Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. И. Калмыков, Об асимптотически точном неравенстве марковского типа для тригонометрических и алгебраических многочленов, *Матем. заметки*, 2015, том 98, выпуск 2, 303–307

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10720>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 14:15:04

Об асимптотически точном неравенстве марковского типа для тригонометрических и алгебраических многочленов

С. И. Калмыков

Введение. Неравенство Маркова для производной алгебраического многочлена на отрезке $[-1, 1]$ является одним из самых известных полиномиальных неравенств (см., например, [1; теорема 5.1.8]). Также имеет место его аналог для тригонометрического многочлена на отрезке меньше, чем период [1; 5.Е.14, с. 238 и 5.Е.19, с. 243]. В 2001 г. Тотик, используя метод полиномиальных прообразов, доказал асимптотически точное неравенство марковского типа для алгебраических полиномов на нескольких отрезках [2; теорема 4.1]. А в работе [3; теорема 4.1, следствия 4.2, 4.3] асимптотически точные неравенства указанного типа были получены для тригонометрических многочленов на нескольких отрезках и для алгебраических многочленов на нескольких дугах окружности. Случай одной дуги был рассмотрен в [4; с. 225]. В недавней работе [5], посвященной алгебраическим многочленам, компакт, состоящий из нескольких отрезков, был заменен более общим компактом, а именно, компактом, имеющим точку такую, что выполнено условие, подобное условию (1), сформулированному ниже. Целью настоящей работы является аналогичное обобщение для тригонометрических многочленов на 2π -периодическом замкнутом подмножестве $\mathcal{E}$ вещественной оси $\mathbb{R}$ и, как следствие, для алгебраических многочленов на компактном подмножестве единичной окружности.

Обозначим через P_n и T_n алгебраический и тригонометрический многочлены со степенями не выше n соответственно, а через $\|\cdot\|_K$ $\sup$ -норму на множестве K , и пусть $E = \mathcal{E} \cap [-\pi, \pi]$, а $\Gamma_E = \{z : z = e^{it}, t \in E\}$. Так как очевидно, что $\|T_n\|_{\mathcal{E}} = \|T_n\|_E$, будем использовать второй вариант. Точку a назовем *правой концевой точкой компакта E* , если найдется число $\rho > 0$ такое, что

$$[a - 2\rho, a] \subset E \quad \text{и} \quad (a, a + 2\rho) \cap E \neq \emptyset. \quad (1)$$

Аналогично определяется левая концевая точка. Не теряя общности, далее по тексту будем считать, что $a \in (-\pi, \pi)$ и что a – правая концевая точка. Также в этом случае будем говорить, что e^{ia} – концевая точка множества Γ_E .

Для того чтобы сформулировать результаты, нам понадобятся сведения из теории потенциала (см. например, [6], [7]). В частности, для равновесной меры компактного множества $K \subset \mathbb{R}$ (или $\mathbb{T} = \{|z| = 1\}$), имеющего положительную емкость ($\text{cap}(K) > 0$), введем обозначение ν_K . Эта мера абсолютно непрерывна во внутренних точках (размерности один) компакта K , и через $\omega_K(u)$ обозначим ее плотность по мере Лебега, т.е. $\omega_K(u) = d\nu_K(u)/du$. Если u_0 – концевая точка компакта K , тогда около точки u_0 плотность ω_K ведет себя так же, как $1/\sqrt{|u - u_0|}$ (см. [5; лемма 2.1], где при необходимости нужно перейти от компактов на $\mathbb{R}$ к компактам на $\mathbb{T}$, и [8; утверждение 2.2, с. 119]). Ключевую роль в работе играет величина

$$\Omega(\Gamma_E, e^{ia}) := \lim_{t \rightarrow a-0} \omega_E(e^{it}) |e^{it} - e^{ia}|^{1/2}.$$

Непосредственно из теоремы IV.1.6,е в книге [6] следует монотонность этой величины: если для компактов K и S выполнено (1) и, кроме того, $K \subset S$, то $\Omega(\Gamma_S, e^{ia}) \leq \Omega(\Gamma_K, e^{ia})$.

Множество $[-\pi, \pi] \setminus E$ состоит из конечного или счетного числа интервалов, открытых в $[-\pi, \pi]$:

$$[-\pi, \pi] \setminus E = \bigcup_{j=0}^{\infty} I_j$$

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант № 14-11-00022).

