Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Жиров, Примеры одномерных гиперболических аттракторов на неориентируемых поверхностях, *Матем. заметки*, 1999, том 65, выпуск 3, 468–471

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1071>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 08:01:10

ПРИМЕРЫ ОДНОМЕРНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ АТТРАКТОРОВ НА НЕОРИЕНТИРУЕМЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ

А. Ю. Жиров

В настоящей работе рассматриваются некоторые вопросы существования диффеоморфизмов неориентируемых поверхностей с гиперболическими аттракторами. Под *аттрактором* понимается компактное связное подмножество Λ замкнутой компактной поверхности M , инвариантное и гиперболическое относительно диффеоморфизма $f: M \rightarrow M$, причем такое, что существует его окрестность U в M , для которой $f(U) \subset U$ и $\bigcap_{n \geq 0} f^n(U) = \Lambda$. Аттракторы естественно рассматривать с точностью до топологической сопряженности порождающих их диффеоморфизмов на некоторых их окрестностях. В этом смысле говорят об *окрестностной сопряженности* аттракторов. С ее учетом будем понимать реализуемость аттрактора на поверхности. Именно, рассмотрим следующее отношение порядка " $\prec$ " на множестве замкнутых компактных поверхностей: считается, что $M_1 \prec M_2$, если либо M_1 ориентируема, а M_2 неориентируема, либо обе они ориентируемы или обе неориентируемы, а род M_1 меньше рода M_2 . Тогда M называется *минимальной поверхностью* аттрактора Λ диффеоморфизма $f: M \rightarrow M$, если не существует окрестностно сопряженного ему аттрактора на поверхности $M' \prec M$. Говоря об аттракторе на данной поверхности, будем иметь в виду, что она является его минимальной поверхностью.

Напомним некоторые геометрические свойства аттракторов, связанные с топологическими характеристиками его минимальной поверхности (см. [1], [2]). Для каждой точки $x \in \Lambda$ устойчивое $W^s(x)$ и неустойчивое $W^u(x)$ многообразия суть образы $\mathbb{R}$ при инъективных иммерсиях в M , причем Λ является объединением неустойчивых многообразий своих точек. Точка $y \in \Lambda$ называется *оппозиционной* для точки $x \in \Lambda$ тогда и только тогда, когда $y \in W^s(x)$ и $(x, y)_s \cap \Lambda = \emptyset$. Подмножество достижимой извне границы аттрактора называется *связкой*, если вместе с любой его точкой x в нем содержится все множество $W^u(x)$, а также точка, оппозиционная к x (если такая существует), и если оно не содержит собственного подмножества с указанными свойствами. Достижимая граница аттрактора распадается в дизъюнктное объединение конечного числа связок, причем каждая из них есть дизъюнктное объединение конечного числа неустойчивых многообразий точек аттрактора. Число неустойчивых многообразий, составляющих связку, называется ее *степенью*. Последовательность чисел $\{b_d : d \in \mathbb{N}\}$, где b_d есть число связок степени d , называется *граничным типом аттрактора*. Он связан с эйлеровой характеристикой минимальной поверхности аттрактора формулой Эйлера–Пуанкаре

$$b_1 - \sum_{d \geq 3} (d-2)b_d = 2\chi(M).$$

Кроме граничного типа аттрактора его реализуемость на поверхностях зависит еще от одного свойства, называемого *ориентируемостью*. Оно означает ориентируемость ламинации, порождаемой разбиением аттрактора на неустойчивые многообразия его точек (см. [1]).

Возникает вопрос о том, какие граничные типы ориентируемых и неориентируемых аттракторов, формально допускаемые формулой Эйлера–Пуанкаре для данной поверхности, в действительности реализуются. В случае ориентируемых поверхностей ответ известен благодаря результату [3] (см. также [2]), а в случае неориентируемых остается открытым. Известно только, что на бутылке Кляйна не существует аттракторов без 1-связок [4]. В [5] построен пример обобщенного псевдоаносовского гомеоморфизма проективной плоскости, из которого в соответствии с конструкцией [6] получается диффеоморфизм с аттрактором граничного типа $\{b_1 = 3, b_3 = 1\}$. В настоящей работе методами [2] приводятся примеры диффеоморфизмов с аттракторами, доказывающие следующие утверждения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 97-01-00301, совместного проекта РФФИ и фонда INTAS, грант № 96-00418i96, и совместного проекта РФФИ и фонда ННИО, грант № 96-01-00043G.

ТЕОРЕМА 1. Для любого $d \geq 3$ на проективной плоскости существует аттрактор граничного типа $\{b_1 = d, b_d = 1\}$.

ТЕОРЕМА 2. Существуют аттракторы диффеоморфизмов проективной плоскости, несопряженные аттракторам диффеоморфизмов ориентируемых поверхностей и имеющие сколь угодно малую топологическую энтропию.

