Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. Ю. Куликова, О приближении функций гиперболическим углом в метрике L_2 , *Матем. заметки*, 1999, том 65, выпуск 3, 471–474

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1072>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 14:11:25

О ПРИБЛИЖЕНИИ ФУНКЦИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИМ УГЛОМ В МЕТРИКЕ L_2

Т. Ю. Куликова

Пусть заданы два измеримых пространства (X_i, Σ_i, τ_i) , $i = 1, 2$, причем меры τ_i имеют счетный базис. Через $L_2(X_i)$, $i = 1, 2$, будем обозначать пространство функций с суммируемым квадратом на X_i , а через $L_2(X_1 \times X_2)$ обозначим пространство функций $f(x_1, x_2)$ с суммируемым квадратом на $X_1 \times X_2$ и нормой

$$\|f\| = \left(\int_{X_1} \int_{X_2} f^2(x_1, x_2) d\tau_1(x_1) d\tau_2(x_2) \right)^{1/2}.$$

Пространства $L_2(X_i)$ являются сепарабельными.

Зафиксируем две последовательности натуральных чисел $\{N_k^{[1]}\}_{k \in \mathbb{Z}_+}$, $\{N_l^{[2]}\}_{l \in \mathbb{Z}_+}$ и обозначим $G_k^{[i]} = \{1, 2, \dots, N_k^{[i]}\}$, $i = 1, 2$. Пусть $\{\mathcal{L}_{k,s}^{[i]}(x_i)\}_{k \in \mathbb{Z}_+, s \in G_k^{[i]}}$ – полная ортонормированная система в пространстве $L_2(X_i)$, $i = 1, 2$. Рассмотрим в $L_2(X_1 \times X_2)$ ортонормированную систему $\{\mathcal{L}_{kl}^{st}(x_1, x_2)\}$, где $\mathcal{L}_{kl}^{st}(x_1, x_2) = \mathcal{L}_{k,s}^{[1]}(x_1) \cdot \mathcal{L}_{l,t}^{[2]}(x_2)$. Пусть $c_{kl}^{st} = c_{kl}^{st}(f)$, $k, l \in \mathbb{Z}_+$, $s \in G_k^{[1]}$, $t \in G_l^{[2]}$, – коэффициенты Фурье функции $f(x_1, x_2)$ по системе $\{\mathcal{L}_{kl}^{st}(x_1, x_2)\}$. Функции вида

$$Y_{kl}(x_1, x_2) = \sum_{s \in G_k^{[1]}, t \in G_l^{[2]}} a_{st} \mathcal{L}_{kl}^{st}(x_1, x_2),$$

где $a_{st} \in \mathbb{R}$, будем называть *гармониками порядка k, l* . Пространство гармоник порядка k, l обозначим через H_{kl} , а ортогональную проекцию функции f на H_{kl} через $Y_{kl}(f; x_1, x_2)$. Положим также

$$c_{kl} = c_{kl}(f) = \|Y_{kl}(f; x_1, x_2)\| = \left(\sum_{s \in G_k^{[1]}, t \in G_l^{[2]}} (c_{kl}^{st})^2 \right)^{1/2}.$$

В силу полноты системы $\{\mathcal{L}_{kl}^{st}(x_1, x_2)\}$ для каждой функции $f \in L_2(X_1 \times X_2)$ выполнено равенство

$$f(x_1, x_2) = \sum_{k, l \in \mathbb{Z}_+} Y_{kl}(f; x_1, x_2),$$

где ряд сходится к функции f в смысле $L_2(X_1 \times X_2)$.

Определим в $L_2(X_1 \times X_2)$ операторы обобщенного дифференцирования. Пусть задана последовательность неотрицательных чисел $\{\alpha_k\}_{k=0}^\infty$, для которой существует $\mu \in \mathbb{R}$ и константы $A_1, A_2 > 0$ такие, что $A_1 k^\mu \leq \alpha_k \leq A_2 k^\mu$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Введем обозначение $\Lambda(D_\mu^{[1]}) = \{f \in L_2(X_1 \times X_2) : \sum_{k, l \in \mathbb{Z}_+} (\alpha_k)^2 c_{kl}^2(f) < \infty\}$. Рассмотрим оператор

