f(x_k)}{f(x_k) + |\psi(\beta, x_k)|} (x^* - x_k) \leq x_{k+1} - x_k. \quad (2.8)$$

Введем в рассмотрение числовую последовательность $\mu_k = x^* - x_k$. Тогда (2.8) можно переписать в следующем виде:

$$\mu_k - \mu_{k+1} \geq \tau_k \mu_k, \quad (2.9)$$

где

$$\tau_k = \frac{f(x_k)}{f(x_k) + |\psi(\beta, x_k)|}. \quad (2.10)$$

Из условия теоремы (2.5) следует

$$\tau_k \geq \frac{1}{\rho + 1} = \gamma. \quad (2.11)$$

Из (2.9)–(2.11) на основании приведенной выше леммы получаем требуемое неравенство (2.6).

СЛЕДСТВИЕ. Если в условиях теоремы 2 вместо существования константы ρ потребовать существования последовательности $\rho_k > 0$:

$$|\psi(\beta, x_k)| \leq \rho_k f(x_k), \quad k = 0, 1, \dots, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \rho_k = 0,$$

то справедлива оценка

$$x^* - x_{k+1} \leq q_k (x^* - x_k), \quad k = 0, 1, \dots, \quad q_k = \frac{\rho_k}{1 + \rho_k}.$$

3. Квадратичная сходимость. Рассмотрим класс функций f , представимых в виде разности двух непрерывных выпуклых функции g и h :

$$f(x) = g(x) - h(x). \quad (3.1)$$

Опираясь на теорему Стоуна–Вейерштрасса, можно доказать, что множество функций, представимых в виде разности двух непрерывных выпуклых функций, всюду плотно во множестве непрерывных функций. Иными словами, любую непрерывную функцию можно сколь угодно точно приблизить функцией, имеющей представление (3.1). Свойства таких функций и конструктивные правила построения вспомогательных функций g и h описаны в [9].

Используя свойство выпуклости g и h , для каждой функции f вида (3.1) можно определить выпуклую опорную функцию-мажоранту и также вогнутую опорную функцию-миноранту следующим образом:

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= g(x) - p(x - y), & p &\in \partial h(y), \\ \psi(x, y) &= q(x - y) - h(x), & q &\in \partial g(y), \end{aligned}$$

где $\partial h(y)$ и $\partial g(y)$ – субдифференциалы функций h и g в точке y соответственно. Следовательно, всякая функция, представимая в виде разности двух выпуклых функций, является функцией, имеющей выпуклую мажоранту и вогнутую миноранту. Обратное утверждение в общем случае несправедливо.

Нетрудно видеть, что метод опорных вогнутых функций является обобщением метода Ньютона. Известно, что метод Ньютона обладает квадратичной сходимостью в окрестности корня [1]. В общем случае метод опорных вогнутых функций не обладает квадратичной сходимостью. Тем не менее, при определенных условиях квадратичной сходимости можно добиться и для метода опорных вогнутых функций.

ТЕОРЕМА 3. *Предположим, что решение x^* задачи (1.1) существует, функция f представима в виде (3.1) и справедливы следующие условия:*

- 1) *функция g дважды непрерывно дифференцируема и*

$$|g'(x)| \geq \delta > 0, \quad |g''(x)| \leq M; \quad (3.2)$$

- 2) *функция h монотонно неубывает на отрезке $[\alpha, \beta]$, т.е. из $x \leq y$, $x, y \in [\alpha, \beta]$ следует $h(x) \leq h(y)$;*

- 3) *функция g монотонно убывает на $[\alpha, x^*]$: $g'(x) < 0 \quad \forall x \in [\alpha, x^*]$.*

Тогда последовательность $\{x_k\}$, генерируемая методом вогнутых опорных функций, удовлетворяет неравенству

$$|x^* - x_{k+1}| \leq \frac{M}{2\delta} (x^* - x_k)^2. \quad (3.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как g дважды непрерывно дифференцируема, то

$$0 = g(x^*) - h(x^*) = g(x_k) + g'(x_k)(x^* - x_k) + \frac{1}{2} g''(z_k)(x^* - x_k)^2 - h(x^*),$$

где $z_k \in (x_k, x^*)$. Поэтому

$$x^* = x_k - \frac{g(x_k)}{g'(x_k)} - \frac{1}{2} \frac{g''(z_k)}{g'(x_k)} (x^* - x_k)^2 + \frac{h(x^*)}{g'(x_k)}. \quad (3.4)$$

