Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Коновалов, В. Е. Плиско, О гиперарифметической реализуемости, *Матем. заметки*, 2015, том 98, выпуск 5, 725–746

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10735>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 18:24:00

О гиперарифметической реализуемости

А. Ю. Коновалов, В. Е. Плиско

Вводится понятие гиперарифметической реализуемости для различных расширений языка формальной арифметики. Исследуется вопрос о корректности классической, интуиционистской и базисной логики относительно семантики, основанной на гиперарифметической реализуемости.

Библиография: 8 названий.

DOI: 10.4213/mzm10735

1. Введение. В 1945 г. Клини [1] ввел понятие рекурсивной реализуемости, на котором базируется семантика математических утверждений, принятая в конструктивном подходе к математике. В связи с построением конструктивной математики представляет интерес исследование логических законов, приемлемых с конструктивной точки зрения. В математической логике логические законы выражаются посредством предикатных формул. Имеются различные варианты понятия реализуемости для таких формул (см. [2]).

Семантика предикатных формул, основанная на понятии рекурсивной реализуемости, предполагает, что вместо предикатных переменных подставляются формулы языка формальной арифметики. Однако было доказано [3], что при расширении языка арифметики за счет предиката истинности для него класс реализуемых предикатных формул сужается. Попытки решения проблемы выработки адекватного понятия реализуемости для предикатных формул, независимого от языка, в котором формулируются предикаты, подставляемые вместо предикатных переменных, привели к понятию абсолютно реализуемой предикатной формулы [4].

Оказалось, что множество всех абсолютно реализуемых предикатных формул является Π_1^1 -полным. Π_1^1 -множества соответствуют перечислимым множествам в контексте так называемой гиперарифметической вычислимости. Как отмечается в [5; § 16.5], гиперарифметическая вычислимость может служить фундаментом для естественного расширения конструктивной точки зрения. Поэтому представляет интерес рассмотрение конструктивных семантик, основанных на различных видах обобщенной вычислимости. В настоящей работе рассматривается вариант семантики типа реализуемости, определяемый на основе понятия гиперарифметической функции и названный гиперарифметической реализуемостью.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 14-01-00127).

2. Гиперарифметические множества. Множество $A \subseteq \mathbb{N}^n$ называется *гиперарифметическим*, если оно принадлежит классу $\Delta_1^1 = \Sigma_1^1 \cap \Pi_1^1$ аналитической иерархии (см. [5; § 16.1]). n -местный предикат, определенный на множестве $\mathbb{N}$, будем называть гиперарифметическим, если его область истинности есть гиперарифметическое множество. В силу теоремы Клини [5; § 16.1, теорема IV] существует двухместный Σ_1^1 -предикат (Π_1^1 -предикат) $U(z, x)$, универсальный для класса всех одноместных Σ_1^1 -предикатов (соответственно, Π_1^1 -предикатов) в том смысле, что для каждого такого предиката $P(x)$ существует число z , называемое Σ_1^1 -индексом (Π_1^1 -индексом) предиката $P(x)$, такое, что $\forall x (P(x) \Leftrightarrow U(z, x))$. Более того, Σ_1^1 -индекс Σ_1^1 -предиката можно вычислить, если имеется задание этого предиката в виде Σ_1^1 -формулы языка арифметики второго порядка. То же относится и к Π_1^1 -предикатам.

Пусть фиксирована примитивно-рекурсивная взаимно-однозначная функция τ , кодирующая пары натуральных чисел натуральными числами. Например, можно считать, что $\tau(u, v) = (u^2 + 2uv + v^2 + 3u + v)/2$. Тогда “обратные” одноместные функции π_1 и π_2 , где $\pi_1(x)$ и $\pi_2(x)$ суть первая и вторая компоненты пары с кодом x , т.е. $\tau(\pi_1(x), \pi_2(x)) = x$, также примитивно-рекурсивны. Для любого $n > 0$ с помощью функции τ индуктивно определяется функция τ^n , взаимно-однозначно отображающая $\mathbb{N}^n$ на $\mathbb{N}$:

$$\tau^1(x) = x, \quad \tau^{n+1}(x_1, \dots, x_{n+1}) = \tau(\tau^n((x_1, \dots, x_n), x_{n+1})).$$

Посредством $\pi_1^n, \dots, \pi_n^n$ обозначаются одноместные функции, “обратные” к τ^n (т.е. $\tau^n(\pi_1^n(x), \dots, \pi_n^n(x)) = x$), которые также примитивно-рекурсивны.

