Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. К. Чирик, Конечные факторизуемые группы с разрешимыми $K\mathbb{P}^2$ -субнормальными подгруппами, *Матем. заметки*, 2016, том 99, выпуск 1, 97–101

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10734>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 14:53:11

Конечные факторизуемые группы с разрешимыми $\mathbb{K}\mathbb{P}^2$ -субнормальными подгруппами

И. К. Чирик

Устанавливается разрешимость конечной группы $G = AB$ при условии, что подгруппы A и B разрешимы и $\mathbb{K}\mathbb{P}^2$ -субнормальны в группе G .

Библиография: 7 названий.

DOI: 10.4213/mzm10734

Введение. Монахов [1; теорема 2] без использования классификации конечных простых групп доказал разрешимость конечной группы $G = AB$ при условии, что подгруппы A и B разрешимы и $|G : A| = p$ или p^2 , $|G : B| = q$ или q^2 , где p и q – простые числа. Эта теорема получила развитие в работах Васильева, Васильевой, Тютянова, Княгиной и Монахова [2]–[4].

Пусть $\mathbb{N}$ и $\mathbb{P}$ – множества всех натуральных и простых чисел соответственно. Зафиксируем $t \in \mathbb{N}$ и обозначим

$$\mathbb{P}^t = \{p^k \mid p \in \mathbb{P}, k \leq t, k \in \{0\} \cup \mathbb{N}\}.$$

Подгруппа H конечной группы G называется $\mathbb{K}\mathbb{P}^t$ -субнормальной подгруппой, если $H = G$ или существует цепочка подгрупп

$$H = H_0 \subseteq H_1 \subseteq \dots \subseteq H_n = G \quad (1)$$

такая, что для каждого i подгруппа H_{i-1} нормальна в H_i или $|H_i : H_{i-1}| \in \mathbb{P}^t$. Если $|H_i : H_{i-1}| \in \mathbb{P}^t$ в цепочке (1) для всех i , то подгруппа H называется $\mathbb{P}^t$ -субнормальной в группе G . При $t = 1$ эти определения предложены в [2], [4].

Без использования классификации конечных простых групп доказана следующая теорема, поглощающая [2; теорема 4.2], [3; теорема 1 (1)], [4; теорема 5.2].

ТЕОРЕМА 1. Пусть A и B – разрешимые $\mathbb{K}\mathbb{P}^2$ -субнормальные подгруппы конечной группы G . Если $G = AB$, то G разрешима.

ПРИМЕР. Простая неабелева группа $\text{PSL}_2(7)$ является произведением сверхразрешимой подгруппы индекса 2^3 и разрешимой подгруппы индекса 7. Поэтому условие $\mathbb{K}\mathbb{P}^2$ -субнормальности нельзя заменить $\mathbb{K}\mathbb{P}^3$ -субнормальностью.

1. Необходимые обозначения и вспомогательные леммы. Рассматриваются только конечные группы. В отношении терминологии и обозначений будем придерживаться [5], [6]. Подгруппы Фраттини и Фиттинга обозначаются через $\Phi(G)$ и $F(G)$ соответственно; $O_p(G)$ – наибольшая нормальная p -подгруппа группы G .

Группа, у которой факторы главного ряда имеют порядок p или являются p' -группами, называется p -сверхразрешимой. Если группа p -сверхразрешима для всех p , то она называется *сверхразрешимой*. Группа называется p -замкнутой, если в ней содержится нормальная силовская p -подгруппа. Если в p -замкнутой группе имеется нормальная p' -холлова подгруппа, то группу называют p -разложимой. Пусть G – группа и

$$|G| = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}, \quad p_1 > p_2 > \cdots > p_k, \quad a_i \in \mathbb{N}.$$

Говорят, что группа G обладает силовской башней *сверхразрешимого типа*, если существует цепочка подгрупп

$$1 = G_0 \subseteq G_1 \subseteq G_2 \subseteq \cdots \subseteq G_{k-1} \subseteq G_k = G$$

такая, что подгруппа G_i нормальна в группе G и фактор-группа G_i/G_{i-1} изоморфна силовской p_i -подгруппе из G для всех i . Такие группы называют также *дисперсивными по Оре*.