$D_\mu^{[1]}: \Lambda(D_\mu^{[1]}) \rightarrow L_2(X_1 \times X_2)$ такой, что $D_\mu^{[1]} = \tilde{D}_\mu \cdot R_D$, где R_D – линейное изометрическое преобразование пространства $L_2(X_1 \times X_2)$, для которого все подпространства H_{kl} являются собственными, а $\tilde{D}_\mu$ – оператор “растяжения”, ставящий в соответствие каждой функции $f \in \Lambda(D_\mu^{[1]})$ сумму ряда $\sum_{k,l=0}^{\infty} \alpha_k Y_{kl}(f; x_1, x_2)$. Назовем оператор $D_\mu^{[1]}$ *оператором обобщенного дифференцирования* по первой переменной. Его можно записать в виде

$$D_\mu^{[1]} f(x_1, x_2) = \sum_{k,l \in \mathbb{Z}_+} \alpha_k R_D Y_{kl}(f; x_1, x_2),$$

где $R_D Y_{kl}(f; x_1, x_2) \in H_{kl}$ и $\|R_D Y_{kl}(f; x_1, x_2)\| = \|Y_{kl}(f; x_1, x_2)\|$. (Заметим, что оператор R_D переводит множество $\Lambda(D_\mu^{[1]})$ в себя, поэтому последующее применение оператора $\tilde{D}_\mu$ корректно.) Число μ назовем *параметром* дифференциального оператора. Аналогично определяется оператор обобщенного дифференцирования по второй переменной. Далее, в случаях, где это не вызовет недоразумений, верхние индексы [1], [2] будем опускать и обозначать операторы дифференцирования по первой и второй переменным с параметрами μ_1, μ_2 через D_{μ_1}, D_{μ_2} соответственно.

Определим в пространстве $L_2(X_1 \times X_2)$ оператор обобщенного сдвига. *Оператор обобщенного сдвига* функции $f \in L_2(X_1 \times X_2)$ по первой переменной на величину $h_1 \in [0, 1]$, обозначаемый $T_{h_1}^{[1]}$, задается как суперпозиция операторов $\tilde{T}_{h_1} \cdot R_{T, h_1}$, где R_{T, h_1} – линейное изометрическое преобразование пространства $L_2(X_1 \times X_2)$, для которого все подпространства H_{kl} собственные, а оператор $\tilde{T}_{h_1}$ задается формулой

$$\tilde{T}_{h_1} f(x_1, x_2) = \sum_{k,l=0}^{\infty} \beta_k^{[1]}(h_1) Y_{kl}(f; x_1, x_2),$$

где $\beta_k^{[1]}(h_1)$ – заданная последовательность непрерывных и равномерно ограниченных функций на $[0, 1]$ такая, что для всех k $\beta_k^{[1]}(0) = 1$. Этот ряд сходится в $L_2(X_1 \times X_2)$ в силу равномерной ограниченности $\beta_k^{[1]}(h_1)$. Аналогично определяется оператор обобщенного сдвига по второй переменной.

Заметим, что если в пространстве периодических функций под оператором $D^{[1]}$ понимать обычное дифференцирование, то оператор R_D переводит тригонометрическую гармонику в ее сопряженную, а если под оператором обобщенного сдвига в этом пространстве понимать обычный сдвиг, то R_{T, h_1} – это оператор вращения в двумерных подпространствах, порожденных гармоникой и ее сопряженной.

Пусть $\Delta_{h_i} f = T_{h_i}^{[i]} f - f$ – первая разность по i -й переменной, $\Delta_{h_i}^2 f = \Delta_{h_i}(\Delta_{h_i} f)$ – вторая разность. Оператор разности можно представить в виде суперпозиции оператора R_{Δ, h_1} некоторого линейного изометрического преобразования пространства $L_2(X_1 \times X_2)$ и оператора $\tilde{\Delta}_{h_1}$, задаваемого формулой

$$\tilde{\Delta}_{h_1} f = \sum_{k,l=0}^{\infty} \eta_k(h_1) Y_{kl}(f; x_1, x_2).$$

Для теорем об аппроксимации нам потребуются наложить некоторые ограничения на коэффициенты $\eta_k(h)$ операторов разности. Для этого определим класс $\mathfrak{B}$. Последовательность непрерывных функций $\{\eta_k(h)\}_{k=0}^{\infty}$ принадлежит классу $\mathfrak{B}$, если выполнены следующие условия:

