Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Д. Степанов, Об оптимальных пространствах Банаха, содержащих весовой конус монотонных или квазивогнутых функций, *Матем. заметки*, 2015, том 98, выпуск 6, 907–922

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10725>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 17:46:12

Об оптимальных пространствах Банаха, содержащих весовой конус монотонных или квазивогнутых функций

В. Д. Степанов

В работе дано описание оптимальных (минимальных) пространств Банаха, содержащих заданные конусы монотонных или квазивогнутых функций на полуоси из весовых пространств Лебега. Ответ дан в виде точных формул для нормы оптимального пространства. Рассмотрены все случаи параметра суммирования.

Библиография: 30 названий.

DOI: 10.4213/mzm10725

1. Введение

Обозначим $\mathfrak{M}$ класс всех функций на $\mathbb{R}_+ := [0, \infty)$, измеримых по Лебегу, $\mathfrak{M}^+ := \{f \in \mathfrak{M} : f \geq 0\}$. Пусть $K \subset \mathfrak{M}^+$ – конус с положительным однородным функционалом $\sigma: K \rightarrow \mathbb{R}_+$, т.е. если $\alpha > 0$ и $f \in K$, то $\alpha f \in K$, $\sigma(\alpha f) = \alpha \sigma(f)$, причем $\sigma(f) = 0$, если и только если $f = 0$ почти всюду.

Хорошо известна задача о построении для заданного конуса K оптимального пространства Банаха $X_0 \subset \mathfrak{M}$ такого, что $K \hookrightarrow X_0$ и, если $K \hookrightarrow X$ еще для некоторого пространства Банаха $X \subset \mathfrak{M}$, то $X \subset X_0$. Здесь $K \hookrightarrow X$ означает непрерывное вложение. Эта задача рассматривалась в работе Гольдмана и Забрейко [1], где отмечена ее тесная связь с аналогичными задачами об оптимальных пространствах в теории вложения пространств Соболева, Бесова, Кальдерона, потенциалов Бесселя, Рисса и др. (см., например, [2]–[7]) и приложениями к оценкам аппроксимативных чисел.

Пусть $\mathfrak{M}^\downarrow \subset \mathfrak{M}^+$ – подмножество всех невозрастающих функций, $\mathfrak{M}^\uparrow \subset \mathfrak{M}^+$ – подмножество всех неубывающих функций. Пусть $0 < p \leq \infty$ и $v \in \mathfrak{M}^+$ – заданная весовая функция (вес). Мы рассматриваем весовой конус монотонных функций $K = \mathcal{L}_{p,v} \subset \mathfrak{M}^\downarrow$, который при $0 < p < \infty$ имеет вид

$$\mathcal{L}_{p,v} := \left\{ f \in \mathfrak{M}^\downarrow : \|f\|_{p,v} := \left(\int_0^\infty \left(\frac{1}{t} \int_0^t f \right)^p v(t) dt \right)^{1/p} < \infty \right\},$$

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 15-01-02732) и программы “Ведущие научные школы” (грант № НШ-4479.2014.1).

при $p = \infty$

$$\mathcal{L}_{\infty, v} := \left\{ f \in \mathfrak{M}^{\downarrow} : \|f\|_{\infty, v} := \operatorname{ess\,sup}_{t \geq 0} \left(\frac{1}{t} \int_0^t f \right) v(t) < \infty \right\},$$

и находим оптимальное пространство Банаха X_0 , содержащее этот конус. Ответ дан в виде явных формул для нормы пространства $X_0 \supset K$ (раздел 3, теорема 2).

Раздел 2 посвящен вспомогательной задаче нахождения пространства Банаха, ассоциированного с конусом K , которая сводится к характеристизации весовых неравенств вложения $\mathcal{L}_{p, v}$ в весовое пространство Лебега на полуоси. Решение последней задачи берет начало в работах [8] и [9], но более явные формулы найдены Гогатишвили и Пиком в [10] и [11]. Однако метод дискретизации [9] и анти-дискретизации, использованный в доказательствах [10] и [11], довольно сложен, поэтому в разделе 2 мы приводим простое доказательство необходимых нам фактов, отличающееся от доказательств в [9]–[12], а наработанную при этом технику используем в рассуждениях разделов 3 и 4. В заключительном разделе 4 мы решаем аналогичную задачу для весового конуса квазивогнутой функций

$$\Omega_{0,1} := \left\{ f \in \mathfrak{M}^+ : f \in \mathfrak{M}^{\uparrow}, \frac{f(t)}{t} \in \mathfrak{M}^{\downarrow} \right\}.$$

Для $0 < p \leq \infty$ и весовой функции $v \in \mathfrak{M}^+$ мы рассматриваем весовой конус функций $K = \mathcal{L}_{p, v}$, имеющий вид

$$\mathcal{L}_{p, v} := \left\{ f \in \Omega_{0,1} : \|f\|_{\mathcal{L}_{p, v}} := \left(\int_0^{\infty} [f]^p v \right)^{1/p} < \infty \right\}, \quad 0 < p < \infty,$$

или при $p = \infty$

$$\mathcal{L}_{\infty, v} := \left\{ f \in \Omega_{0,1} : \|f\|_{\mathcal{L}_{\infty, v}} := \operatorname{ess\,sup}_{t \geq 0} f(t)v(t) < \infty \right\},$$

и находим оптимальное пространство Банаха X_0 , содержащее этот конус. Отметим, что конус $\mathcal{L}_{p, v}$ впервые был рассмотрен Сойером [13] и затем этот конус, а также конус $\mathcal{L}_{p, v}$ интенсивно использовались при изучении задач в пространствах Лоренца и смежных вопросах анализа [8]–[12], [14]–[26] и др.

Всюду в работе произведения вида $0 \cdot \infty$ полагаются равными 0. Соотношение $A \ll B$ означает $A \leq cB$ с константой c , зависящей только от p ; $A \approx B$ равносильно $A \ll B \ll A$. Мы используем значки $:=$ и $=$: для определения новых величин. Если $0 < p \leq \infty$, то

$$p' := \begin{cases} \frac{p}{p-1}, & \text{если } p \neq 1, \infty, \\ \infty, & \text{если } p = 1, \\ 1, & \text{если } p = \infty. \end{cases}$$

2. Весовые неравенства на конусе монотонных функций

2.1. Пусть $0 < p < \infty$. При фиксированной $g \in \mathfrak{M}^{\downarrow}$ мы рассматриваем характеристическую проблему для неравенства

$$\int_0^{\infty} fg \leq C \left(\int_0^{\infty} \left(\frac{1}{t} \int_0^t f \right)^p v(t) dt \right)^{1/p}, \quad f \in \mathfrak{M}^{\downarrow}, \quad (2.1)$$

где $0 < p < \infty$, константу C мы считаем наименьшей из возможных, и задача состоит в том, чтобы найти точную оценку константы C через вес v и параметр p . При этом мы будем считать, что выполняются условия невырожденности

$$0 < \int \frac{v(z) dz}{(z+t)^p} < \infty, \quad \int_0^1 z^{-p} v(z) dz = \int_1^\infty v = \infty. \quad (2.2)$$

При нарушении этих условий ситуация сводится к анализу ряда патологических случаев.