ТЕОРЕМА 3. На неориентируемой поверхности рода 5 существуют ориентируемые аттракторы всех граничных типов, допускаемых в этом случае формулой Эйлера–Пуанкаре. Без учета аттракторов с 2-связками эти граничные типы суть $\{b_8 = 1\}$, $\{b_4 = b_6 = 1\}$ и $\{b_4 = 3\}$.

ТЕОРЕМА 4. На каждой неориентируемой поверхности четного рода $g \geq 4$ существует A -диффеоморфизм f_g , спектральное разложение которого состоит из единственной отталкивающей неподвижной точки и ориентируемого аттрактора граничного типа $\{b_{2g-2} = 1\}$. При этом топологическая энтропия диффеоморфизма f_g есть логарифм максимального корня полинома $\lambda^{g-1} - \lambda^{g-2} - \lambda - 1$, и поэтому $\text{ent}(f_g) \rightarrow 0$ при $g \rightarrow \infty$.

Построение примеров, доказывающих эти теоремы, основано на комбинаторном описании аттракторов, данном в [2] для случая диффеоморфизмов ориентируемых поверхностей. Коротко повторим эту конструкцию с дополнениями, необходимыми для случая неориентируемых поверхностей.

Для аттрактора Λ диффеоморфизма $f: M \rightarrow M$ строится двумерное подмногообразие $\Pi \subset M$ с краем, называемое *фундаментальным многообразием* аттрактора. Оно обладает так называемым *ленточным разбиением* [7], т.е. получается в результате приклеивания к дуге I , называемой *базовым отрезком*, некоторого количества (обозначим его через n) евклидовых прямоугольников Π_i , называемых *лентами*, вдоль пар противоположных сторон. Точные определения сформулированы в [7], где доказывается существование фундаментальных многообразий для любого аттрактора (для этого, правда, приходится сделать ненужное сейчас обобщение, рассматривая ленточные поверхности с, вообще говоря, несколькими базовыми отрезками). Диффеоморфизм, порождающий аттрактор, отображает Π на свое подмножество, причем это отображение согласовано с ленточным разбиением, а именно, $f|_{\Pi}$ является *ленточным автоморфизмом* в смысле [7]. Эти свойства позволяют дать следующее комбинаторное описание фундаментального многообразия и отображения $f|_{\Pi}$.

Выберем определенную ориентацию базового отрезка (скажем: слева направо) и определенное трансверсальное направление к нему (скажем: снизу вверх). Стандартным образом занумеруем отрезки, вдоль которых ленты приклеены к I , перечислив сначала приклеенные к I сверху, а затем – приклеенные снизу в соответствии с направлением слева направо. Возникает подстановка σ на множестве $1, \dots, 2n$, сопоставляющая друг другу номера отрезков, вдоль которых приклеена к базовому отрезку одна и та же лента. Далее занумеруем сами ленты Π_i , согласуя их нумерацию с нумерацией отрезков, к которым они приклеены, и сопоставим номеру каждой из них знак “+” или “–”, указывающий на то “перекручена” она при приклеивании или нет. Получим n -вектор $\mathbf{o}$, компонентами которого являются знаки. Наконец, определим число t отрезков, вдоль которых ленты приклеены к I сверху. Набор данных $\text{cf} := (\sigma, t, \mathbf{o})$ называется *конфигурацией ленточной поверхности*.

Отображению $f: \Pi \rightarrow \Pi$ сопоставляется следующий набор данных $\langle \text{cf}; \varepsilon^u, \varepsilon^s; \mathbf{g}, l \rangle$, называемый *кодом аттрактора*:

cf есть конфигурация ленточной поверхности Π ;

ε^s (соответственно ε^u) есть знак “+” или “–” в зависимости от того, сохраняет f ориентацию отрезка I (соответственно трансверсальное направления к нему) или нет;

$\mathbf{g} = (g_1, g_2, \dots, g_n)$ есть целочисленный n -вектор с компонентами $g_i := \#(\Pi_i \setminus I) \cap f(\Pi)$, где “#” означает число связанных компонент множества;

наконец, $l := \#LI \cap f(\Pi)$, где LI – левый отрезок (возможно пустой и тогда $l := 0$) из тех двух, которые получаются, если из I удалить $f(I)$.

Так как в [2] рассмотрен случай аттракторов диффеоморфизмов ориентируемых поверхностей, там фигурируют коды с $\mathbf{o} = (+ \dots +)$, и, кроме того, с $\varepsilon^s = +$. Установлены необходимые и достаточные условия того, что формально записанный код такого типа действительно реализуется

некоторым диффеоморфизмом поверхности с аттрактором. Их нетрудно распространить и на коды описанного выше типа (и даже более общего), на основании чего можно убедиться в реализуемости формальных кодов, приведенных в следующих ниже примерах.