Из (2.1) следует

$$g(x_k) + g'(x_k)(x_{k+1} - x_k) - h(x_{k+1}) = 0.$$

Выразим x_k из последнего равенства

$$x_k = x_{k+1} + \frac{g(x_k)}{g'(x_k)} - \frac{h(x_{k+1})}{g'(x_k)}. \quad (3.5)$$

Из (3.4) и (3.5) имеем

$$x^* = x_{k+1} - \frac{h(x_{k+1})}{g'(x_k)} - \frac{1}{2} \frac{g''(z_k)}{g'(x_k)} (x^* - x_k)^2 + \frac{h(x^*)}{g'(x_k)}.$$

Откуда следует

$$x^* - x_{k+1} = \frac{h(x^*) - h(x_{k+1})}{g'(x_k)} - \frac{1}{2} \frac{g''(z_k)}{g'(x_k)} (x^* - x_k)^2.$$

В силу предположений теоремы $g'(x_k) < 0$ и $h(x^*) - h(x_{k+1}) \geq 0$. Поэтому

$$\frac{h(x^*) - h(x_{k+1})}{g'(x_k)} \leq 0.$$

Следовательно,

$$x^* - x_{k+1} \leq \frac{1}{2} \frac{g''(z_k)}{|g'(x_k)|} (x^* - x_k)^2.$$

Из последнего неравенства и условия (3.2) получаем требуемое неравенство (3.3).

4. Вычислительный эксперимент. Ниже приводятся результаты небольшого численного тестирования метода вогнутых опорных функций.

ПРИМЕР 4.1. Пусть на отрезке [5], [10] требуется найти корень функции

$$f(x) = -\sin(x) - \sin(3x + 1) + 1.5.$$

Вторая производная

$$f''(x) = \sin(x) + 9\sin(3x + 1),$$

и поэтому $|f''(x)| \leq 10$. Следовательно, функция

$$g(x) = -\sin(x) - \sin(3x + 1) + 1.5 + 5x^2$$

есть выпуклая функция. Таким образом, $f(x) = g(x) - h(x)$, где $h(x) = 5x^2$, т.е. f представима в виде разности двух выпуклых функций. Первые 13 итераций метода опорных вогнутых функций указаны в таблице 1.

Таблица 1. Нахождение корня нелинейного уравнения: результаты вычислений первых 13 итераций.

k	x_k	$f(x_k)$
1	5.000000000	2.746827591
2	6.044050155	1.458014258
3	6.322138457	0.562328977
4	6.498150908	0.289430363
5	6.674822202	0.295292623
6	7.008028353	0.869912575
7	7.706922103	1.358674353
8	8.082676069	0.411005026
9	8.204845348	0.097553384
10	8.243723969	0.011646446
11	8.249201811	0.000240584
12	8.249318253	0.000001060
13	8.249318305	0.000000050

Следует отметить немонотонный характер последовательности $\{f(x_k)\}$: сначала она убывает, затем возрастает, затем снова убывает и на последних итерациях демонстрирует ускорение сходимости.

ПРИМЕР 4.2. Предположим, что f – непрерывно дифференцируемая функция, производная которой удовлетворяет условию Липшица с константой L . Требуется определить корень этой функции на отрезке $[\alpha, \beta]$ (в предположении, что он существует). Будем считать, что $f(\alpha) > 0$. Вогнутая миноранта

$$\psi(x, y) = f(y) + f'(y)(x - y) - \frac{L}{2}(x - y)^2.$$

В силу (2.1)

$$f(x_k) + f'(x_k)(x_{k+1} - x_k) - \frac{L}{2}(x_{k+1} - x_k)^2 = 0.$$

Откуда следует

$$x_{k+1} = x_k + \frac{f'(x_k) + \sqrt{[f'(x_k)]^2 + 2Lf(x_k)}}{L}. \quad (4.1)$$

Итеративный процесс (4.1) сходится к искомому корню при $x_0 = \alpha$.

ПРИМЕР 4.3. Пусть $f(x) = -\arctan(x)$. Требуется найти корень $f(x)$ на $[-2, 2]$. Хорошо известно (см. [10]), что при $|x_0| = 1.3917452$ метод Ньютона заикливается:

$$x_1 = -x_0, \quad x_2 = x_0, \quad x_3 = -x_0, \quad \dots;$$

при $|x_0| > 1.3917452$ метод Ньютона расходится; при $|x_0| < 1.3917452$ метод Ньютона сходится. Нетрудно видеть, что в данном случае применим процесс (4.1) с

$$L = \max\{|f'(x)| : x \in [-2, 2]\} = \max\left\{\left|\frac{1}{1+x^2}\right| : x \in [-2, 2]\right\} = 1.$$

Стартуя с $x_0 = -2$, после пятой итерации получаем $x_5 = 5.1 \cdot 10^{-12}$.