При $p = \infty$ аналогичная задача рассматривается для неравенства

$$\int_0^\infty fg \leq C \operatorname{ess\,sup}_{t \geq 0} \left(\frac{1}{t} \int_0^t f \right) v(t), \quad f \in \mathfrak{M}^\downarrow.$$

Положим

$$Pv(t) := \frac{1}{t} \int_0^t v, \quad Q_p v(t) := pt^{p-1} \int_t^\infty s^{-p} v(s) ds.$$

Тогда тривиальной проверкой устанавливается, что

$$PQ_p = Q_p P = P + \frac{1}{p} Q_p.$$

Случай $p = 1$. В этом случае неравенство (2.1) при $g \in \mathfrak{M}^+$ имеет вид

$$\int_0^\infty fg \leq C \int_0^\infty f(s) ds \int_s^\infty \frac{v(t)}{t} dt, \quad f \in \mathfrak{M}^\downarrow,$$

и его характеристика известна [14; предложение 1]:

$$C = \sup_{s>0} \frac{\int_0^s g}{\int_0^s (\int_z^\infty (v(t)/t) dt) dz} = \sup_{s>0} \frac{Pg(s)}{PQ_1 v(s)}.$$

Случай $p \neq 1, \infty$. Пусть

$$F(t) := \left(\frac{1}{t} \int_0^t f \right)^p, \quad f \in \mathfrak{M}^\downarrow,$$

и, не ограничивая общности, предположим, что

$$g(t) = \int_t^\infty \frac{h(s) ds}{s}, \quad h \in \mathfrak{M}^+.$$

Тогда (2.1) эквивалентно

$$\left(\int_0^\infty F^{1/p} h \right)^p \leq C^p \int_0^\infty F v. \quad (2.3)$$

Так как

$$F(t) \in \mathfrak{M}^\downarrow, \quad t^p F(t) \in \mathfrak{M}^\uparrow,$$

то из леммы Синнамона [20; лемма 2.3] следует, что существует $\bar{F}(t) \approx F(t)$ и последовательность функций $\{w_n\} \subset \mathfrak{M}^+$ такая, что

$$\int_0^\infty \frac{w_n(z) dz}{(z+t)^p} \uparrow \bar{F}(t),$$

поэтому (2.3) эквивалентно

$$\left(\int_0^\infty h(t) \left(\int_0^\infty \frac{w(z) dz}{(z+t)^p} \right)^{1/p} dt \right)^p \ll C^p \int_0^\infty Vw, \quad w \in \mathfrak{M}^+, \quad (2.4)$$

где

$$V(z) := \int_0^\infty \frac{v(t) dt}{(z+t)^p} \approx t^{1-p} PQ_p v(t).$$

Положим

$$S_p w(t) := \int_0^\infty \frac{w(z) dz}{(z+t)^p}.$$

Тогда (2.4) эквивалентно

$$\left(\int_0^\infty [S_p w]^{1/p} h \right)^p \ll C_0^p \int_0^\infty Vw, \quad w \in \mathfrak{M}^+, \quad (2.5)$$

где $C_0 \approx C$.

Случай $0 < p < 1$. Тогда для наилучшей константы C_0 в неравенстве (2.5) по теореме [27; гл. XI, § 1.5, теорема 4] получаем

$$C_0^p = \sup_{z>0} \frac{1}{V(z)} \left(\int_0^\infty \frac{h(t) dt}{t+z} \right)^p.$$

Так как

$$\int_0^\infty \frac{h(t) dt}{t+z} \approx \frac{1}{z} \int_0^z h + \int_z^\infty \frac{h(t) dt}{t} = \frac{1}{z} \int_0^z \int_s^\infty \frac{h(t) dt}{t} ds = \frac{1}{z} \int_0^z g, \quad (2.6)$$

то наилучшая константа в (2.1) при $0 < p < 1$ и $g \in \mathfrak{M}^\downarrow$ имеет двустороннюю оценку

$$C \approx \sup_{z>0} \left(\frac{1}{z} \int_0^z g \right) \frac{1}{V^{1/p}(z)} \approx \sup_{z>0} \left(\frac{1}{z} \int_0^z g \right) \frac{z^{1/p'}}{(PQ_p v(z))^{1/p}}.$$

Случай $1 < p < \infty$. Нетрудно видеть, что (2.5), а следовательно, (2.1) эквивалентно одновременному выполнению двух неравенств

$$\begin{aligned} \left(\int_0^\infty \frac{h(t)}{t} \left(\int_0^t w \right)^{1/p} dt \right)^p &\leq C_1^p \int_0^\infty w V_1, \\ \left(\int_0^\infty h(t) \left(\int_t^\infty w \right)^{1/p} dt \right)^p &\leq C_2^p \int_0^\infty w V_2, \end{aligned}$$

где

$$V_1(z) := \frac{1}{z^p} \int_0^z v + \int_z^\infty t^{-p} v(t) dt \approx z^{1-p} PQ_p v(z), \quad V_2(z) := z^p V_1(z),$$

причем

$$C \approx C_1 + C_2.$$

Известно [28; теорема 3.3] (см. также [29; формула (1.18)], что для наилучших констант C_1 и C_2 выполняются оценки

$$\begin{aligned} C_1^{p'} &\approx \int_0^\infty [V_1(x)]^{1/(1-p)} \left(\int_x^\infty \frac{h(s) ds}{s} \right)^{1/(p-1)} \frac{h(x)}{x} dx, \\ C_2^{p'} &\approx \int_0^\infty [V_2(x)]^{1/(1-p)} \left(\int_0^x h(t) dt \right)^{1/(p-1)} h(x) dx. \end{aligned}$$

Интегрируя по частям, находим

$$\begin{aligned} C_1^{p'} &\approx \int_0^\infty \left(\int_x^\infty \frac{h(s) ds}{s} \right)^{p'} \frac{x^{1/(p-1)} \int_0^x v}{V_2^{p'}(x)} dx, \\ C_2^{p'} &\approx \int_0^\infty \left(\int_0^x h \right)^{p'} \frac{x^{p-1} \int_x^\infty s^{-p} v(s) ds}{V_2^{p'}(x)} dx, \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} C_1^{p'} &\approx \int_0^\infty \left(\int_x^\infty \frac{h(s) ds}{s} \right)^{p'} \frac{Pv(x)}{(PQ_p v(x))^{p'}} dx, \\ C_2^{p'} &\approx \int_0^\infty \left(\frac{1}{x} \int_0^x h \right)^{p'} \frac{Q_p v(x)}{(PQ_p v(x))^{p'}} dx. \end{aligned}$$

Поскольку $PQ_p v \geq Pv$, $PQ_p v \geq Q_p v$, то

$$\begin{aligned} \frac{Pv(x)}{(PQ_p v(x))^{p'}} &= \frac{Pv(x)PQ_p v(x)}{(PQ_p v(x))^{p'+1}} \geq \frac{Pv(x)Q_p v(x)}{(PQ_p v(x))^{p'+1}}, \\ \frac{Q_p v(x)}{(PQ_p v(x))^{p'}} &= \frac{Q_p v(x)PQ_p v(x)}{(PQ_p v(x))^{p'+1}} \geq \frac{Pv(x)Q_p v(x)}{(PQ_p v(x))^{p'+1}} \end{aligned}$$