Следующая лемма ранее [4; 3.1, 5.1] была известна только в случае $t = 1$.

ЛЕММА 1. Пусть A и B – $\text{K}\mathbb{P}^t$ -субнормальные подгруппы группы G и $G = AB$. Если

$$A = A_0 \subseteq A_1 \subseteq \cdots \subseteq A_{n-1} \subseteq A_n = G$$

– $\text{K}\mathbb{P}^t$ -субнормальная цепочка, то $A_k \cap B$ – $\text{K}\mathbb{P}^t$ -субнормальная подгруппа в A_k для каждого k .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку подгруппа B $\text{K}\mathbb{P}^t$ -субнормальна в G , то существует $\text{K}\mathbb{P}^t$ -субнормальная цепочка

$$B = B_0 \subseteq B_1 \subseteq \cdots \subseteq B_{m-1} \subseteq B_m = G.$$

По условию $G = AB$, а по тождеству Дедекинда

$$A_i = A(A_i \cap B), \quad A_i \cap B_j = (A \cap B_j)(A_i \cap B) \quad \text{для всех } i, j.$$

Понятно, что $A \cap B_j \cap A_i \cap B = A \cap B$ для всех i, j . Теперь

$$\begin{aligned} |A_i \cap B_j : A_i \cap B_{j-1}| &= \frac{|A_i \cap B_j|}{|A_i \cap B_{j-1}|} \\ &= \frac{|A \cap B_j| |A_i \cap B|}{|A \cap B_j \cap A_i \cap B|} : \frac{|A \cap B_{j-1}| |A_i \cap B|}{|A \cap B_{j-1} \cap A_i \cap B|} = |A \cap B_j : A \cap B_{j-1}|. \end{aligned}$$

Зафиксируем полученное равенство:

$$|A \cap B_j : A \cap B_{j-1}| = |A_i \cap B_j : A_i \cap B_{j-1}|. \quad (2)$$

По условию $G = AB$, а по тождеству Дедекинда

$$B_j = (A \cap B_j)B, \quad |B_j| = \frac{|A \cap B_j||B|}{|A \cap B|} \quad \text{для всех } j, \\ |B_j : B_{j-1}| = |A \cap B_j : A \cap B_{j-1}|. \quad (3)$$

Из (2) и (3) получаем

$$|A_i \cap B_j : A_i \cap B_{j-1}| = |B_j : B_{j-1}| \quad \text{для всех } i, j. \quad (4)$$

Рассмотрим цепочку подгрупп

$$A_k \cap B = (A_k \cap B_0) \subseteq (A_k \cap B_1) \subseteq \cdots \subseteq (A_k \cap B_m) = A_k. \quad (5)$$

Если B_{j-1} нормальна в B_j , то $A_k \cap B_{j-1} \cap B_j = A_k \cap B_{j-1}$ нормальна в $A_k \cap B_j$. Если B_{j-1} не нормальна в B_j , то $|B_j : B_{j-1}| \in \mathbb{P}^t$, а из (4) при $i = k$ следует, что

$$|A_k \cap B_j : A_k \cap B_{j-1}| \in \mathbb{P}^t,$$

т.е. цепочка (5) является $\mathbb{K}\mathbb{P}^t$ -субнормальной цепочкой для подгруппы $A_k \cap B$ в A_k . Лемма доказана.

