Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Панасенко, Почти конечномерные альтернативные алгебры, *Матем. заметки*, 2015, том 98, выпуск 5, 747–755

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10709>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 17:51:17

Почти конечномерные альтернативные алгебры

А. С. Панасенко

Исследуются альтернативные почти конечномерные алгебры – бесконечномерные алгебры, в которых каждый ненулевой идеал имеет конечную коразмерность. Доказано, что такие алгебры первичны. В неассоциативном случае доказана нетеровость по односторонним идеалам, исследованы случаи колец Кэли–Диксона и исключительных алгебр.

Библиография: 12 названий.

DOI: 10.4213/mzm10709

Понятие почти конечномерности (почти конечности) возникало независимо для различных алгебраических систем (колец и групп). В [1] почти конечномерные алгебры Ли использовали для описания одного класса алгебр Ли. В [2] изучались ассоциативные почти конечномерные алгебры. В частности, было доказано, что афинная, полупрimitивная, почти конечномерная алгебра над несчетным полем является либо примитивной, либо PI-алгеброй. В [3] очень подробно изучались ассоциативные почти конечномерные $\mathbb{N}$ -градуированные алгебры.

Одним из основных результатов теории ассоциативных почти конечномерных алгебр является утверждение о первичности таких алгебр [4]. Однако, другие классы оставались практически неизученными.

В настоящей работе изучаются альтернативные почти конечномерные алгебры. В частности, доказывается, что все такие алгебры являются либо ассоциативными первичными алгебрами, либо нетеровыми справа первичными альтернативными алгебрами. Если почти конечномерная алгебра является кольцом Кэли–Диксона с единицей, то оно локально конечно над центром, а центр – почти конечномерная алгебра размерности Крулля 1. Отметим, что идеи и методы, используемые для исследования почти конечномерных альтернативных алгебр восходят к работам [5], [6].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Алгебра A над полем F называется *альтернативной*, если для любых элементов $x, y \in A$ выполняются следующие тождества:

$$(x, x, y) = 0,$$

$$(x, y, y) = 0,$$

где $(a, b, c) = (ab)c - a(bc)$ – ассоциатор элементов a, b, c .

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 14-01-00014).

Для элемента $x \in A$ через R_x (L_x) обозначим оператор правого (левого) умножения в алгебре A , т.е. $R_x: a \in A \mapsto ax \in A$ ($L_x: a \in A \mapsto xa \in A$). Пусть $M(A)$ – алгебра умножений алгебры A , т.е. подалгебра алгебры эндоморфизмов векторного пространства A , порожденная операторами R_x, L_x , где $x \in A$. В алгебре $M(A)$ справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} R_x R_y + R_y R_x &= R_{xy+yx}, \\ L_x L_y + L_y L_x &= L_{xy+yx}, \\ L_x R_y &= R_y L_x - R_x R_y + R_{xy}. \end{aligned}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Алгебра A называется *полупервичной*, если для любого $I \trianglelefteq A$ (I – идеал алгебры A) из того, что $I^2 = 0$, следует $I = 0$. Алгебра A называется *первичной*, если для любых $I, J \trianglelefteq A$ из того, что $IJ = 0$, следует $I = 0$ или $J = 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Алгебра A называется *почти конечномерной*, если $\dim(A) = \infty$ и $\dim(A/I) < \infty$ для любого ненулевого $I \trianglelefteq A$.

ПРИМЕР. Пусть $\mathcal{C}$ – алгебра Кэли–Диксона над полем F , т.е. центр $Z(\mathcal{C}) = F$, $F[x]$ – кольцо многочленов от переменной x . Тогда тензорное произведение $\mathcal{C} \otimes_F F[x]$ – почти конечномерная алгебра.

ЛЕММА 1. *Любая почти конечномерная алгебра нетерова.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим произвольную почти конечномерную алгебру A . Предположим, что она не нетерова, т.е. существует такое множество идеалов $\{I_j\}_{j \in \mathbb{N}}$, что $I_1 \subset I_2 \subset \dots \subset I_j \subset \dots$ (все включения строгие). Пусть $\dim(A/I_1) = n$. Тогда

$$\dim(A/I_{n+1}) < \dim(A/I_n) < \dim(A/I_{n-1}) < \dots < \dim(A/I_1) = n.$$

Следовательно, $\dim(A/I_{n+1}) = 0$, т.е. $I_{n+1} = A = I_{n+2}$. Противоречие с тем, что все включения были выбраны строгими. Лемма доказана.