и, пользуясь (2.6), мы находим

$$C^{p'} \approx C_1^{p'} + C_2^{p'} \gg \int_0^\infty \left(\frac{1}{x} \int_0^x g(t) dt \right)^{p'} \frac{Pv(x)Q_p v(x)}{(PQ_p v(x))^{p'+1}} dx.$$

Для доказательства обратного неравенства

$$C^{p'} \approx C_1^{p'} + C_2^{p'} \ll \int_0^\infty \left(\frac{1}{x} \int_0^x g(t) dt \right)^{p'} \frac{Pv(x)Q_p v(x)}{(PQ_p v(x))^{p'+1}} dx \quad (2.7)$$

заметим, что (2.7) эквивалентно двум неравенствам

$$C_1^{p'} \approx \int_0^\infty \left(\int_x^\infty \frac{h(s) ds}{s} \right)^{p'} \frac{Pv(x)dx}{(PQ_p v(x))^{p'}} \ll \int_0^\infty \left(\frac{1}{x} \int_0^x g(t) dt \right)^{p'} \frac{Pv(x)Q_p v(x)}{(PQ_p v(x))^{p'+1}} dx, \quad (2.8)$$

$$C_2^{p'} \approx \int_0^\infty \left(\frac{1}{x} \int_0^x h \right)^{p'} \frac{Q_p v(x) dx}{(PQ_p v(x))^{p'}} \ll \int_0^\infty \left(\frac{1}{x} \int_0^x g(t) dt \right)^{p'} \frac{Pv(x)Q_p v(x)}{(PQ_p v(x))^{p'+1}} dx. \quad (2.9)$$

Напомним, что здесь $g(t) = \int_t^\infty (h(s)/s) ds$.

Покажем, что неравенства (2.8) и (2.9), а следовательно, и (2.7) выполняются. Для (2.8) имеем

$$\int_0^\infty [g]^{p'} \frac{Pv}{(PQ_p v)^{p'}} \ll \int_0^\infty \left(\frac{1}{x} \int_0^x g \right)^{p'} \psi(x) dx, \quad g \in \mathfrak{M}^\perp, \quad (2.10)$$

где

$$\psi := \frac{PvQ_p v}{(PQ_p v)^{p'+1}}.$$

По теореме [8; теорема 4.2(a)] (2.10) верно, если и только если

$$\int_0^t \frac{Pv}{(PQ_p v)^{p'}} \ll \int_0^t s^{p'-1} ds \int_s^\infty z^{-p'} \psi(z) dz. \quad (2.11)$$

Интегрируя по частям при условии (2.2), находим

$$\begin{aligned} \int_s^\infty z^{-p'} \psi(z) dz &= \int_s^\infty z^{-p'} \frac{Pv(z)Q_p v(z)}{(PQ_p v)^{p'+1}} dz = \int_s^\infty \left(\int_0^z v \right) \frac{Q_p v(z)}{(\int_0^z Q_p v)^{p'+1}} dz \\ &\approx \int_s^\infty \left(\int_0^z v \right) d \left(- \left(\int_0^z Q_p v \right)^{-p'} \right) \geq \frac{\int_0^s v}{(\int_0^s Q_p v)^{p'}}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\int_0^t s^{p'-1} ds \int_s^\infty z^{-p'} \psi(z) dz \gg \int_0^t s^{p'-1} \frac{\int_0^s v}{(\int_0^s Q_p v)^{p'}} ds = \int_0^t \frac{Pv}{(PQ_p v)^{p'}}$$

и (2.11) доказано.

Теперь покажем (2.9). Заменой

$$u(x) := \int_0^x h$$

мы сводим (2.9) к неравенству

$$\int_0^\infty [u(x)]^{p'} \frac{Q_p v(x)}{(\int_0^x Q_p v)^{p'}} dx \ll \int_0^\infty \left(\int_x^\infty s^{-2} u(s) ds \right)^{p'} \psi(x) dx, \quad (2.12)$$

где $u \in \mathfrak{M}^\dagger$. По теореме [8; теорема 4.2(b)] (2.12) верно, если и только если

$$\int_t^\infty \frac{Q_p v(x)}{(\int_0^x Q_p v)^{p'}} dx \approx \frac{1}{(\int_0^t Q_p v)^{p'-1}} = \frac{1}{t^{p'-1} (PQ_p v(t))^{p'-1}} \ll \frac{1}{t^{p'}} \int_0^t \psi + \int_t^\infty \frac{\psi(z) dz}{z^{p'}}. \quad (2.13)$$

Для доказательства последнего неравенства запишем

$$\begin{aligned} \int_0^t \psi &= \int_0^t \frac{Pv(z)Q_p v(z)}{(PQ_p v)^{p'+1}} dz = \int_0^t \frac{Pv(z)Q_p v(z)}{(Q_p v)^{p'+1}} dz = \int_0^t \frac{z^{-p-1} (\int_0^z v) \int_z^\infty s^{-p} v(s) ds}{(\int_z^\infty s^{-p-1} (\int_0^s v) ds)^{p'+1}} dz \\ &\approx \int_0^t \left(\int_z^\infty s^{-p} v(s) ds \right) d \left(\left(\int_z^\infty s^{-p-1} \left(\int_0^s v \right) ds \right)^{-p'} \right) \\ &\gg \frac{\int_t^\infty s^{-p} v(s) ds}{(\int_z^\infty s^{-p-1} (\int_0^s v) ds)^{p'}}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\frac{1}{t^{p'}} \int_0^t \psi \gg \frac{Q_p v(t)}{t^{p'-1} (PQ_p v(t))^{p'}}. \quad (2.14)$$

Для второго слагаемого в правой части (2.13) запишем

$$\begin{aligned} \int_t^\infty \frac{\psi(z) dz}{z^{p'}} &= \int_t^\infty \frac{(\int_0^z v) Q_p v(z)}{(\int_0^z Q_p v)^{p'+1}} dz = \int_t^\infty \left(\int_0^z v \right) d \left(- \left(\int_0^z Q_p v \right)^{-p'} \right) \\ &\gg \frac{\int_0^t v}{(\int_0^t Q_p v)^{p'}} = \frac{Pv(t)}{t^{p'-1} (PQ_p v(t))^{p'}.} \end{aligned} \quad (2.15)$$

Из (2.14) и (2.15) следует

$$\frac{1}{t^{p'}} \int_0^t \psi + \int_t^\infty \frac{\psi(z) dz}{z^{p'}} \gg \frac{Pv(t) + Q_p v(t)}{t^{p'-1} (PQ_p v(t))^{p'}} = \frac{1}{t^{p'-1} (PQ_p v(t))^{p'-1}}$$

и (2.13) доказано.