Следуя [5; § 16.4], назовем Δ_1^1 -индексом гиперарифметического множества $A \subseteq \mathbb{N}$ число $\tau(u, v)$, где u – некоторый Σ_1^1 -индекс предиката, задающего множество A , а v – некоторый его Π_1^1 -индекс. Δ_1^1 -индексом гиперарифметического множества $A \subseteq \mathbb{N}^n$ будем называть Δ_1^1 -индекс множества $\{x \in \mathbb{N} \mid \langle \pi_1^n(x), \dots, \pi_n^n(x) \rangle \in A\}$.

В [5; § 16.8] описана некоторая иерархия гиперарифметических множеств, естественным образом обобщающая арифметическую иерархию. А именно, каждому натуральному числу x из системы обозначений для конструктивных ординалов O (см. [5; § 11.7]) сопоставляется множество натуральных чисел $H(x)$ по следующему индуктивному правилу: $H(1) = \emptyset$; $H(2^x) = (H(x))'$, если $x \in O$, где $'$ – операция скачка (см. [5; § 13.1]);

$$H(3 \cdot 5^y) = \{\tau(u, v) \mid v <_O 3 \cdot 5^y \text{ \& } u \in H(v)\},$$

если $3 \cdot 5^y \in O$. Таким образом, вдоль каждой ветви системы O получается иерархия множеств, продолжающая арифметическую классификацию. Основные свойства этих иерархий состоят в следующем.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Если $x \in O$, то $H(x) \in \Delta_1^1$. Более того, существует вычислимая функция f такая, что $f(x)$ есть Δ_1^1 -индекс множества $H(x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [5; § 16.8, теорема L].

Напомним, что множество $A \subseteq \mathbb{N}$ 1-сводимо к множеству $B \subseteq \mathbb{N}$ ($A \leq_1 B$), если существует инъективная тотальная вычислимая функция $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ такая, что $\forall x [x \in A \Leftrightarrow f(x) \in B]$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Если B – гиперарифметическое множество, то найдется такое $x \in O$, что $B \leq_1 H(x)$. Более того, существует тотальная вычислимая

функция g такая, что если w есть Δ_1^1 -индекс множества B , то $g(w) \in O$ и $B \leq_1 H(g(w))$, причем алгоритм вычисления функции, сводящей B к $H(g(w))$, строится эффективно по w .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [5; § 16.8, теорема LI, следствие LI].

Язык формальной арифметики LA – это элементарный язык, сигнатура которого содержит константу n для всякого натурального числа n ($n = 0, 1, 2, \dots$), функциональные символы для всех примитивно-рекурсивных функций и предикатный символ равенства $=$. Рассмотрим язык L_H , полученный добавлением к языку LA одноместных предикатных символов H_n ($n \in \mathbb{N}$). Формулы языка L_H определяются индуктивно:

- 1) всякая формула языка LA является формулой языка L_H ;
- 2) каковы бы ни были натуральное число n и терм t , выражение $H_n(t)$ является формулой языка L_H ;
- 3) если Φ и Ψ – формулы, то $\neg\Phi$, $(\Phi \& \Psi)$, $(\Phi \vee \Psi)$ и $(\Phi \rightarrow \Psi)$ суть формулы;
- 4) если Φ – формула, v – переменная, то $\forall v \Phi$ и $\exists v \Phi$ суть формулы.

Стандартную интерпретацию языка LA продолжим на язык L_H , положив, что замкнутая формула вида $H_n(t)$ истинна, если и только если $n \in O$ и $t \in H(n)$, где t – значение терма t . Таким образом, всякая формула языка L_H с параметрами $x_1, \dots, x_n$ определяет некоторый n -местный предикат на $\mathbb{N}$. Будем считать, что замкнутая формула языка L_H определяет множество $\mathbb{N}$, если она истинна, и пустое множество, если ложна.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Всякий гиперарифметический предикат определим в языке L_H . Более того, по Δ_1^1 -индексу предиката $P(x_1, \dots, x_n)$ можно эффективно построить формулу языка L_H , определяющую этот предикат.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $P(x_1, \dots, x_n)$ есть n -местный гиперарифметический предикат, $B \subseteq \mathbb{N}^n$ – его область истинности, w – их Δ_1^1 -индекс. В силу предложения 2 можно эффективно по w найти число m и вычислимую функцию f , 1-сводящую B к $H(m)$. Таким образом, для любых натуральных $x_1, \dots, x_n$ имеет место $\langle x_1, \dots, x_n \rangle \in B \Leftrightarrow f(x_1, \dots, x_n) \in H(m)$. Отсюда следует, что предикат $P(x_1, \dots, x_n)$ определяется формулой $\exists y (\Phi_f(y, x_1, \dots, x_n) \& H_m(y))$ языка L_H , где $\Phi_f(y, x_1, \dots, x_n)$ – формула, выражающая предикат $y = f(x_1, \dots, x_n)$.