ЛЕММА 2. *Любая полупервичная почти конечномерная алгебра первична.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $I, J \trianglelefteq A$, $IJ = 0$ и $I \neq 0$. Тогда

$$(I \cap J)^2 \subseteq IJ = 0.$$

В силу полупервичности алгебры A получаем $I \cap J = 0$. Предположим, что $J \neq 0$. Пусть $\dim(A/J) = n$. Так как алгебра A – почти конечномерна, то $\dim(I) = \infty$. Поэтому существуют линейно независимые элементы $a_1, \dots, a_{n+1} \in I$. Положим $\bar{a} = a + J$. Тогда из

$$\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \bar{a}_i = \sum_{i=1}^{n+1} \bar{\alpha}_i \bar{a}_i = 0$$

следует $\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i a_i \in J$. Это эквивалентно $\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i a_i = 0$. Поэтому (в силу линейной независимости $a_1, \dots, a_{n+1}$) получаем $\alpha_1 = \dots = \alpha_{n+1} = 0$. Таким образом, $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_{n+1}$ – линейно независимые, что противоречит $\dim(A/J) = n$. Таким образом, $\dim(I) < \infty$. Получили противоречие. Следовательно, $J = 0$, т.е. алгебра первична. Лемма доказана.

Пусть A – альтернативная алгебра над полем F , I – идеал алгебры A , $I^2 = 0$, $m \in I$ и $I + B = A$, где $B = \text{span}(e_1, \dots, e_n)$ – векторное подпространство, порожденное элементами $e_1, \dots, e_n$. Далее вместо R_{e_j} , L_{e_j} будем писать R_j , L_j .

ЛЕММА 3. Подпространство $W = \text{span}(\{mT_1 \dots T_k, k \in \mathbb{N}\})$, где $T_j \in \{R_x, L_x\}$, $x \in A$, является конечномерным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу того, что $I^2 = 0$, и леммы 1 из [8] каждый элемент из W является линейной комбинацией элементов вида

$$m, mR_x, mL_x, mL_xR_y, mR_{e_{i_1}}, \dots, R_{e_{i_{k-1}}}R_x, mL_{e_{i_1}}R_{e_{i_2}}, \dots, R_{e_{i_k}}R_x, \\ x, y \in A, \quad m \in I.$$

Операторы R_x , L_x являются линейными комбинациями $R_{e_1}, \dots, R_{e_n}$, R_m и $L_{e_1}, \dots, L_{e_n}$, L_m , соответственно, где $m \in I$. В силу того, что $I^2 = 0$, ограничения операторов R_x и L_x на идеал I являются линейными комбинациями операторов $R_{e_1}, \dots, R_{e_n}$ и $L_{e_1}, \dots, L_{e_n}$, соответственно. Таким образом, каждый элемент из W является линейной комбинацией элементов вида

$$m, mR_i, mL_i, mL_iR_j, mR_{e_{i_1}}, \dots, R_{e_{i_k}}, mL_{e_{i_1}}R_{e_{i_2}}, \dots, R_{e_{i_k}}, \quad k, i, j \in \mathbb{N}, \quad m \in I.$$

Элементов первых четырех видов конечное число. Следовательно, остается доказать, что линейная оболочка элементов последних двух видов является конечномерной.