Таким образом, при $1 < p < \infty$ и $g \in \mathfrak{M}^\perp$ для наилучшей константы в (2.1) выполняется соотношение

$$C \approx \left(\int_0^\infty \left(\frac{1}{x} \int_0^x g(t) dt \right)^{p'} \frac{Pv(x) Q_p v(x)}{(PQ_p v(x))^{p'+1}} dx \right)^{1/p'}.$$

2.2. В этом пункте мы снимем условие монотонности функции g в неравенстве (2.1).

Пусть $w(x) \in \mathfrak{M}^+$. Задача о характеристизации неравенства (2.1) при $g = w$ заменой $f(x) = \int_x^\infty \rho$ сводится к двусторонней оценке функционала

$$J := \sup_{f \in \mathfrak{M}^\perp} \frac{\int_0^\infty f w}{(\int_0^\infty ((1/t) \int_0^t f)^{p'} v(t) dt)^{1/p}} = \sup_{\rho \in \mathfrak{M}^+} \frac{\int_0^\infty \rho W}{(\int_0^\infty ((1/t) \int_0^t ds \int_s^\infty \rho)^{p'} v(t) dt)^{1/p}}, \quad (2.16)$$

где

$$W(t) := \int_0^t w.$$

Применяя [30; теорема 4.1], получаем

$$J = \sup_{\rho \in \mathfrak{M}^+} \frac{\int_0^\infty \rho \overline{W}}{(\int_0^\infty ((1/t) \int_0^t ds \int_s^\infty \rho)^{p'} v(t) dt)^{1/p}}, \quad (2.17)$$

где

$$\overline{W}(x) := x \sup_{t \geq x} Pw(t) =: xW(x). \quad (2.18)$$

Поскольку $\overline{W}(x) \in \mathfrak{M}^\uparrow$, $\overline{W}(x)/x \in \mathfrak{M}^\downarrow$, то [10; лемма 2.8] найдется мера Бореля $d\eta$ такая, что

$$\overline{W}(x) \approx x \int_{[0, \infty)} \frac{d\eta(s)}{x+s}. \quad (2.19)$$

Меняя порядок интегрирования, находим

$$J \approx \sup_{\rho \in \mathfrak{M}^+} \frac{\int_{[0, \infty)} \left(\int_0^\infty \frac{x\rho(x)}{x+s} dx \right) d\eta(s)}{\left(\int_0^\infty \left(\int_0^\infty \frac{x\rho(x)}{x+s} dx \right)^p v(t) dt \right)^{1/p}}.$$

Аналогично рассуждению в первой части, не ограничивая общности, мы можем считать, что

$$\begin{aligned} \left(\int_0^\infty \frac{x\rho(x)}{x+s} dx \right)^p &\approx \int_0^\infty \frac{\nu(z) dz}{(z+s)^p}, \\ J^p &\approx \sup_{\nu \in \mathfrak{M}^+} \frac{\left(\int_{[0, \infty)} \left(\int_0^\infty \frac{\nu(z)}{(z+s)^p} dz \right)^{1/p} d\eta(s) \right)^p}{\int_0^\infty \nu V}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Аналогично характеристизации неравенства (2.4) в случае $1 < p < \infty$ находим

$$J \approx \left(\int_0^\infty \left(\sup_{t \geq x} \frac{1}{t} \int_0^t w \right)^{p'} \frac{(Pv(x))Q_p v(x)}{(PQ_p v(x))^{p'+1}} dx \right)^{1/p'}.$$

При $0 < p < 1$, применяя [27; гл. XI, § 1.5, теорема 4], из (2.20) получаем

$$J \approx \sup_{t \geq 0} \frac{t^{1/p'} Pw(t)}{[PQ_p v(t)]^{1/p}}, \quad 0 < p < 1,$$

и аналогично при $p = 1$

$$J = \sup_{t \geq 0} \frac{Pw(t)}{PQ_1 v(t)}, \quad p = 1.$$

2.3. Случай $p = \infty$. Здесь задача состоит в характеристизации неравенства

$$\int_0^\infty fw \leq C \operatorname{ess\,sup}_{t \geq 0} \left(\frac{1}{t} \int_0^t f \right) v(t) =: \|vPf\|_\infty, \quad f \in \mathfrak{M}^\downarrow, \quad (2.21)$$

при фиксированной функции $w \in \mathfrak{M}^+$. Сначала заметим [11], что при $f \in \mathfrak{M}^\downarrow$

$$\|vPf\|_\infty = \|\mathcal{V}Pf\|_\infty,$$

где

$$\mathcal{V}(t) := t \sup_{s \geq t} \frac{\bar{v}(s)}{s}, \quad \bar{v}(s) := \operatorname{ess\,sup}_{\tau \in [0, s]} v(\tau). \quad (2.22)$$

Аналогично (2.16) и (2.17) получаем, что (2.21) эквивалентно двусторонней оценке функционала

$$\mathcal{J} := \sup_{\rho \in \mathfrak{M}^+} \frac{\int_0^\infty \rho \bar{W}}{\operatorname{ess\,sup}_{t \geq 0} \mathcal{V}(t) \left((1/t) \int_0^t ds \int_s^\infty \rho \right)}.$$

Заметим, что

$$\frac{1}{t} \int_0^t ds \int_s^\infty \rho \approx \int_0^\infty \frac{s\rho(s) ds}{t+s} =: S\rho(t),$$

поэтому с учетом (2.19)

$$\mathcal{J} \approx \sup_{\rho \in \mathfrak{M}^+} \frac{\int_{[0,\infty)} S \rho d\eta}{\|\mathcal{V} S \rho\|_\infty}. \quad (2.23)$$

Очевидно, что

$$\mathcal{J} \ll \int_0^\infty \frac{d\eta}{\mathcal{V}}.$$

Так как

$$\frac{1}{\mathcal{V}} \in \mathfrak{M}^\downarrow, \quad \frac{t}{\mathcal{V}(t)} \in \mathfrak{M}^\uparrow,$$

то существует мера Бореля $d\lambda$, для которой

$$\frac{1}{\mathcal{V}(t)} \approx \int_{[0,\infty)} \frac{s d\lambda(s)}{t+s}, \quad (2.24)$$

и последовательность $\{\lambda_n\} \subset \mathfrak{M}^+$ такая, что

$$\int_0^\infty \frac{s \lambda_n(s) ds}{t+s} \uparrow \int_{[0,\infty)} \frac{s d\lambda(s)}{t+s} \approx \frac{1}{\mathcal{V}(t)}.$$

Если в (2.23) взять $\rho = \lambda_n$, то получим

$$\mathcal{J} \gg \int_{[0,\infty)} \frac{d\eta}{\mathcal{V}},$$

следовательно,

$$\mathcal{J} \approx \int_{[0,\infty)} \frac{d\eta}{\mathcal{V}} \approx \int_{[0,\infty)} \overline{W} d\lambda.$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $0 < p \leq \infty$, $w \in \mathfrak{M}^+$ и $v \in \mathfrak{M}^+$ – весовая функция с условием (2.2). Если

$$J := \sup_{f \in \mathfrak{M}^\downarrow} \frac{\int_0^\infty f w}{(\int_0^\infty [Pf]^{pv})^{1/p}},$$