Интересно сравнить оба метода, стартуя, например, из точки $x_0 = -1$. Результаты первых пяти итераций в этом случае приведены в таблице 2.

Таблица 2. Сравнение метода Ньютона и метода опорных вогнутых функций (процесс (4.1)): результаты первых пяти итераций.

k	x_k : метод Ньютона	x_k : процесс (4.1)
1	0.5707963	-0.1506311
2	-0.1168599	-0.0081172
3	0.00110610	-0.0000323
4	$-7.96 \cdot 10^{-10}$	$-5.26 \cdot 10^{-10}$
5	$3.36 \cdot 10^{-28}$	$-1.36 \cdot 10^{-19}$

Из таблицы 2 следует, что для данного примера на первых итерациях метод вогнутых опорных минорант генерирует более точные приближения к искомому корню, чем метод Ньютона, но на заключительных итерациях метод Ньютона имеет более высокую точность.

Можно предложить следующее эвристическое усиление процесса (4.1). При достаточно хорошем приближении к корню уравнения можно считать, что в (4.1) $L \approx |f'(x_k)|$. Например, если $f'(x^*) \leq \delta_0 < 0$ (x^* – корень уравнения), то при достаточно больших k $f'(x_k) \leq \delta_1 < 0$. Тогда (4.1) можно переписать в следующем виде:

$$x_{k+1} = x_k - 1 + \sqrt{1 - 2 \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}}. \quad (4.2)$$

Нетрудно показать, что при дополнительном условии $f(x_k) \geq 0$ последовательность $\{x_k\}$, генерируемая итерационным процессом (4.2), также сходится к корню уравнения. Модифицировать процесс (4.1) можно следующим образом: если на k -й итерации выполняются условия $f'(x_k) < 0$, $f(x_k) \geq 0$, то точку x_{k+1} находить в соответствии с (4.2), иначе в соответствии с (4.1). Численное сравнение основного и модифицированного процесса для рассматриваемого примера приведено в таблице 3 ($x_0 = -2$).

Таблица 3. Сравнение основного и модифицированного методов опорных вогнутых функций: результаты первых шести итераций.

k	x_k : процесс (4.1)	x_k : модифицированный процесс
1	-0.6985682	-0.6985682
2	-0.0778741	-0.0208703
3	-0.0025034	-0.0002075
4	-0.0000032	$-2.1 \cdot 10^{-8}$
5	$-5.1 \cdot 10^{-12}$	$-2.3 \cdot 10^{-16}$
6	$-1.3 \cdot 10^{-23}$	$-1.0 \cdot 10^{-31}$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] О. В. Хамисов, “Нахождение вещественных корней полинома на отрезке методом опорных вогнутых функций”, *Оптимизация, Управление, Интеллект*, **3**, ИДСТУ, Иркутск, 1999, 167–177.
- [2] Н. Н. Калиткин, *Численные методы*, Наука, М., 1978.
- [3] Г. П. Кутищев, *Решение алгебраических уравнений произвольной степени*, Изд-во ЛКИ, М., 2010.
- [4] А. В. Хлямков, “Замечание о сходимости метода парабол”, *Матем. заметки*, **63:2** (1998), 309.
- [5] Я. Д. Сергеев, Д. Е. Квасов, *Диагональные методы глобальной оптимизации*, ФИЗМАТЛИТ, М., 2008.
- [6] A. Molinaro, Y. D. Sergeev, “Finding the minimal root of an equation with the multiextremal and nondifferentiable left-hand part”, *Numer. Algorithms*, **28:1-4** (2001), 255–272.
- [7] О. В. Хамисов, “Глобальная оптимизация функций с вогнутой опорной минорантой”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **44:9** (2004), 1552–1563.
- [8] В. Г. Карманов, *Математическое программирование*, Физматлит, М., 2000.
- [9] R. Horst, H. Tuy, *Global Optimization. Deterministic Approaches*, Springer-Verlag, Berlin, 1996.
- [10] Дж. Дэннис, мл., Р. Шнабель, *Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений*, Мир, М., 1988.

О. В. Хамисов

Институт систем энергетики им. Л. А. Мелентьева

СО РАН, г. Иркутск

E-mail: khamisov@isem.sei.irk.ru

Поступило

16.12.2014