Обозначим $M_0 = Fm$; $M_{k+1} = M_k B + M_k$. Тогда

$$\bigcup_{k=0}^{\infty} M_k = \text{span}(\{mR_{i_1} \dots R_{i_k}, k \in \mathbb{N}\}).$$

Рассмотрим элемент $mR_{i_1} \dots R_{i_{n+1}}$. Существуют $p, q \in 1, \dots, n+1$ такие, что $p < q$, $e_{i_p} = e_{i_q}$. Тогда

$$mR_{i_1} \dots R_{i_p} \dots R_{i_{q-1}} R_{i_q} \\ = -mR_{i_1} \dots R_{i_p} \dots R_{i_q} R_{i_{q-1}} + mR_{i_1} \dots R_{i_p} \dots R_{e_{i_{q-1}} e_{i_q} + e_{i_q} e_{i_{q-1}}}.$$

Поскольку $e_{i_q} e_{i_{q-1}} + e_{i_{q-1}} e_{i_q} = b + t$, где $b \in B$, $t \in I$ и $I^2 = 0$, то

$$mR_{i_1} \dots R_{e_{i_q} e_{i_{q-1}} + e_{i_{q-1}} e_{i_q}} = \sum_{j=1}^n \alpha_j mR_{i_1} \dots R_{i_{q-2}} R_{e_j} \in M_{q-1}, \quad \alpha_j \in F.$$

Тогда

$$mR_{i_1} \dots R_{i_{n+1}} = mR_{i_1} \dots R_{i_p} \dots R_{i_q} R_{i_{q-1}} \dots R_{i_{n+1}} + t_1,$$

где $t_1 \in M_n$. Продолжая этот процесс, получим

$$mR_{i_1} \dots R_{i_{n+1}} = mR_{i_1} \dots R_{i_p} R_{i_q} \dots R_{i_{n+1}} + t_1 \\ = mR_{i_1} \dots R_{e_{i_p}^2} R_{i_{p+1}} \dots R_{i_{q-1}} R_{i_{q+1}} \dots R_{i_{n+1}} + t_2 \\ = \sum_{j=1}^n \beta_j mR_{i_1} \dots R_{e_j} R_{i_{p+1}} \dots R_{i_{q-1}} R_{i_{q+1}} \dots R_{i_{n+1}} + t_2 + t_3,$$

где $t_i \in M_n$. Таким образом, показано, что $M_{n+1} \subset M_n$. Следовательно, $M_{n+1} = M_n$. Тогда

$$M_{n+2} = M_{n+1}B + M_{n+1} = M_nB + M_n = M_{n+1} = M_n.$$

Аналогично, $M_{n+k} = M_n$. Тогда подпространство $\bigcup_{k=0}^{\infty} M_k = \bigcup_{k=0}^n M_k$ конечномерно.

Осталось показать, что подпространство

$$V_1 = \text{span}(\{(e_1 m)R_{i_1} \dots R_{i_k}, k \in \mathbb{N}\}) + \dots + \text{span}(\{(e_n m)R_{i_1} \dots R_{i_k}, k \in \mathbb{N}\})$$

конечномерно. Так как $e_j m = m_j \in I$, подпространство

$$\text{span}\{(e_j m)R_{i_1} \dots R_{i_k}, k \in \mathbb{N}\} = \text{span}\{m_j R_{i_1} \dots R_{i_k}, k \in \mathbb{N}\}$$

является конечномерным. Значит, подпространство V_1 конечномерно.

Тогда, в силу доказанного выше, W конечномерно. Лемма доказана.

ЛЕММА 4. *Всякая почти конечномерная альтернативная алгебра полупервична.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть A – почти конечномерная альтернативная алгебра, $I \leq A$, $I^2 = 0$. Предположим, что $I \neq 0$. Тогда по лемме 1 I – конечно порожденный идеал. Пусть $I = \text{id}(m_1, \dots, m_k)$ – идеал, порожденный элементами $m_1, \dots, m_k$. Положим

$$I_i = \text{Span}\{m_i T_1 \dots T_p, p \in \mathbb{N}, T_j \in \{R_j, L_j\}\}.$$

Тогда $I = I_1 + \dots + I_k$ – сумма подпространств. По лемме 3 подпространство I_i конечномерно. Следовательно, идеал I конечномерен. Поэтому алгебра $A = I + B$ конечномерна. Это противоречит определению почти конечномерной алгебры; значит, $I = 0$. Таким образом, алгебра A полупервична. Лемма доказана.