ПРИМЕР 1. Пусть $n \geq 4$, $t := 4$,

$$\sigma := (1, 2n)(2, 5)(3, 4) \prod_{i=3}^{n-1} (2i, 2i+1), \quad \mathbf{o} := (-\underbrace{+\cdots+}_{n-2}).$$

Для конфигурации $(\sigma, t, \mathbf{o})$ определим формальный код, полагая $\varepsilon^u = \varepsilon^s = +$, $l = 0$ и

$$\mathbf{g} := (5, 3, 3, \underbrace{1, \dots, 1}_{n-4}, 3).$$

Этот код определяет аттрактор на проективной плоскости граничного типа $\{b_1 = n-1, b_{n-1} = 1\}$, что доказывает теорему 1.

ПРИМЕР 2. Пусть $k \geq 1$, $n := 2k+2$, $t := 2k+1$,

$$\sigma := (1, 2n-1) \prod_{i=1}^k (2i, 2i+1) \cdot (2k+2, 2n) \cdot \prod_{i=k+1}^{2k} (2i+1, 2i+2), \quad \mathbf{o} := (-\underbrace{+\cdots+}_k - \underbrace{+\cdots+}_k).$$

Для этой конфигурации определим формальный код, полагая $\varepsilon^u = -$, $\varepsilon^s = +$, $l = 0$,

$$\mathbf{g} := (3, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-1}, 3, \underbrace{1, \dots, 1}_{k+1}).$$

Он определяет аттрактор граничного типа $\{b_1 = 2k+1, b_{2k+1} = 1\}$ на проективной плоскости, причем оказывается, что топологическая энтропия последнего есть логарифм максимального корня полинома $\lambda^{2k+1} - \lambda^{2k} - \lambda - 1$, а этот корень, как нетрудно проверить, стремится к 1 при $k \rightarrow \infty$. Это доказывает теорему 2.

ПРИМЕР 3. Пусть $k \geq 2$, $n := 2k$, $t := k$. Положим

$$\sigma := (1, 3k)(k+1, 2n) \prod_{\substack{i \geq 2 \\ i \neq k+1}} (i, 2n-i+1), \quad \mathbf{o} := (-\underbrace{+\cdots+}_{k-1} - \underbrace{+\cdots+}_{k-1}).$$

Для конфигурации $(\sigma, t, \mathbf{o})$ определим формальный код, полагая $\varepsilon^u = -$, $\varepsilon^s = +$, $l = 2$,

$$\mathbf{g} := (2, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-1}, 2, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-2}, 3).$$

Он определяет аттрактор граничного типа $\{b_{2n-2} = 1\}$ на неориентируемой поверхности рода $g = n$ со свойствами, указанными в теореме 4.

Наконец, теорему 3 доказывают следующие три примера кодов, которые определяют на неориентируемой поверхности рода 5 ориентируемые аттракторы граничных типов, указанных (в той же последовательности) в этой теореме:

- 1) $\sigma = (1, 9)(2, 6)(3, 7)(4, 10)(5, 8)$, $t = 5$, $\mathbf{o} = (+-+-+)$,
 $\varepsilon^u = +$, $\varepsilon^s = -$, $\mathbf{g} = (4, 2, 3, 4, 6)$, $l = 11$;
- 2) $\sigma = (1, 11)(2, 9)(3, 7)(4, 8)(5, 12)(6, 10)$, $t = 6$, $\mathbf{o} = (+-+--)$,
 $\varepsilon^u = +$, $\varepsilon^s = +$, $\mathbf{g} = (7, 2, 3, 5, 1, 3)$, $l = 3$;
- 3) $\sigma = (1, 13)(2, 11)(3, 8)(4, 10)(5, 14)(6, 9)(7, 12)$, $t = 7$, $\mathbf{o} = (++++-)$,
 $\varepsilon^u = -$, $\varepsilon^s = -$, $\mathbf{g} = (5, 1, 4, 1, 2, 2, 4)$, $l = 5$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Плыкин Р. В. // УМН. 1984. Т. 39. № 6. С. 75–113. 2. Жиров А. Ю. // Матем. сб. 1994. Т. 185. № 6. С. 3–50; // Матем. сб. 1994. Т. 185. № 9. С. 29–80. 3. Mazur H., Smillie J. // Comment. Math. Helv. 1993. V. 68. P. 289–307. 4. Плыкин Р. В. // УМН. 1980. Т. 35. № 4. С. 205–206. 5. Arnoux P., Yoccoz J.-P. // C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I. Math. 1981. V. 292. P. 75–78. 6. Жиров А. Ю., Плыкин Р. В. // Матем. заметки. 1995. Т. 58. № 1. С. 149–152. 7. Жиров А. Ю. // Матем. сб. 1997. Т. 188. № 6. С. 3–26.

Военно-воздушная академия им. Ю. А. Гагарина

Поступило
23.02.98