- 1) $\eta_0(h) \equiv 0$;
- 2) для всех $k \in \mathbb{N}$ $\eta_k(0) = 0$;
- 3) существует константа A_3 , не зависящая от k и h такая, что для всех $k \in \mathbb{N}$ и $h \in [0, 1]$ выполнено $|\eta_k(h)| \leq A_3$;
- 4) существует константа A_4 , не зависящая от k и h такая, что для всех $k \in \mathbb{N}$ и $h, kh \in (0, 1/2]$, выполнено $|\eta_k(h)| \leq A_4 kh$;
- 5) существуют константы a, A_5 , не зависящие от k и h такие, что $a \in (0, 1/2)$, $A_5 > 0$ и при $kh \in [a, 2a)$ выполнено $|\eta_k(h)| \geq A_5$.

Класс $\mathfrak{B}$ не пуст; так, например, последовательность $\eta_k(h) = \sin kh$ принадлежит этому классу. Далее будем рассматривать только такие операторы обобщенного сдвига, у которых последовательности $\eta_k(h)$ принадлежат классу $\mathfrak{B}$.

Наилучшим приближением углом порядка $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ в пространстве $L_2(X_1 \times X_2)$ называется величина

$$V_{n_1 n_2}(f) = \min_{P_{n_1 n_2}} \|f - P_{n_1 n_2}\|,$$

где минимум берется по всем функциям $P_{n_1, n_2}(x_1, x_2) \in L_2(X_1 \times X_2)$ с гармониками в угле $y_{n_1 n_2} = \mathbb{Z}_+^2 \setminus \{(k, l) \in \mathbb{Z}_+^2 : k \geq n_1, l \geq n_2\}$.

Для каждой фиксированной пары операторов обобщенного сдвига $T_{h_1}^{[1]}, T_{h_2}^{[2]}$ и операторов обобщенного дифференцирования D_{μ_1}, D_{μ_2} можно определить *логарифмические классы*, подобные классам Никольского. Пусть $r_i = m_i + \sigma_i$, $m_i \in \mathbb{Z}_+$, $\sigma_i \in (0, 1]$, $i = 1, 2$, $\nu \in \mathbb{R}_+$. Функция $f(x_1, x_2) \in SH^{(r_1, r_2)}(\nu)$, если $f \in \Lambda(D_{\mu_1}^{m_1} D_{\mu_2}^{m_2})$ и

$$\|\Delta_{h_1}^{\xi_1} \Delta_{h_2}^{\xi_2} D_{\mu_1}^{m_1} D_{\mu_2}^{m_2} f\| \leq C h_1^{\sigma_1} h_2^{\sigma_2} \ln^{\nu/2} \frac{1}{h_1 h_2},$$

где $\xi_i = [\sigma_i] + 1$, $h_i \in (0, 1]$, а константа C не зависит от h_i , $i = 1, 2$.

Пару чисел $\mathfrak{x} = (\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2)$, $\mathfrak{x}_i = \mathfrak{x}_i(\mu_i, r_i) = \mu_i m_i + \sigma_i$, $i = 1, 2$, назовем *характеристикой* логарифмического класса. Далее будем предполагать, что $\mathfrak{x}_i > 0$.

ТЕОРЕМА 1 (об угле). *Функция $f(x_1, x_2) \in SH_{\mu_1, \mu_2}^{(r_1, r_2)}(\nu)$ тогда и только тогда, когда для всех $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$*

$$V_{n_1 n_2}(f) \leq \frac{M(f) \ln^{\nu/2} n_1 n_2}{n_1^{\mathfrak{x}_1} n_2^{\mathfrak{x}_2}},$$

где $M(f)$ – константа, не зависящая от n_1, n_2 .

Когда X_1, X_2 – конечные или бесконечные промежутки на $\mathbb{R}$ с весами Якоби, Лагерра или Эрмита, теорема об угле при $r_1 < 1$, $r_2 < 1$, $\nu = 0$ в случаях некоторых конкретных операторов сдвига и дифференцирования получена в [1] и [2].

Из теоремы об угле следует, что все логарифмические классы с одинаковой характеристикой $\mathfrak{x}$ и параметром ν совпадают между собой, так как имеют одну и ту же конструктивную характеристику в терминах приближения углом. Поэтому эти классы можно обозначать через $SH(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \nu)$.