Леммы 2 и 4 дают нам

ТЕОРЕМА 1. *Всякая почти конечномерная альтернативная алгебра первична.*

В качестве следствия получаем основной результат из [4]

СЛЕДСТВИЕ 1. *Всякая почти конечномерная ассоциативная алгебра первична.*

ЛЕММА 5. *Всякая почти конечномерная альтернативная неассоциативная алгебра нетерова для односторонних идеалов. Более того, каждый односторонний идеал имеет конечную коразмерность.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим произвольную альтернативную неассоциативную почти конечномерную алгебру A . Предположим, что она не нетерова для правых идеалов, т.е. существует такое множество правых идеалов $\{I_j\}_{j \in \mathbb{N}}$, что

$$0 \neq I_1 \subset I_2 \subset \dots \subset I_j \subset \dots \quad \text{все включения строгие.}$$

Обозначим через $\widehat{I}_i$ наибольший двусторонний идеал, содержащийся в I_i . По теореме 1 алгебра A первична. В [7] доказано (см. лемма 10.3), что $\widehat{I}_i \neq 0$. Тогда $A = \widehat{I}_i + B_i$ – прямая сумма подпространств, где подпространство B_i конечномерно. Так $\widehat{I}_i$ – подпространство в I_i , то $A = I_i + C_i$ – прямая сумма подпространств, где C_i – подпространство B_i . Поэтому $\dim(C_i) < \dim(B_i)$. Пусть $\dim(C_1) = n$. Тогда $\dim(C_{n+1}) \leq 0$, т.е. $C_{n+1} = 0$, т.е. $A = I_{n+1}$. Противоречие. Лемма доказана.

Как показано в [3], существует пример почти конечномерной ассоциативной алгебры, которая не является нетеровой ни для правых, ни для левых идеалов. Этот пример построен на основе примера Голода–Шафаревича.

Центром алгебры A называется множество

$$Z(A) = \{z \in A \mid (z, a, b) = (a, z, b) = (a, b, z) = 0, [z, a] = za - az = 0\}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть A – кольцо такое, что его центр $Z(A) \neq 0$ и не содержит делителей нуля. Тогда A – *кольцо Кэли–Диксона*, если его кольцо частных $(Z^*)^{-1}A$ является алгеброй Кэли–Диксона над полем $(Z^*)^{-1}Z(A)$, где $Z^* = Z(A) \setminus \{0\}$.

Как известно (см. [7; теорема 9.11]), всякая альтернативная первичная алгебра A либо является кольцом Кэли–Диксона, либо ее локально нильпотентный радикал $\mathcal{L}(A) \neq 0$. Первичная альтернативная алгебра с ненулевым локально нильпотентным радикалом называется *исключительной*.

ЛЕММА 6. Пусть A – почти конечномерная альтернативная алгебра, I – ее ненулевой собственный первичный идеал. Тогда фактора-алгебра A/I является простой алгеброй. Пусть M – множество ненулевых первичных идеалов алгебры A и $P = \bigcap_{P_\alpha \in M} P_\alpha$. Тогда либо $P = 0$, либо M – конечное множество. Если $P = 0$, то либо A ассоциативна, либо A – подпрямое произведение алгебр Кэли–Диксона и кольцо Кэли–Диксона.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть I – первичный идеал почти конечномерной алгебры A . Тогда фактор-алгебра A/I является конечномерной первичной и, следовательно, полупростой алгеброй. Тогда A/I является прямой суммой простых алгебр – своих идеалов. Пусть I_1, I_2 – идеалы из разложения A/I в прямую сумму. Тогда $I_1 I_2 \subset (I_1 \cap I_2) = 0$. В силу первичности $I_1 = 0$ либо $I_2 = 0$. Таким образом, A/I простая алгебра.

Пусть $P \neq 0$. Ясно, что P – полупервичный идеал в A . Тогда алгебра A/P является прямой суммой простых подалгебр. Отсюда следует, что в ней есть только конечное число идеалов. Переходя к прообразам, получаем, что M – конечное множество.