DOI: 10.4213/mzm10720

© С. И. Калмыков, 2015

(если E состоит из конечного числа отрезков, то бесконечное объединение заменяется конечным). Для определенности будем считать, что I_0 содержит $(a, a + 2\rho)$. Далее, для $m \geq 0$ рассмотрим множество

$$E_m^+ = [-\pi, \pi] \setminus \left(\bigcup_{j=0}^{m-2} I_j \right) = \bigcup_{j=1}^{m'} [a_{j,m'}, b_{j,m'}],$$

$$a_{1,m'} \leq b_{1,m'} < a_{2,m'} \leq b_{2,m'} < \dots < a_{m',m'} \leq b_{m',m'} = b_{0,m'}.$$

Очевидно, что E_m^+ содержит E и удовлетворяет условию (1). Далее, $\Gamma_{E_m^+} = \{z : z = e^{it}, t \in E_m^+\}$. Если для некоторого j $a_{j,m'} = b_{j,m'}$, то заменим этот вырожденный отрезок отрезком

$$[a_{j,m'} - \lambda_m, a_{j,m'} + \lambda_m] \cap [-\pi, \pi],$$

где $\lambda_m < 1/m$ выбирается настолько малым, чтобы все еще выполнялось условие (1). За получившимся множеством сохраним обозначение E_m^+ .

Так как E_m^+ состоит из конечного числа отрезков, то (см. [3; лемма 3.5] и [9; лемма 4.1])

$$\omega_{\Gamma_{E_m^+}}(e^{it}) = \frac{1}{2\pi} \frac{\prod_{j=0}^{m'-1} |e^{it} - e^{i\tau_j}|}{\sqrt{\prod_{j=1}^{m'} |e^{it} - e^{ia_{j,m'}}| |e^{it} - e^{ib_{j,m'}}|}}, \quad t \in \text{Int } E_m^+,$$

где числа $e^{i\tau_j}$ выбраны таким образом, что

$$\int_{b_{k,m'}}^{a_{k+1,m'}} \frac{\prod_{j=0}^{m'-1} (e^{it} - e^{i\tau_j})}{\sqrt{\prod_{j=1}^{m'} (e^{it} - e^{ia_{j,m'}})(e^{it} - e^{ib_{j,m'}})}} dt = 0, \quad k = 0, 1, \dots, m' - 1.$$

Под $\sqrt{\prod_{j=1}^{m'} (e^{it} - e^{ia_{j,m'}})(e^{it} - e^{ib_{j,m'}})}$ понимается регулярная ветвь в области $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Gamma_{E_m^+}$.

Нам также понадобится частный случай результата Анкона из [10]: пусть $\Gamma_E \subset \mathbb{T}$ — компактное множество положительной емкости. Тогда для любого m существует регулярное (в смысле задачи Дирихле в $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Gamma_E$) компактное множество $\Gamma_{E_m^-} \subset \Gamma_E$ такое, что

$$\text{cap}(\Gamma_E) \leq \text{cap}(\Gamma_{E_m^-}) + \frac{1}{m}.$$

Мы можем считать, что и соответствующее множество E_m^- удовлетворяет условию (1), т.е. e^{ia} — концевая точка множества $\Gamma_{E_m^-}$.

ЛЕММА 1. Имеем $\Omega(\Gamma_{E_m^\pm}, e^{ia}) \rightarrow \Omega(\Gamma_E, e^{ia})$ при $m \rightarrow \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО в целом повторяет доказательство утверждения 2.3 работы [5] с заменой множеств $E_m^\pm$ на $\Gamma_{E_m^\pm}$, где на этот раз использована *-слабая сходимость равновесных мер $\nu_{\Gamma_{E_m^\pm}}$ к ν_{Γ_E} (ср. [5; лемма 2.2]).

ЛЕММА 2 [6; следствие VI.3.6]. Пусть J_1 и J_2 — два непересекающихся компакта, лежащие на отрезке J . Тогда существуют число c , $0 < c < 1$, и алгебраические полиномы R_d , $\deg R_d \leq d$ (для всех достаточно больших d) такие, что

$$|R_d(x)| \leq c^d, \quad x \in J_1, \quad (2)$$

$$|R_d(x) - 1| \leq c^d, \quad x \in J_2, \quad (3)$$

$$0 \leq R_d(x) \leq 1, \quad x \in J. \quad (4)$$

Основные результаты.