то

$$J \approx \left(\int_0^\infty \left(\sup_{t \geq x} \frac{1}{t} \int_0^t w \right)^{p'} \frac{(Pv(x)Q_p v(x))}{(PQ_p v(x))^{p'+1}} dx \right)^{1/p'}, \quad 1 < p < \infty, \quad (2.25)$$

$$J \approx \sup_{t \geq 0} \frac{t^{1/p'} Pw(t)}{[PQ_p v(t)]^{1/p}}, \quad 0 < p < 1, \quad (2.26)$$

$$J = \sup_{t \geq 0} \frac{Pw(t)}{PQ_1 v(t)}, \quad p = 1, \quad (2.27)$$

и

$$\sup_{f \in \mathfrak{M}^\downarrow} \frac{\int_0^\infty f w}{\text{ess sup}_{t \geq 0} v(t) P f(t)} \approx \int_{[0,\infty)} \overline{W} d\lambda, \quad (2.28)$$

где мера $d\lambda$ связана с весовой функцией v формулами (2.22) и (2.24), а $\overline{W}$ задается через w в (2.18).

3. Оптимальные пространства Банаха, содержащие конус монотонных функций

Для заданного конуса $K \subset \mathfrak{M}^+$ с положительным однородным функционалом σ ассоциированным пространством Банаха K' называется пространство с нормой

$$\|g\|_{K'} := \sup_{0 \neq h \in K} \frac{\int_0^\infty |g|h}{\sigma(h)}.$$

При достаточно общих предположениях Гольдманом и Забрейко [1; теорема 2.2] доказано, что ассоциированное к K' пространство Банаха X_0 является оптимальным, т.е.

$$\|f\|_{X_0} = \sup_{0 \neq g \in K'} \frac{\int_0^\infty |fg|}{\|g\|_{K'}}.$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть $0 < p \leq \infty$, $v \in \mathfrak{M}^+$ – весовая функция с условием (2.2), конус $K \subset \mathfrak{M}^+$ совпадает с $\mathcal{L}_{p,v}$ или $\mathcal{L}_{\infty,v}$. Для $f \in \mathfrak{M}^+$ обозначим

$$f^\downarrow(t) := \operatorname{ess\,sup}_{s \geq t} |f(s)|.$$

Тогда для норм оптимальных пространств Банаха X_0 для конусов K выполнены следующие соотношения:

$$1) \quad \|f\|_{X_0} \approx \left(\int_0^\infty [Pf^\downarrow]^p \frac{P\psi Q_{p'}\psi}{(PQ_{p'}\psi)^{p+1}} \right)^{1/p}, \quad 1 < p < \infty, \quad (3.1)$$

где ψ задается формулой $\psi := PvQ_p v / (PQ_p v)^{p'+1}$;

$$2) \quad \|f\|_{X_0} = \int_0^\infty f^\downarrow Q_1 v, \quad p = 1; \quad (3.2)$$

$$3) \quad \|f\|_{X_0} \approx \int_0^\infty f^\downarrow(t) Q_p v(t) \left(\int_0^t Q_p v \right)^{1/p-1} dt, \quad 0 < p < 1; \quad (3.3)$$

$$4) \quad \|f\|_{X_0} \approx \sup_{t \geq 0} \frac{f^\downarrow(t)}{\int_{[t,\infty)} d\lambda}, \quad p = \infty, \quad (3.4)$$

где мера $d\lambda$ связана с весовой функцией v формулами (2.22) и (2.24).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $1 < p < \infty$. Тогда по теореме 1 (см. (2.25))

$$\|g\|_{K'} := \sup_{0 \neq h \in \mathcal{L}_{p,v}} \frac{\int_0^\infty |g|h}{\|h\|_{\mathcal{L}_{p,v}}} \approx \left(\int_0^\infty \left(\sup_{t \geq x} \frac{1}{t} \int_0^t |g| \right)^{p'} \frac{(Pv(x))Q_p v(x)}{(PQ_p v(x))^{p'+1}} dx \right)^{1/p'}.$$

Таким образом,

$$\|f\|_{X_0} \approx \sup_{g \in \mathfrak{M}^+} \frac{\int_0^\infty |fg|}{\left(\int_0^\infty \left(\sup_{t \geq x} \frac{1}{t} \int_0^t g \right)^{p'} \left(\frac{(Pv(x))Q_p v(x)}{(PQ_p v(x))^{p'+1}} \right) dx \right)^{1/p'}}.$$

Далее, рассуждая аналогично доказательству теоремы 3.3 из [30], получаем

$$\|f\|_{X_0} \approx \sup_{g \in \mathfrak{M}^+} \frac{\int_0^\infty f^\downarrow g}{(\int_0^\infty (\sup_{t \geq x} Pg(t))^{p'} \psi(x) dx)^{1/p'}} =: \sup_{g \in \mathfrak{M}^+} \frac{\int_0^\infty f^\downarrow g}{(\int_0^\infty [G(t)]^{p'} \psi(x) dx)^{1/p'}} =: F.$$

Применяя (2.25), находим

$$\begin{aligned} F &= \sup_{g \in \mathfrak{M}^+} \frac{\int_{[0, \infty)} Pg(t) t d(-f^\downarrow(t))}{(\int_0^\infty [G(x)]^{p'} \psi(x) dx)^{1/p'}} \geq \sup_{g \in \mathfrak{M}^+} \frac{\int_{[0, \infty)} Pg(t) t d(-f^\downarrow(t))}{(\int_0^\infty [Pg(x)]^{p'} \psi(x) dx)^{1/p'}} \\ &= \sup_{g \in \mathfrak{M}^+} \frac{\int_0^\infty f^\downarrow g}{(\int_0^\infty [Pg(x)]^{p'} \psi(x) dx)^{1/p'}} \approx \left(\int_0^\infty [Pf^\downarrow]^p \frac{P\psi Q_{p'}\psi}{(PQ_{p'}\psi)^{p+1}} \right)^{1/p} =: \mathcal{F} \end{aligned}$$

и оценка снизу в (3.1) доказана.

Далее, заметим, что $G(t) \in \mathfrak{M}^\downarrow$, $tG(t) \in \mathfrak{M}^\uparrow$, поэтому по лемме Синнамона [20; лемма 2.3] существует $\overline{G}(t) \approx G(t)$ и последовательность функций $\{g_n\} \subset \mathfrak{M}^\downarrow$ такая, что

$$Pg_n(t) \uparrow \overline{G}(t).$$

Снова применяя (2.25) и теорему о монотонной сходимости, находим

$$\begin{aligned} \int_{[0, \infty)} Pg(t) t d(-f^\downarrow(t)) &\leq \int_{[0, \infty)} G(t) t d(-f^\downarrow(t)) \approx \int_{[0, \infty)} \overline{G}(t) t d(-f^\downarrow(t)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[0, \infty)} Pg_n(t) t d(-f^\downarrow(t)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty f^\downarrow g_n \ll \mathcal{F} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_0^\infty [Pg_n]^{p'} \psi \right)^{1/p'} \\ &= \mathcal{F} \left(\int_0^\infty [\overline{G}]^{p'} \psi \right)^{1/p'} \approx \mathcal{F} \left(\int_0^\infty [G]^{p'} \psi \right)^{1/p'}, \end{aligned}$$

и оценка сверху в (3.1) установлена.