Пусть $P = \bigcap_{P_\alpha \in M} P_\alpha = 0$. Рассмотрим $M_1 = \{P_\alpha\}_{\alpha \in I_1}$ и $M_2 = \{P_\alpha\}_{\alpha \in I_2}$ – множества первичных идеалов из M , фактор-алгебры по которым ассоциативны и неассоциативны, соответственно. Если пересечение множеств из M_1 равно нулю, то A является подпрямым произведением алгебр A/K , где $K \in M_1$. Следовательно, A ассоциативна. Если пересечение множеств из M_1 равно $L_1 \neq 0$, а пересечение множеств из M_2 равно L_2 , то $L_1 \cap L_2 = 0$. Тогда $L_1 L_2 \subset L_1 \cap L_2 = 0$. В силу первичности $L_2 = 0$, т.е. A является подпрямым произведением неассоциативных алгебр, которые являются простыми. В силу теоремы Цорна о простых конечномерных неассоциативных альтернативных алгебрах (см. теорема 3.17 [9]) A является подпрямым произведением алгебр Кэли–Диксона.

Пусть в A содержит абсолютный делитель нуля, т.е. элемент $a \in A$ такой что $aAa = 0$. Так как алгебра A является подпрямым произведением алгебр Кэли–Диксона A_i , $i \in I$, то образы элемента a в алгебрах A_i являются абсолютными делителями нуля. Как известно (см. [7]), в алгебре Кэли–Диксона нет ненулевых абсолютных делителей нуля. Это значит, что образ элемента a в алгебре A_i равен нулю, из чего

следует что $a = 0$. Следовательно, алгебра A невырожденная. Тогда, в силу теоремы 1 и теоремы Слейтера (см. теорема 9.9 [7]) A – кольцо Кэли–Диксона. Лемма доказана.

Стоит отметить, что всякая почти конечномерная ассоциативно-коммутативная алгебра является алгеброй размерности Крулля один.

Пусть $A^\#$ – алгебра, полученная формальным присоединением единицы к алгебре A . Заметим, что если A – почти конечномерная алгебра, не содержащая единицы, то $A^\#$ – почти конечномерная алгебра.

ТЕОРЕМА 2. Пусть A – кольцо Кэли–Диксона. Предположим, что A – почти конечномерная алгебра. Тогда ее центр $Z(A)$ – почти конечномерная алгебра. Если A – алгебра с единицей (не содержит единицы), то A является локально конечной над своим центром $Z(A)$ (над кольцом $Z(A^\#)$). Алгебра A ($A^\#$) содержит подалгебру B , которая является конечно порожденным $Z(A)$ -модулем ($Z(A^\#)$ -модулем), $Z(B) = Z(A)$ ($Z(B) = Z(A^\#)$) и $(Z^*)^{-1}A = (Z^*)^{-1}B$ ($(Z^*)^{-1}A^\# = (Z^*)^{-1}B$). Более того, алгебра B почти конечномерна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть A – почти конечномерное кольцо Кэли–Диксона. Покажем, что $Z(A)$ – почти конечномерная алгебра. Пусть $I \trianglelefteq Z(A)$, $I \neq 0$, $x \in I$, $x \neq 0$. Тогда xA – идеал в A . Докажем, что

$$xA \cap Z(A) = xZ(A).$$

Пусть $xa \in Z(A)$, $y, t \in A$. Тогда

$$x(ay) = (xa)y = y(xa) = (yx)a = (xy)a = x(ya),$$

т.е. $ay = ya$ (так как $x \in Z(A)$). Поскольку $((xa)y)t = (xa)(yt)$, то

$$x((ay)t) = (x(ay))t = ((xa)y)t = (xa)(yt) = x(a(yt)),$$

т.е. $(ay)t = a(yt)$. Аналогично можем получить $(y, a, t) = (y, t, a) = 0$, т.е. $a \in Z(A)$. Итак, $xA \cap Z(A) = xZ(A)$. Следовательно, $xZ(A)$ – идеал конечной коразмерности в $Z(A)$. Отсюда получаем, что I – тоже идеал конечной коразмерности в $Z(A)$. Поэтому $Z(A)$ – почти конечномерная алгебра.