ТЕОРЕМА 1. Для тригонометрического полинома T_n справедливо неравенство

$$\|T'_n\|_{[a-\rho, a]} \leq (1 + o(1))n^2 8\pi^2 \Omega(\Gamma_E, e^{ia})^2 \|T_n\|_E. \quad (5)$$

Это неравенство точное, так как существует последовательность полиномов $T_n \not\equiv 0$, $n = 1, 2, \dots$, таких, что

$$|T'_n(a)| \geq (1 - o(1))n^2 8\pi^2 \Omega(\Gamma_E, e^{ia})^2 \|T_n\|_E.$$

Величина $o(1)$ равномерно по T_n стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если E состоит из конечного числа отрезков, то все сводится к теореме 4.1 работы [3]. Далее, следуя работе [5], докажем (5) сначала в случае, когда E – компакт, регулярный в смысле задачи Дирихле в $\overline{\mathbb{C}} \setminus E$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Тогда существует тригонометрический полином $Q_{n\varepsilon}$ степени не выше $n\varepsilon$, удовлетворяющий условиям

$$1 - e^{-n\tau} \leq Q_{n\varepsilon}(t) \leq 1, \quad t \in [a - \rho, a], \quad (6)$$

$$0 \leq Q_{n\varepsilon}(t) \leq 1, \quad t \in [-\pi, \pi], \quad (7)$$

$$|Q_{n\varepsilon}(t)| \leq e^{-n\tau}, \quad t \in [-\pi, \pi] \setminus \left(a - \frac{3\rho}{2}, a + \frac{3\rho}{2}\right). \quad (8)$$

Существование тригонометрического многочлена с указанными свойствами вытекает из леммы 2. Действительно, пусть t_0 – середина отрезка $[a - \rho, a]$, тогда положим

$$J_1 := \left\{ \cos(t - t_0) \mid t \in [-\pi, \pi] \setminus \left(a - \frac{3\rho}{2}, a + \frac{3\rho}{2}\right) \right\}, \quad J_2 := \{ \cos(t - t_0) \mid t \in [a - \rho, a] \},$$

а в качестве J рассмотрим отрезок $[-2, 2]$. Тогда существуют число c , $0 < c < 1$, и алгебраические многочлены $R_{n\varepsilon}$, удовлетворяющие условиям (2)–(4). Легко видеть, что для тригонометрического многочлена $Q_{n\varepsilon}(t) = R_{n\varepsilon}(\cos(t - t_0))$ выполнены условия (6)–(8), где константа τ возникает при переходе к основанию e .

Пусть $g_{\Gamma_E}(\zeta, 0)$ и $g_{\Gamma_E}(\zeta, \infty)$ – функции Грина области $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Gamma_E$ с полюсами в точках 0 и ∞ соответственно. Из регулярности множества E (а соответственно и Γ_E) следует непрерывность $g_{\Gamma_E}(\zeta, 0)$ и $g_{\Gamma_E}(\zeta, \infty)$ в точках, отличных от 0 и ∞ , а также их равенство нулю в точках Γ_E . Следовательно, существует $0 < \delta < 1$, $\delta = \delta(\tau)$ такое, что если $t \in \mathbb{R}$, $\text{dist}(t, E) \leq \delta$, то

$$g_{\Gamma_E}(e^{it}, 0) < \frac{\tau^2}{2}. \quad (9)$$

Выберем m достаточно большим, чтобы для множества E_m^+ выполнялось: $\text{dist}(t, E) \leq \delta$ для всех $t \in E_m^+$.

Рассмотрим тригонометрический полином $T_n Q_{n\varepsilon}$ степени не выше $n(1 + \varepsilon)$. Если $t \in E$, то из (7) вытекает, что

$$|T_n(t) Q_{n\varepsilon}(t)| \leq \|T_n\|_E.$$

Далее нам понадобится неравенство типа Бернштейна–Уолша для T_n в точках вещественной оси. Пусть

$$\begin{aligned} T_n(t) &= \sum_{k=0}^n (A_k \cos kt + B_k \sin kt) \\ &= \sum_{k=0}^n (\text{Re } A_k \cos kt + \text{Re } B_k \sin kt) + i \sum_{k=0}^n (\text{Im } A_k \cos kt + \text{Im } B_k \sin kt). \end{aligned}$$

Рассмотрим алгебраические многочлены

$$S_n^{(1)}(z) = \sum_{k=0}^n (\text{Re } A_k - i \text{Re } B_k) z^k, \quad S_n^{(2)}(z) = \sum_{k=0}^n (\text{Im } A_k - i \text{Im } B_k) z^k.$$

Легко проверяется, что при всех комплексных t имеет место равенство $T_n(t) = \eta(e^{it})$, в котором

$$\eta(z) = \frac{1}{2} \left[S_n^{(1)}(z) + \overline{S_n^{(1)}\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} \right] + \frac{i}{2} \left[S_n^{(2)}(z) + \overline{S_n^{(2)}\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} \right].$$