ЛЕММА 2. Пусть G – разрешимая группа, H – подгруппа. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- 1) H – $\mathbb{P}^t$ -субнормальная подгруппа в G ;
- 2) H – $\mathbb{K}\mathbb{P}^t$ -субнормальная подгруппа в G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Понятно, что каждая $\mathbb{P}^t$ -субнормальная подгруппа является $\mathbb{K}\mathbb{P}^t$ -субнормальной. Обратно, пусть H – $\mathbb{K}\mathbb{P}^t$ -субнормальная подгруппа в G . Тогда существует цепочка подгрупп (1)

$$H = H_0 \subseteq H_1 \subseteq \cdots \subseteq H_n = G$$

такая, что H_{i-1} нормальна в H_i или $|H_i : H_{i-1}| \in \mathbb{P}^t$ для каждого i . Пусть для некоторого j подгруппа H_j нормальна в H_{j+1} . Так как H_{j+1} разрешима, то композиционные факторы группы H_{j+1}/H_j имеют простые порядки. Поэтому существует цепочка

$$H_j/H_j = H_{j,0}/H_j \subseteq H_{j,1}/H_j \subseteq \cdots \subseteq H_{j,t-1}/H_j \subseteq H_{j,t}/H_j = H_{j+1}/H_j$$

такая, что $|H_{j,i+1}/H_j : H_{j,i}/H_j| \in \mathbb{P}$ для всех i . Ясно, что в цепочке

$$H_j = H_{j,0} \subseteq H_{j,1} \subseteq \cdots \subseteq H_{j,t-1} \subseteq H_{j,t} = H_{j+1} \quad (6)$$

индексы

$$|H_{j,i+1} : H_{j,i}| = |H_{j,i+1}/H_j : H_{j,i}/H_j| \in \mathbb{P} \quad \text{для всех } i.$$

Теперь в цепочке (1) участок $H_j \leq H_{j+1}$ можно заменить цепочкой (6) и подгруппа H_j будет $\mathbb{P}$ -субнормальной в H_{j+1} . Поступая так с каждой парой, в которой одна подгруппа нормальна в следующей, цепочку (1) превратим в $\mathbb{P}^t$ -субнормальную цепочку. Лемма доказана.

ЛЕММА 3 [3; теорема 1 (2)]. Пусть A и B – $\mathbb{P}^2$ -субнормальные подгруппы группы G и $G = AB$. Пусть r – наибольший простой делитель порядка группы G , подгруппы A и B разрешимы и r -замкнуты. Если $r > 3$, то G r -замкнута.

ЛЕММА 4 [3; теорема 1 (3)]. Пусть A и B – $\mathbb{P}^2$ -субнормальные подгруппы группы G и $G = AB$. Если A и B сверхразрешимы и H – $\{2, 3\}'$ -холлова подгруппа группы G , то H обладает силовой башней сверхразрешимого типа и нормальна в G .

ЛЕММА 5 [3; теорема 2]. Пусть A и B – $\mathbb{P}$ -субнормальные разрешимые подгруппы группы G и $G = AB$. Пусть r – наибольший простой делитель порядка группы G . Если подгруппы A и B r -разложимы, то G r -замкнута и r -сверхразрешима.

2. Доказательство теоремы 1. Предположим, что утверждение неверно и пусть G – неразрешимая группа минимального порядка, в которой существуют $\mathbb{K}\mathbb{P}^2$ -субнормальные разрешимые подгруппы A и B такие, что $G = AB$. Ясно, что $A \neq G \neq B$. По определению $\mathbb{K}\mathbb{P}^2$ -субнормальности существуют $\mathbb{K}\mathbb{P}^2$ -субнормальные цепочки

$$\begin{aligned} A &= A_0 \subseteq A_1 \subseteq \dots \subseteq A_{n-1} \subseteq A_n = G, \\ B &= B_0 \subseteq B_1 \subseteq \dots \subseteq B_{m-1} \subseteq B_m = G. \end{aligned}$$