Как известно (см. [7; лемма 10.16]), в A есть ненулевой квадратичный над центром $Z(A)$ идеал I . Так как фактор-алгебра A/I конечномерна, для любого элемента $a \in A$ существуют такие $n \in \mathbb{N}$ и $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1} \in F$, что

$$\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i a^i + a^n = b \in I.$$

Но b является корнем квадратного многочлена

$$x^2 + t(x)x + n(x),$$

где $t(x), n(x) \in Z(A)$. Таким образом, произвольный элемент a является корнем многочлена степени $2n$ над $Z(A)$ ($Z(A^\#)$) для некоторого числа $n \in \mathbb{N}$. Ясно, что $2n \leq 2 \dim A/I$. Поэтому A алгебраическая над $Z(A)$ ($Z(A^\#)$) алгебра, причем,

степени алгебраичности ограничены. Следовательно, в силу теоремы Ширшова [7; следствие теоремы 5.6] A локально конечна над $Z(A)$ ($Z(A^\#)$).

Можно считать, что A – алгебра с единицей. Алгебра $(Z^*)^{-1}A$ является алгеброй Кэли–Диксона над полем $(Z^*)^{-1}Z$. Легко видеть, что можно выбрать базис этой алгебры над $(Z^*)^{-1}Z$ из элементов алгебры A . Пусть $\{a_1, \dots, a_8\}$ – ее базис, где $a_i \in A$. Рассмотрим алгебру B , которая порождается центром Z и элементами $a_1, \dots, a_8$. В силу локальной конечности алгебра B – конечно-порожденный Z -модуль. По построению $(Z^*)^{-1}A = (Z^*)^{-1}B$. Ясно, что $Z(A) = Z(B)$.

Пусть $0 \neq I \leq B$. Тогда $I \cap Z$ – идеал конечной коразмерности в Z . Так как B – конечно-порожденный Z -модуль, то I – идеал конечной коразмерности в B . Теорема доказана.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть A – кольцо Кэли–Диксона и характеристика поля F не равна 2. Тогда A – почти конечномерная алгебра над полем F в том и только в том случае, когда центр $Z(A)$ алгебры A является почти конечномерной алгеброй, а сама алгебра A является конечно порожденным $Z(A)$ -модулем.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $Z = Z(A)$. Ясно, что если Z – почти конечномерная алгебра и A – конечно порожденный Z -модулем, то алгебра A почти конечномерна.

Пусть A – почти конечномерная алгебра. В силу теоремы 2 Z – почти конечномерная алгебра. Поэтому Z – нетерово кольцо.

Теперь покажем, что A – конечно порожденный Z -модуль. Поскольку A – кольцо Кэли–Диксона, то $B = (Z^*)^{-1}A = \mathcal{C}(K)$ – алгебра Кэли–Диксона над полем $K = (Z^*)^{-1}Z$, причем существуют $\alpha, \beta, \gamma \in K \setminus \{0\}$ и $1 = e_0, e_1, \dots, e_7$ – базис B над K со следующей таблицей умножения.

ТАБЛИЦА. Умножение в алгебре Кэли–Диксона

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	α	e_3	αe_2	e_5	αe_4	$-e_7$	$-\alpha e_6$
e_2	$-e_3$	β	$-\beta e_1$	e_6	e_7	βe_4	βe_5
e_3	$-\alpha e_2$	βe_1	$-\alpha\beta$	e_7	αe_6	$-\beta e_5$	$-\alpha\beta e_4$
e_4	$-e_5$	$-e_6$	$-e_7$	γ	$-\gamma e_1$	$-\gamma e_2$	$-\gamma e_3$
e_5	$-\alpha e_4$	$-e_7$	$-\alpha e_6$	γe_1	$-\alpha\gamma$	γe_3	$\alpha\gamma e_2$
e_6	e_7	$-\beta e_4$	βe_5	γe_2	$-\gamma e_3$	$-\beta\gamma$	$-\beta\gamma e_1$
e_7	αe_6	$-\beta e_5$	$\alpha\beta e_4$	γe_3	$-\alpha\gamma e_2$	$\beta\gamma e_1$	$\alpha\beta\gamma$

Положим $D = Ze_0 + Ze_1 + \dots + Ze_7$. Тогда D – нетеров Z -модуль.