Наилучшим приближением гиперболическим углом с параметром $\bar{\rho} = (\rho_1, \rho_2)$, $\rho_i > 0$, $i = 1, 2$, порядка $N \in \mathbb{R}_+$ в пространстве $L_2(X_1 \times X_2)$ называется величина

$$E_N^{(\rho_1, \rho_2)}(f) = \min_P \|f - P\|,$$

где минимум берется по всем полиномам с гармониками в множестве

$$\Gamma_N^{(\rho_1, \rho_2)} = \{(k, l) \in \mathbb{Z}_+^2 : k^{\rho_1} l^{\rho_2} < N\}.$$

Будем рассматривать приближение гиперболическим углом только для таких функций $f(x_1, x_2)$, коэффициенты Фурье которых удовлетворяют условию $c_{k, 0} = c_{0, l} = 0$ для всех $k, l \in \mathbb{Z}_+$. Множество таких функций обозначим через $\mathfrak{M}$. Введем также обозначение $SH_0(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \nu) = SH(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \nu) \cap \mathfrak{M}$. Приближение полиномами с гармониками из гиперболических углов было начато К. И. Бабенко в [3].

Пусть $\mathfrak{E}^{(\rho_1, \rho_2)}(q, \nu) = \{f \in L_2(X_1 \times X_2) \cap \mathfrak{M} : E_N^{(\rho_1, \rho_2)}(f) \leq M(f) N^{-q} (\ln N)^{\nu/2}\}$, где $q \in (0, 1]$, $\nu \in \mathbb{R}_+$, а константа $M(f)$ не зависит от N .

ТЕОРЕМА 2 (о гиперболическом угле). 1) Для любых $0 < \kappa_1 \leq \kappa_2$, $q \in (0, 1)$, $\nu \in \mathbb{R}_+$ имеют место вложения

$$SH_0(\kappa_1, \kappa_2, \nu) \subset \mathfrak{E}^{(\kappa_1, \kappa_2/q)}(q, \nu), \quad (1)$$

$$SH_0(\kappa_1, \kappa_2, \nu) \subset \mathfrak{E}^{(\kappa_1, \kappa_2 q)}(1, \nu), \quad (2)$$

$$SH_0(\kappa_1, \kappa_2, \nu) \subset \mathfrak{E}^{(\kappa_1, \kappa_2)}(1, \nu + 1). \quad (3)$$

2) Для любых $\rho_1, \rho_2 > 0$, $q \in (0, 1]$, $\nu \in \mathbb{R}_+$ имеет место вложение

$$\mathfrak{E}^{(\rho_1, \rho_2)}(q, \nu) \subset SH_0(q\rho_1, q\rho_2, \nu). \quad (4)$$

Вложения (1)–(4) являются строгими, оценки наилучшего приближения функций (1)–(3) и оценка модуля гладкости функций (4) точны относительно указанных параметров этих классов.

Теорема о гиперболическом угле может быть сформулирована для конкретных пространств (например, для случая, когда X_i , $i = 1, 2$, – единичные сферы в $\mathbb{R}^n$ или промежутки на $\mathbb{R}$ с весами Якоби, Лагерра или Эрмита) с конкретными операторами обобщенного сдвига (разности) и дифференцирования, но в ее доказательстве существенно используется переход к дифференциальным операторам с произвольными параметрами $\mu \in \mathbb{R}$, определяемым через ряды Фурье.

В периодическом случае (т.е. при $X_1 = X_2 = [0, 2\pi]$) с обычным сдвигом и обычным дифференцированием оценки (2) и (3) при $\nu = 0$ получены впервые Я. С. Бугровым в [4] и [5].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ржавинская Е. В. О приближении функций двух переменных двумерным углом классических ортогональных полиномов // Деп. ВИНТИ. № 4248-80. М.: ВИНТИ, 1980.
2. Руновский К. В. Некоторые вопросы теории приближений. Дисс. ... к. ф.-м. н. М., 1989.
3. Бабенко К. И. // Докл. АН СССР. 1960. Т. 132. № 2. С. 247–250.
4. Бугров Я. С. // Матем. сб. 1964. Т. 64 (106). № 3. С. 410–418.
5. Бугров Я. С. // Тр. МИАН. 1974. Т. 131. С. 25–32.