В силу тождества Дедекинда $A_{n-1} = A(A_{n-1} \cap B)$. По лемме 1 подгруппа $A_{n-1} \cap B$ будет $\mathbb{K}\mathbb{P}^2$ -субнормальной в A_{n-1} . Ясно, что A $\mathbb{K}\mathbb{P}^2$ -субнормальна в A_{n-1} и $|A_{n-1}| < |G|$. По индукции A_{n-1} разрешима. Если A_{n-1} нормальна в $A_n = G = A_{n-1}B$, то G разрешима; противоречие. Значит, $|G : A_{n-1}| \in \mathbb{P}^2$. Аналогично, используя индукцию, заключаем, что B_{m-1} разрешима и $|G : B_{m-1}| \in \mathbb{P}^2$. Следовательно, $G = A_{n-1}B_{m-1}$, A_{n-1} и B_{m-1} – разрешимые $\mathbb{P}^2$ -субнормальные подгруппы. Теперь G разрешима по [1; теорема 2]. Теорема 1 доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть r – наибольший простой делитель порядка группы G , A и B – разрешимые r -замкнутые $\mathbb{K}\mathbb{P}^2$ -субнормальные подгруппы группы G . Если $r > 3$ и $G = AB$, то G r -замкнута.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 1 группа G разрешима. По лемме 2 подгруппы A и B $\mathbb{P}^2$ -субнормальны в группе G . Применяя лемму 3, получаем r -замкнутость группы G .

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть A и B – сверхразрешимые $\mathbb{K}\mathbb{P}^2$ -субнормальные подгруппы группы G . Если $G = AB$ и H – $\{2, 3\}'$ -холлова подгруппа группы G , то H обладает силовой башней сверхразрешимого типа и H нормальна в G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 1 группа G разрешима. По лемме 2 подгруппы A и B $\mathbb{P}^2$ -субнормальны в группе G . Применяя лемму 4, получаем, что H нормальна в G и H обладает силовой башней сверхразрешимого типа.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть r – наибольший простой делитель порядка группы G , A и B – разрешимые r -разложимые $\mathbb{K}\mathbb{P}$ -субнормальные подгруппы группы G . Если $G = AB$, то G r -замкнута и r -сверхразрешима.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 1 группа G разрешима. По лемме 2 подгруппы A и B $\mathbb{P}$ -субнормальны в группе G . Применяя лемму 5, получаем, что G r -замкнута и r -сверхразрешима.

СЛЕДСТВИЕ 4 [2; теорема 4.2]. Пусть A и B – разрешимые $\mathbb{P}$ -субнормальные подгруппы группы G . Если $G = AB$, то G разрешима.

СЛЕДСТВИЕ 5 [3; теорема 1 (1)]. Пусть A и B – разрешимые $\mathbb{P}^2$ -субнормальные подгруппы группы G . Если $G = AB$, то G разрешима.

СЛЕДСТВИЕ 6 [4; теорема 5.2]. Пусть A и B – разрешимые $K\mathbb{P}$ -субнормальные подгруппы группы G . Если $G = AB$, то G разрешима.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. С. Монахов, “Факторизуемые группы с разрешимыми факторами нечетных индексов”, *Исследование нормального и подгруппового строения конечных групп*, Наука и техника, Минск, 1984, 105–111.
- [2] А. Ф. Васильев, Т. И. Васильева, В. Н. Тютянов, “О произведениях $\mathbb{P}$ -субнормальных подгрупп в конечных группах”, *Сиб. матем. журн.*, **53**:1 (2012), 59–67.
- [3] В. Н. Княгина, В. С. Монахов, “Конечные факторизуемые группы с разрешимыми $\mathbb{P}^2$ -субнормальными подгруппами”, *Сиб. матем. журн.*, **54**:1 (2013), 77–85.
- [4] А. Ф. Васильев, Т. И. Васильева, В. Н. Тютянов, “О $K\mathbb{P}$ -субнормальных подгруппах конечных групп”, *Матем. заметки*, **95**:4 (2014), 517–528.
- [5] В. С. Монахов, *Введение в теорию конечных групп и их классов*, Вышэйшая школа, Минск, 2006.
- [6] B. Huppert, *Endliche Gruppen. I*, Grundlehren Math. Wiss., **134**, Springer-Verlag, Berlin, 1990.
- [7] V. S. Monakhov, V. N. Kniahina, “Finite group with $\mathbb{P}$ -subnormal subgroups”, *Ric. Mat.*, **62**:2 (2013), 307–322.

И. К. Чирик

Гомельский инженерный институт
 министерства чрезвычайных ситуаций
 Республики Беларусь
 E-mail: chyrykira@mail.ru

Поступило

16.04.2015