Существует такой $z \in Z^*$, что

$$e_i = \frac{f_i}{z}, \quad \alpha = \frac{\delta}{z}, \quad \beta = \frac{\lambda}{z}, \quad \gamma = \frac{\nu}{z},$$

где $f_i \in A$, $\delta, \lambda, \nu \in Z^*$. Обозначим $x \circ y = xy + yx$. Пусть $a \in A$. Тогда $a = \sum_{i=0}^7 \alpha_i e_i$ для некоторых $\alpha_i \in K$. Непосредственно проверяются следующие равенства:

$$z^2 \alpha_0 = \frac{((a \circ f_1)f_1) \circ f_2)f_2}{4\delta\lambda}, \quad z\alpha_1 = \frac{((a \circ f_1) \circ f_2)f_2}{4\delta\lambda},$$

$$\begin{aligned} z\alpha_2 &= \frac{((a \circ f_2) \circ f_1)f_1}{4\delta\lambda}, & \alpha_3 &= \frac{((a \circ f_3) \circ f_1)f_1}{-4\delta^2\lambda}, \\ z\alpha_4 &= \frac{((a \circ f_4) \circ f_1)f_1}{-4\delta\nu}, & \alpha_5 &= \frac{((a \circ f_5) \circ f_1)f_1}{-4\delta^2\nu}, \\ \alpha_6 &= \frac{((a \circ f_6) \circ f_1)f_1}{-4\delta\lambda\nu}, & \alpha_7 &= \frac{((a \circ f_7) \circ f_1)f_1}{-4\delta^2\lambda\nu}z. \end{aligned}$$

Таким образом, получаем, что $(4z^2\delta^2\lambda\nu)\alpha_i \in Z$. Поэтому $(4z^2\delta^2\lambda\nu)a \in D$ для любого $a \in A$. Значит, $z_0A \in D$, где $z_0 = 4z^2\delta^2\lambda\nu$. Так как D – нетеров Z -модуль, то Z -подмодуль z_0A конечно порожден. Тогда алгебра A тоже конечно порождена, как Z -модуль. Предложение доказано.

ТЕОРЕМА 3. Пусть A – исключительная почти конечномерная алгебра. Тогда A является локально конечномерной. Если $\mathcal{L}(A) \neq A$, то A – алгебра с единицей, ее центр $Z(A)$ – конечномерное над F поле и A – локальная алгебра с наибольшим идеалом $\mathcal{L}(A)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу [10] в алгебре A выполняется тождество $[[x, y], y] = 0$, где $[x, y] = xy - yx$. Поэтому в силу [11; теорема 3.1 и следствие 3.1]) получаем, что ниль-радикал $\text{Nil}(A)$ является ниль-алгеброй индекса 3 и $A/\text{Nil}(A)$ не содержит ненулевых нильпотентных элементов. Следовательно, $\text{Nil}(A) = \mathcal{L}(A)$. Фактор-алгебра $A/\text{Nil}(A)$ конечномерна, поэтому алгебраична. Таким образом, для любого элемента $a \in A$ существуют такие $n \in \mathbb{N}$ и $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1} \in F$, что

$$\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i a^i + a^n = b \in \text{Nil}(A).$$

Так как $b^3 = 0$, то A – алгебраичная над F алгебра, причем степени алгебраичности ограничены числом $3 \dim(A/\text{Nil}(A))$. Следовательно, в силу теоремы Ширшова [7; следствие теоремы 5.6], A – локально конечна над F , т.е. локально конечномерна.

Обозначим $B = A/\mathcal{L}(A)$. Так как B полупростая, она содержит ненулевой идемпотент $\bar{e}$. Покажем, что $\bar{e}$ – единица алгебры B .

Пусть элемент $a \in A$ – произвольный прообраз $\bar{e}$. Тогда $a^2 - a$ – нильпотентный элемент и a не нильпотентен. Следовательно, по [12; лемма 1.3.2] существует e – ненулевой идемпотент алгебры A , причем $e = aq(a)$, где $q(x)$ – многочлен с целыми коэффициентами. Ясно, что e – прообраз $\bar{e}$.