Замечая, что $\|\eta\|_{\Gamma_E} = \|T_n\|_E$, применим к рациональной функции η аналог неравенства Бернштейна–Уолша (см. [11; с. 641]), а затем воспользуемся симметрией множества $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Gamma_E$ относительно единичной окружности:

$$|T_n(t)| = |\eta(e^{it})| \leq \|\eta\|_{\Gamma_E} e^{n(g_{\Gamma_E}(e^{it}, 0) + g_{\Gamma_E}(e^{it}, \infty))} = \|T_n\|_E e^{2ng_{\Gamma_E}(e^{it}, 0)}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Если теперь $t \in E_m^+ \setminus E$, то при достаточно большом n согласно (8) и (9) имеем

$$|T_n(t)Q_{n\varepsilon}(t)| \leq \|T_n\|_E \exp(2ng_{\Gamma_E}(e^{it}, 0)) \exp(-n\tau) \leq \|T_n\|_E \exp(n\tau^2) \exp(-n\tau) \leq \|T_n\|_E$$

и, таким образом, $\|T_n Q_{n\varepsilon}\|_{E_m^+} \leq \|T_n\|_E$.

Далее, при $t \in [a - \rho, a]$ справедливо неравенство (6), поэтому

$$|(T_n(t)Q_{n\varepsilon}(t))'| \geq |T_n'(t)Q_{n\varepsilon}(t)| - |T_n(t)Q_{n\varepsilon}'(t)| \geq |T_n'(t)|(1 - e^{-n\tau}) - |T_n(t)Q_{n\varepsilon}'(t)|.$$

Используя неравенство Бернштейна для полинома $Q_{n\varepsilon}$ (см. [1; следствие 5.1.5]), получаем $\|Q_{n\varepsilon}'\|_{[-\pi, \pi]} \leq n\varepsilon$. Следовательно, для $t \in [a - \rho, a]$ имеем

$$|T_n'(t)|(1 - e^{-n\tau}) \leq |(T_n(t)Q_{n\varepsilon}(t))'| + |T_n(t)Q_{n\varepsilon}'(t)| \leq |(T_n(t)Q_{n\varepsilon}(t))'| + n\varepsilon \|T_n\|_E.$$

Отметим теперь, что множество E_m^+ состоит из конечного числа отрезков, и мы можем применить соответствующий результат Тотика из [3; теорема 4.1] к $T_n Q_{n\varepsilon}$. Таким образом,

$$\begin{aligned} |T_n'(t)|(1 - e^{-n\tau}) &\leq ((1 + \varepsilon)n)^2 (1 + o_{E_m^+}(1)) 8\pi^2 \Omega(\Gamma_{E_m^+}, e^{ia})^2 \|T_n Q_{n\varepsilon}\|_{E_m^+} + n\varepsilon \|T_n\|_E \\ &\leq n^2 \|T_n\|_E \left((1 + o_{E_m^+}(1))(1 + \varepsilon)^2 8\pi^2 \Omega(\Gamma_{E_m^+}, e^{ia})^2 + \frac{\varepsilon}{n} \right); \end{aligned}$$

используя монотонность $\Omega(\cdot, a)$, продолжаем оценку

$$\leq n^2 \|T_n\|_E \left((1 + o_E(1))(1 + \varepsilon)^2 8\pi^2 \Omega(\Gamma_E, e^{ia})^2 + \frac{\varepsilon}{n} \right).$$

Так как $\varepsilon > 0$ было выбрано произвольно, то (5) верно для регулярных компактных множеств E .

Условие регулярности можно снять, используя множества E_m^- и $\Gamma_{E_m^-}$. Действительно,

$$\|T_n'\|_{[a-\rho, a]} \leq n^2 \|T_n\|_{E_m^-} (1 + o_{E_m^-}(1)) 8\pi^2 \Omega(\Gamma_E, e^{ia})^2 \leq n^2 \|T_n\|_E (1 + o_{E_m^-}(1)) 8\pi^2 \Omega(\Gamma_E, e^{ia})^2,$$

а так как согласно лемме 1 величина $\Omega(\Gamma_{E_m^-}, e^{ia})$ может быть выбрана сколь угодно близкой к $\Omega(\Gamma_E, e^{ia})$ при достаточно большом m , то (5) справедливо в общем случае.