Далее, пусть $p = 1$, $K = \mathcal{L}_{1,v}$. Применяя (2.27), находим

$$\|g\|_{K'} := \sup_{0 \neq h \in \mathcal{L}_{1,v}} \frac{\int_0^\infty |g|h}{\|h\|_{\mathcal{L}_{1,v}}} = \sup_{t > 0} \frac{P|g|(t)}{PQ_1 v(t)} =: \left\| \frac{P|g|(t)}{PQ_1 v(t)} \right\|_\infty.$$

Таким образом,

$$\|f\|_{X_0} = \sup_{g \in \mathfrak{M}^+} \frac{\int_0^\infty |f|g}{\|(Pg)/(PQ_1 v)\|_\infty} = \sup_{g \in \mathfrak{M}^+} \frac{\int_0^\infty f^\downarrow g}{\|(Pg)/(PQ_1 v)\|_\infty} \geq \int_0^\infty f^\downarrow Q_1 v.$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \int_0^\infty f^\downarrow g &= \int_{[0, \infty)} Pg(t) t d(-f^\downarrow(t)) \\ &\leq \left\| \frac{Pg}{PQ_1 v} \right\|_\infty \int_{[0, \infty)} PQ_1 v(t) t d(-f^\downarrow(t)) = \left\| \frac{Pg}{PQ_1 v} \right\|_\infty \int_0^\infty f^\downarrow Q_1 v, \end{aligned}$$

то

$$\|f\|_{X_0} \leq \int_0^\infty f^\downarrow Q_1 v$$

и (3.2) доказано.

Подобным образом рассматривается случай $0 < p < 1$. По теореме 1 (см. (2.26)) имеем

$$\|g\|_{K'} := \sup_{0 \neq h \in \mathcal{L}_{p,v}} \frac{\int_0^\infty |g|h}{\|h\|_{\mathcal{L}_{p,v}}} \approx \sup_{t>0} \frac{t^{1/p'} P|g|(t)}{[PQ_p v(t)]^{1/p}}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \|f\|_{X_0} &\approx \sup_{g \in \mathfrak{M}^+} \frac{\int_0^\infty |f|g}{\sup_{t>0} (t^{1/p'} P g(t) / [PQ_p v(t)]^{1/p})} \\ &= \sup_{g \in \mathfrak{M}^+} \frac{\int_0^\infty f^\downarrow g}{\sup_{t>0} (t^{1/p'} P g(t) / [PQ_p v(t)]^{1/p})} \\ &= \sup_{g \in \mathfrak{M}^+} \frac{\int_{[0,\infty)} (\int_0^t g) d(-f^\downarrow(t))}{\sup_{t>0} (\int_0^t g / [\int_0^t Q_p v]^{1/p})} = \frac{1}{p} \int_0^\infty f^\downarrow(t) Q_p v(t) \left(\int_0^t Q_p v \right)^{1/p-1} dt \end{aligned}$$

и (3.3) доказано.

В случае $p = \infty$, $K = \mathcal{L}_{\infty,v}$, используя (2.28), находим

$$\begin{aligned} \|g\|_{K'} &:= \sup_{0 \neq h \in \mathcal{L}_{\infty,v}} \frac{\int_0^\infty |g|h}{\|h\|_{\mathcal{L}_{\infty,v}}} \approx \int_{[0,\infty)} G d\lambda, \\ \|f\|_{X_0} &\approx \sup_{g \in \mathfrak{M}^+} \frac{\int_0^\infty |f|g}{\int_{[0,\infty)} G d\lambda} = \sup_{g \in \mathfrak{M}^+} \frac{\int_0^\infty f^\downarrow g}{\int_{[0,\infty)} G d\lambda} = \sup_{g \in \mathfrak{M}^+} \frac{\int_{[0,\infty)} P g(t) t d(-f^\downarrow(t))}{\int_{[0,\infty)} (\sup_{s \geq t} P g(s)) t d\lambda(t)} \\ &= \sup_{g \in \mathfrak{M}^+} \frac{\int_0^\infty f^\downarrow g}{\int_{[0,\infty)} P g(t) t d\lambda(t)} = \sup_{g \in \mathfrak{M}^+} \frac{\int_{[0,\infty)} (\int_0^t g) d(-f^\downarrow(t))}{\int_{[0,\infty)} (\int_0^t g) d\lambda(t)} = \sup_{t \geq 0} \frac{f^\downarrow(t)}{\int_{[t,\infty)} d\lambda}, \end{aligned}$$

и (3.4) доказано.

4. Оптимальные банаховы пространства, содержащие конус квазивогнутых функций

Здесь мы изучаем аналогичную задачу для конуса, порождаемого множеством квазивогнутых функций

$$\Omega_{0,1} := \left\{ f \in \mathfrak{M}^+ : f \in \mathfrak{M}^\uparrow, \frac{f(t)}{t} \in \mathfrak{M}^\downarrow \right\}.$$

Пусть $0 < p \leq \infty$ и $v \in \mathfrak{M}^+$ – заданная весовая функция с условием (2.2). Мы рассматриваем весовой конус квазивогнутых функций $K = \mathcal{L}_{p,v}$, который в зависимости от параметра p имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{p,v} &:= \left\{ f \in \Omega_{0,1} : \|f\|_{\mathcal{L}_{p,v}} := \left(\int_0^\infty [f]^{p,v} \right)^{1/p} < \infty \right\}, \quad 0 < p < \infty, \\ \mathcal{L}_{\infty,v} &:= \left\{ f \in \Omega_{0,1} : \|f\|_{\mathcal{L}_{\infty,v}} := \operatorname{ess\,sup}_{t \geq 0} f(t)v(t) < \infty \right\}, \end{aligned}$$

и находим оптимальное пространство Банаха X_0 , содержащее этот конус.

Сначала нам понадобится аналог теоремы 1. Обозначим

$$\begin{aligned}\tilde{w}(t) &:= \int_t^\infty w, & v_p(t) &:= t^p v(t), \\ \bar{v}_1(s) &:= \operatorname{ess\,sup}_{\tau \in [0, s]} v_1(\tau), & \mathcal{V}_1(t) &:= t \sup_{s \geq t} \frac{\bar{v}_1(s)}{s}.\end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть $0 < p \leq \infty$, $w \in \mathfrak{M}^+$ и $v \in \mathfrak{M}^+$ – весовая функция с условием (2.2). Если

$$J := \sup_{f \in \Omega_{0,1}} \frac{\int_0^\infty f w}{\|f\|_{\mathfrak{L}_{p,v}}},$$

то

$$J \approx \left(\int_0^\infty (P\tilde{w})^{p'} \frac{(Pv_p Q_p v_p)}{(PQ_p v_p)^{p'+1}} \right)^{1/p'}, \quad 1 < p < \infty, \quad (4.1)$$

$$J \approx \sup_{t \geq 0} \frac{t^{1/p'} P\tilde{w}(t)}{[PQ_p v_p(t)]^{1/p}}, \quad 0 < p \leq 1, \quad (4.2)$$