Как показано в [11] (см. теорема 3.1) $x^3 \in Z(A)$ для любого $x \in A$. Поэтому $e = e^3 \in Z(A)$. Покажем, что e – единица в алгебре A . Так как $e(a - ea) = 0$, в силу первичности A получаем, что $a - ea = 0$ для любого $a \in A$. Следовательно, e – единица алгебры A . Так как e – прообраз $\bar{e}$, то $\bar{e}$ – единица алгебры B .

Поскольку алгебра B – полупроста, конечномерна и в ней справедливо тождество $[[x, y], y] = 0$, то B – поле. Следовательно, образ элемента $b \in A \setminus \mathcal{L}(A)$ обратим в B . Поэтому элемент b обратим в A . Значит A – локальное кольцо с наибольшим идеалом $\mathcal{L}(A)$. Так как $Z(A) \cap \mathcal{L}(A) = 0$, то $Z(A)$ – конечномерная на F алгебра без делителей нуля, т.е. $Z(A)$ – поле. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 4. Конечно-порожденная альтернативная неассоциативная почти конечномерная алгебра A над полем F является кольцом Кэли–Диксона. Если, к тому же, F несчетно, то A – подпрямое произведение алгебр Кэли–Диксона.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение следует из теоремы 1 и того факта, что конечно-порожденная первичная альтернативная неассоциативная алгебра является кольцом Кэли–Диксона [8]. Если F – несчетно, то, как известно, радикал Жевлакова является ниль-алгеброй. Однако, в кольце Кэли–Диксона нет ниль-идеалов; следовательно, радикал Жевлакова равен нулю. Тогда A является подпрямым произведением примитивных ассоциативных алгебр и алгебр Кэли–Диксона. Аналогично доказательству леммы 6, ввиду неассоциативности алгебры A , получаем, что A является подпрямым произведением алгебр Кэли–Диксона. Теорема доказана.

В заключение автор выражает благодарность В. Н. Желябину за постановку интересной задачи, внимание к работе и полезные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A. Shalev, E. I. Zelmanov, “Narrow Lie algebras: a coclass theory and a characterization of the Witt algebra”, *J. Algebra*, **189**:2 (1997), 294–331.
- [2] D. R. Farkas, L. W. Small, “Algebras which are nearly finite dimensional and their identities”, *Israel J. Math.*, **127** (2002), 245–251.
- [3] Z. Reichstein, D. Rogalski, J. J. Zhang, “Projectively simple rings”, *Adv. Math.*, **203**:2 (2006), 365–407.
- [4] J. Farina, C. Pendergrass-Rice, “A few properties of just infinite algebras”, *Comm. Algebra*, **35**:5 (2007), 1703–1707.
- [5] A. Anquela, T. Cortés, F. Montaner, “Nonassociative coalgebras”, *Comm. Algebra*, **22**:12 (1994), 4693–4716.
- [6] В. Н. Желябин, “Структуризуемые коалгебры”, *Алгебра и логика*, **35**:5 (1996), 529–542.
- [7] К. А. Жевлаков, А. М. Слинько, И. П. Шестаков, А. И. Ширшов, *Кольца, близкие к ассоциативным*, Современная алгебра, Наука, М., 1978.
- [8] И. П. Шестаков, “Абсолютные делители нуля и радикалы конечно-порожденных альтернативных алгебр”, *Алгебра и логика*, **15**:5 (1976), 585–602.
- [9] R. D. Schafer, *An Introduction to Nonassociative Algebras*, Pure Appl. Math., **22**, Academic Press, New York, 1966.
- [10] С. В. Пчелинцев, “Исключительные первичные альтернативные алгебры”, *Сиб. матем. журн.*, **48**:6 (2007), 1322–1337.
- [11] С. В. Пчелинцев, “Первичные альтернативные алгебры, близкие к коммутативным”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **68**:1 (2004), 183–206.
- [12] И. Херстейн, *Некоммутативные кольца*, Мир, М., 1972.

А. С. Панасенко

Новосибирский национальный исследовательский
государственный университет;
Институт математики им. С. Л. Соболева
Сибирского отделения Российской академии наук,
г. Новосибирск
E-mail: tom-anjelo@mail.ru

Поступило

06.03.2015