Покажем теперь точность полученной оценки. Для этого построим последовательность тригонометрических многочленов $\{T_n\}_{n=1}^\infty$, $\deg(T_n) = n$, такую, что

$$\frac{|T_n'(a)|}{n^2 \|T_n\|_E} \rightarrow 8\pi^2 \Omega(\Gamma_E, a)^2, \quad n \rightarrow \infty.$$

Как уже было отмечено, множества E_m^+ состоят из конечного числа отрезков, поэтому к ним применима теорема 4.1 работы [3], согласно которой существует последовательность тригонометрических многочленов $\{T_{m,n}\}_{n=1}^\infty$, $\deg(T_{m,n}) = n$, такая, что

$$|T'_{m,n}(a)| \geq (1 - o_{E_m^+}(1))8\pi^2\Omega(\Gamma_{E_m^+}, e^{ia})^2 n^2 \|T_{m,n}\|_{E_m^+}.$$

Так как $E \subset E_m^+$, то $\|T_{m,n}\|_{E_m^+} \geq \|T_{m,n}\|_E$, поэтому

$$|T'_{m,n}(a)| \geq (1 - o_{E_m^+}(1))8\pi^2\Omega(\Gamma_{E_m^+}, e^{ia})^2 n^2 \|T_{m,n}\|_E.$$

На этот раз уже величина $\Omega(\Gamma_{E_m^+}, a)$ может быть сколь угодно близкой к $\Omega(\Gamma_E, a)$ при достаточно большом m , поэтому в качестве искомой последовательности может быть выбрана последовательность $T_n = T_{m_n, n}$, если m_n стремиться к бесконечности достаточно медленно, при $n \rightarrow \infty$.

Если теперь через H обозначить наименьшую дугу на $\mathbb{T}$, соединяющую точки $e^{i(a-\rho)}$ и e^{ia} , то имеет место

СЛЕДСТВИЕ. Для алгебраического полинома P_n справедливо неравенство

$$\|P'_n\|_H \leq (1 + o(1))n^2 2\pi^2 \Omega(\Gamma_E, e^{ia})^2 \|P_n\|_{\Gamma_E}. \quad (10)$$

Это неравенство точное, так как существует последовательность полиномов $P_n \not\equiv 0$, $n = 1, 2, \dots$, таких, что

$$|P'_n(e^{ia})| \geq (1 - o(1))n^2 2\pi^2 \Omega(\Gamma_E, e^{ia})^2 \|P_n\|_{\Gamma_E}. \quad (11)$$

Величина $o(1)$ равномерно по P_n стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы можем предполагать, что n – четное (так как $(n+1)^2/n^2 = 1 + o(1)$, $n \rightarrow \infty$). Рассмотрим тригонометрический полином $T_{n/2} = e^{-itn/2} P_n(e^{it})$ степени выше, чем $n/2$. Для доказательства (10) достаточно применить теорему 1.

Неравенство (11) доказывается так же, как асимптотическая точность в теореме 1, только на этот раз, используется соответствующая часть следствия 4.3 работы [3].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] P. Borwein, T. Erdélyi, *Polynomials and Polynomial Inequalities*, Grad. Texts in Math., **161**, Springer-Verlag, New York, 1995. [2] V. Totik, *Acta Math.*, **187**:1 (2001), 139–160. [3] V. Totik, “Bernstein and Markov type inequalities for trigonometric polynomials on general sets”, *Int. Math. Res. Not.* (to appear). [4] B. Nagy, V. Totik, *Constr. Approx.*, **37**:2 (2013), 223–232. [5] S.I. Kalmykov, B. Nagy, V. Totik, “Asymptotically Sharp Markov and Schur Inequalities on General Sets”, *Complex Analysis and Operator Theory*, 2014. [6] E. B. Saff, V. Totik, *Logarithmic Potentials with External Fields*, Grundlehren Math. Wiss., **316**, Springer-Verlag, Berlin, 1997. [7] T. Ransford, *Potential Theory in the Complex Plane*, London Math. Soc. Stud. Texts, **28**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995. [8] V. Totik, *Adv. Math.*, **252** (2014), 114–149. [9] F. Peherstorfer, R. Steinbauer, *SIAM J. Math. Anal.*, **32**:2 (2000), 385–402. [10] A. Ancona, *Théorie du potentiel*, Lecture Notes in Math., **1096**, Springer-Verlag, Berlin, 1984, 34–68. [11] A. A. Гончар, *Матем. сб.*, **78**:4 (1969), 640–654.

С. И. Калмыков

Дальневосточный федеральный
университет, г. Владивосток;
Bolyai Institute, University of Szeged, Венгрия;
Институт прикладной математики
ДВО РАН, г. Владивосток
E-mail: sergeykalmykov@inbox.ru

Поступило

10.11.2014