и

$$\sup_{f \in \Omega_{0,1}} \frac{\int_0^\infty f w}{\|f\|_{\mathfrak{L}_{\infty,v}}} \approx \int_0^\infty \frac{sw(s) ds}{\mathcal{V}_1(s)}. \quad (4.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $0 < p < \infty$. Применяя лемму Синнамона (см. [20; лемма 2.3]), нетрудно видеть, что

$$J \approx \sup_{\nu \in \mathfrak{M}^\downarrow} \frac{\int_0^\infty (\int_0^t \nu) w(t) dt}{(\int_0^\infty (P\nu)^p v_p)^{1/p}} = \sup_{\nu \in \mathfrak{M}^\downarrow} \frac{\int_0^\infty \nu \tilde{w}}{(\int_0^\infty (P\nu)^p v_p)^{1/p}}.$$

Поскольку $\tilde{w} \in \mathfrak{M}^\downarrow$, применяя теорему 1, получаем (4.1) и (4.2). Пусть мера $d\lambda_1$ связана с $\mathcal{V}_1$ точно так же, как $d\lambda$ связана с $\mathcal{V}$ в теореме 1. Тогда, применяя (2.28), находим

$$\begin{aligned}\sup_{f \in \Omega_{0,1}} \frac{\int_0^\infty f w}{\|f\|_{\mathfrak{L}_{\infty,v}}} &\approx \sup_{\nu \in \mathfrak{M}^\downarrow} \frac{\int_0^\infty \nu \tilde{w}}{\operatorname{ess\,sup}_{t \geq 0} P\nu(t) v_1(t)} \approx \int_{[0, \infty)} \left(\int_0^t \tilde{w} \right) d\lambda_1(t) \\ &= \int_0^\infty \left(\int_t^\infty w \right) \int_{[t, \infty)} d\lambda \approx \int_0^\infty \frac{sw(s) ds}{\mathcal{V}_1(s)}.\end{aligned}$$

Пусть

$$\Phi_p(t) := \frac{t}{(\int_0^t Q_p v)^{1/p}}, \quad \mathcal{F}_p^{-1}(t) := t \sup_{s \geq t} \frac{1}{s} \sup_{z \in [0, s]} \Phi_p(z).$$

Тогда аналогично (2.24) существует мера Бореля $d\tau$, для которой

$$\mathcal{F}_p(t) \approx \int_{[0, \infty)} \frac{s d\tau(s)}{s + t}. \quad (4.4)$$

ТЕОРЕМА 4. Пусть $0 < p \leq \infty$, $v \in \mathfrak{M}^+$ – весовая функция с условием (2.2), конус $K \subset \mathfrak{M}^+$ совпадает с $\mathfrak{L}_{p,v}$ или $\mathfrak{L}_{\infty,v}$. Для $f \in \mathfrak{M}^+$ обозначим

$$f^\uparrow(t) := \operatorname{ess\,sup}_{s \leq t} |f(s)|.$$

Тогда для норм оптимальных пространств Банаха X_0 для конусов K выполнены соотношения

$$1) \quad \|f\|_{X_0} \approx \left(\int_0^\infty \left(\frac{f^\uparrow(t)}{t} \right)^p \frac{P\psi_p Q_{p'}\psi_p}{(PQ_{p'}\psi_p)^{p+1}} dt \right)^{1/p}, \quad 1 < p < \infty,$$

где ψ_p задается формулой $\psi_p := Pv_p Q_p v_p / (PQ_p v_p)^{p'+1}$;

$$2) \quad \|f\|_{X_0} \approx \int_{[0,\infty)} t \sup_{s \geq t} \frac{f^\uparrow(s)}{s} d\tau(t), \quad 0 < p \leq 1,$$

где мера $d\tau$ задается соотношением (4.4);

$$3) \quad \|f\|_{X_0} \approx \sup_{t \geq 0} \frac{f^\uparrow(t)}{\int_{[t,\infty)} d\lambda}, \quad p = \infty,$$

где мера $d\lambda$ связана с весовой функцией v формулами (2.22) и (2.24).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $1 < p < \infty$. Тогда по теореме 3 (см. (4.1))

$$\|g\|_{K'} := \sup_{0 \neq h \in \mathfrak{L}_{p,v}} \frac{\int_0^\infty |g|h}{\|h\|_{\mathfrak{L}_{p,v}}} \approx \left(\int_0^\infty \left(\frac{1}{t} \int_0^t ds \int_s^\infty |g| \right)^{p'} \psi_p(t) dt \right)^{1/p'}.$$

Таким образом,

$$\|f\|_{X_0} \approx \sup_{g \in \mathfrak{M}^+} \frac{\int_0^\infty |f|g}{\left(\int_0^\infty ((1/t) \int_0^t ds \int_s^\infty g)^{p'} \psi_p(t) dt \right)^{1/p'}}.$$

Применяя [30; следствие 3.4], а затем теорему 1, получаем

$$\begin{aligned} \|f\|_{X_0} &\approx \sup_{g \in \mathfrak{M}^+} \frac{\int_0^\infty f^\uparrow g}{\left(\int_0^\infty ((1/t) \int_0^t ds \int_s^\infty g)^{p'} \psi_p(t) dt \right)^{1/p'}} \\ &= \sup_{g \in \mathfrak{M}^+} \frac{\int_{[0,\infty)} (\int_s^\infty g) df^\uparrow(s)}{\left(\int_0^\infty ((1/t) \int_0^t ds \int_s^\infty g)^{p'} \psi_p(t) dt \right)^{1/p'}} = \sup_{\nu \in \mathfrak{M}^+} \frac{\int_{[0,\infty)} \nu df^\uparrow(s)}{\left(\int_0^\infty (P\nu)^{p'} \psi_p \right)^{1/p'}} \\ &\approx \left(\int_0^\infty \left(\frac{f^\uparrow(t)}{t} \right)^p \frac{P\psi_p Q_{p'}\psi_p}{(PQ_{p'}\psi_p)^{p+1}} dt \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Пусть $0 < p \leq 1$. Тогда по теореме 3 (см. (4.2))

$$\|g\|_{K'} \approx \sup_{t \geq 0} \frac{t^{1/p'} P\widetilde{|g|}(t)}{[PQ_p v_p(t)]^{1/p}} =: \sup_{t \geq 0} \Phi_p(t) P\widetilde{|g|}(t).$$

Следовательно,

$$\|f\|_{X_0} \approx \sup_{g \in \mathfrak{M}^+} \frac{\int_0^\infty |f|g}{\sup_{t \geq 0} \Phi_p(t) P\widetilde{|g|}(t)}.$$

Снова, применяя [30; следствие 3.4], а затем теорему 1 (см. формулу (2.28)), находим

$$\begin{aligned}\|f\|_{X_0} &\approx \sup_{g \in \mathfrak{M}^+} \frac{\int_0^\infty f^\uparrow g}{\sup_{t \geq 0} \Phi_p(t) P\tilde{g}(t)} = \sup_{g \in \mathfrak{M}^+} \frac{\int_{[0,\infty)} \tilde{g} df^\uparrow}{\sup_{t \geq 0} \Phi_p(t) P\tilde{g}(t)} = \sup_{\nu \in \mathfrak{M}^+} \frac{\int_{[0,\infty)} \nu df^\uparrow}{\sup_{t \geq 0} \Phi_p(t) P\nu(t)} \\ &\approx \int_{[0,\infty)} t \sup_{s \geq t} \frac{f^\uparrow(s)}{s} d\tau(t).\end{aligned}$$

При $p = \infty$, применяя (4.3), находим

$$\|g\|_{K'} \approx \int_0^\infty \frac{s|g(s)|(s) ds}{\mathcal{V}_1(s)},$$

поэтому

$$\|f\|_{X_0} \approx \sup_{g \in \mathfrak{M}^+} \frac{\int_0^\infty |f|g}{\int_0^\infty (s|g(s)|/\mathcal{V}_1(s)) ds} = \sup_{t \geq 0} \frac{|f(t)|\mathcal{V}_1(t)}{t}.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] М. Л. Гольдман, П. П. Забрейко, “Оптимальное восстановление банахова функционального пространства по конусу неотрицательных функций”, *Функциональные пространства и смежные вопросы анализа*, Тр. МИАН, **284**, МАИК, М., 2014, 142–156.
- [2] М. Л. Гольдман, Р. Керман, “Об оптимальном вложении пространств Кальдерона и обобщенных пространств Бесова”, *Функциональные пространства, приближения, дифференциальные уравнения*, Тр. МИАН, **243**, Наука, М., 2003, 161–193.
- [3] М. Л. Гольдман, “Об оптимальных вложениях обобщенных потенциалов Бесселя и Рисса”, *Теория функций и дифференциальные уравнения*, Тр. МИАН, **269**, МАИК, М., 2010, 91–111.
- [4] M. L. Goldman, D. D. Haroske, “Estimates for continuity envelopes and approximation numbers of Bessel potentials”, *J. Approx. Theory*, **172** (2013), 58–85.
- [5] D. Haroske, *Envelopes and Sharp Embeddings of Function Spaces*, Chapman Hall/CRC Res. Notes Math., **437**, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2007.
- [6] A. Gogatishvili, B. Opic, J. S. Neves, “Optimality of embeddings of Bessel-potential-type space into Lorentz-Karamata spaces”, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, **134**:6 (2004), 1127–1147.
- [7] A. Gogatishvili, J. S. Neves, B. Opic, “Optimal embeddings and compact embeddings of Bessel-potential-type space”, *Math. Z.*, **262**:3 (2009), 645–682.
- [8] V. D. Stepanov, “Weighted inequalities for a class of Volterra convolution operators”, *J. London Math. Soc. (2)*, **45**:2 (1992), 232–242.
- [9] M. L. Gol’dman, H. P. Heinig, V. D. Stepanov, “On the principle of duality in Lorentz spaces”, *Canad. J. Math.*, **48**:5 (1996), 959–979.
- [10] A. Gogatishvili, L. Pick, “Discretization and antidiscretization of rearrangement-invariant norms”, *Publ. Mat.*, **47**:2 (2003), 311–358.
- [11] A. Gogatishvili, L. Pick, “Embeddings and duality theorems for weak classical Lorentz spaces”, *Canad. Math. Bull.*, **49**:1 (2006), 82–95.
- [12] A. Gogatishvili, R. Kerman, “The rearrangement-invariant space $\Gamma_{p,\phi}$ ”, *Positivity*, **18**:2 (2014), 319–345.
- [13] E. Sawyer, “Boundedness of classical operators on classical Lorentz spaces”, *Studia Math.*, **96**:2 (1990), 145–158.
- [14] V. D. Stepanov, “The weighted Hardy’s inequality for nonincreasing functions”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **338**:1 (1993), 173–186.

- [15] M. Carro, L. Pick, J. Soria, V. D. Stepanov, “On embeddings between classical Lorentz spaces”, *Math. Inequal. Appl.*, **4**:3 (2001), 397–428.
- [16] M. L. Goldman, “On equivalent criteria for the boundedness of Hardy type operators on the cone of decreasing functions”, *Anal. Math.*, **37**:2 (2011), 83–102.
- [17] А. И. Тюленев, “Задача о следах для пространств Соболева с весами типа Макенхупта”, *Матем. заметки*, **94**:5 (2013), 720–732.
- [18] Р. Г. Насибуллин, “Обобщения неравенств типа Харди в форме Ю. А. Дубинского”, *Матем. заметки*, **95**:1 (2014), 109–122.
- [19] О. В. Бесов, “Вложение пространства Соболева и свойства области”, *Матем. заметки*, **96**:3 (2014), 343–349.
- [20] G. Sinnamon, “Embeddings of concave functions and duals of Lorentz spaces”, *Publ. Mat.*, **46**:2 (2002), 489–515.
- [21] L.-E. Persson, O. V. Popova, V. D. Stepanov, “Weighted Hardy-type inequalities on the cone of quasi-concave functions”, *Math. Inequal. Appl.*, **17**:3 (2014), 879–898.
- [22] Д. В. Прохоров, В. Д. Степанов, “Оценки одного класса сублинейных интегральных операторов”, *Докл. РАН*, **456**:6 (2014), 645–649.
- [23] С. В. Асташкин, “Об аппроксимации подпространств симметричных пространств, порожденных независимыми функциями”, *Матем. заметки*, **96**:5 (2014), 643–652.
- [24] В. Д. Степанов, Г. Э. Шамбилова, “О весовой ограниченности одного класса квазилинейных операторов на конусе монотонных функций”, *Докл. РАН*, **458**:3 (2014), 268–271.
- [25] В. Г. Кротов, А. И. Порабкович, “Оценки L^p -осцилляций функций при $p > 0$ ”, *Матем. заметки*, **97**:3 (2015), 407–420.
- [26] L.-E. Persson, G. E. Shambilova, V. D. Stepanov, “Hardy-type inequalities on the weighted cones of quasi-concave functions”, *Banach J. Math. Anal.*, **9**:2 (2015), 21–34.
- [27] Л. В. Канторович, Г. П. Акилов, *Функциональный анализ*, Наука, М., 1984.
- [28] G. Sinnamon, V. D. Stepanov, “The weighted Hardy inequality: new proofs and the case $p = 1$ ”, *J. London Math. Soc.* (2), **54**:1 (1996), 89–101.
- [29] А. Гогатишвили, В. Д. Степанов, “Редукционные теоремы для весовых интегральных неравенств на конусе монотонных функций”, *УМН*, **68**:4 (2013), 3–68.
- [30] G. Sinnamon, “Transferring monotonicity in weighted norm inequalities”, *Collect. Math.*, **54**:2 (2003), 181–216.

В. Д. Степанов

Российский университет дружбы народов;
Математический институт им. В. А. Стеклова
Российской академии наук
E-mail: stepanov@mi.ras.ru

Поступило
16.04.2015