Будем считать, что фиксирована геделева нумерация синтаксиса языка L_H . Это означает, что фиксирован алгоритм, который каждому слову в алфавите языка L_H сопоставляет некоторое натуральное число, называемое его *геделевым номером*, причем по каждому натуральному числу n можно алгоритмически проверить, является ли оно геделевым номером какого-либо слова, и найти это слово.

Пусть $A \subseteq \mathbb{N}$. Напомним, что частичная функция $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ называется *A-рекурсивной*, если она вычислима на машине Тьюринга с оракулом A (см. [5; § 9.2]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Всякая формула языка L_H определяет гиперарифметический предикат, причем существует O-рекурсивная функция, которая по геделеву номеру формулы Φ языка L_H выдает Δ_1^1 -индекс множества, определяемого формулой Φ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть дано число, являющееся геделевым номером формулы Φ языка L_H . Заметим, что всякая атомная ее подформула вида $H_n(t)$, где $n \notin O$,

эквивалентна формуле $H_1(t)$ (они обе ложны). Поэтому, обращаясь к оракулу, правильно отвечающему на вопросы о принадлежности конкретных натуральных чисел множеству O , можно преобразовать формулу Φ в формулу Φ' , которая содержит только такие подформулы вида $H_n(t)$, что $n \in O$. В силу предложения 1 для каждой такой подформулы можно эффективно найти ее Σ_1^1 - и Π_1^1 -индексы, после чего нетрудно преобразовать формулу Φ' как в Σ_1^1 -, так и в Π_1^1 -формулу арифметики второго порядка и вычислить ее Δ_1^1 -индекс.

3. Гиперарифметические функции. Частичную функцию $f: \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}$ будем называть гиперарифметической, если ее график является гиперарифметическим множеством. Это понятие гиперарифметической функции отличается от приведенного в [5; § 16.5], где гиперарифметическими названы всюду определенные Π_1^1 -функции. Однако заметим, что график всякой такой функции является гиперарифметическим множеством, так что наше понятие гиперарифметической функции является естественным расширением того же понятия из [5; § 16.5] на частичные функции. Гиперарифметические функции будем называть также Δ_1^1 -функциями.

Через $Fm(y_1, \dots, y_m)$ обозначим множество формул языка L_H , параметры которых содержатся в множестве $\{y_1, \dots, y_m\}$. Очевидно, что множество $Fm(y_1, \dots, y_m)$ перечислимо и даже разрешимо. Пусть g_n – общерекурсивная функция, задающая неповторный пересчет множества всех геделевых номеров формул из множества $Fm(y, x_1, \dots, x_n)$. Формулу с геделевым номером $g_n(e)$ будем обозначать Φ_e^n .

Эту же конструкцию можно применить к множеству всех замкнутых формул языка L_H и получить общерекурсивную функцию g , задающую неповторный пересчет множества всех геделевых номеров замкнутых формул. Посредством Φ_e будем обозначать замкнутую формулу с геделевым номером $g(e)$.

Очевидно, что при любом натуральном $n \geq 1$ и любом e формула

$$\Phi_e^n(x_1, \dots, x_n, y) \& (\forall z < y) \neg \Phi_e^n(x_1, \dots, x_n, z), \quad (3.1)$$

которую будем называть *униформизацией* формулы $\Phi_e^n(x_1, \dots, x_n, y)$ и обозначать $\Psi_e^n(x_1, \dots, x_n, y)$, задает функциональное отношение. Соответствующую функцию обозначим φ_e^n и будем говорить, что она задается формулой $\Phi_e^n(x_1, \dots, x_n, y)$. Таким образом, $\varphi_e^n(x_1, \dots, x_n) = y \iff \Psi_e^n(x_1, \dots, x_n, y)$. Вместо φ_e^1 будем писать φ_e . Запись $!\varphi_e(x)$ будет означать, что значение $\varphi_e(x)$ определено.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. 1) *Каково бы ни было число e , φ_e^n есть n -местная частичная Δ_1^1 -функция.*

2) *Для всякой n -местной частичной Δ_1^1 -функции ψ найдется такое e , что $\forall x_1, \dots, x_n \psi(x_1, \dots, x_n) \simeq \varphi_e^n(x_1, \dots, x_n)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу предложения 4 формула Φ_e^n задает гиперарифметический предикат. Теперь утверждение 1) следует из того очевидного факта, что формула (3.1) также задает гиперарифметический предикат. Докажем утверждение 2). Пусть ψ – некоторая n -местная Δ_1^1 -функция. В силу предложения 3 ее график задается некоторой формулой Ψ языка L_H , причем $\Psi \in Fm(y, x_1, \dots, x_n)$, так что Ψ есть Φ_e^n для некоторого e . Очевидно, что при этом формула (3.1) задает тот же предикат, что и формула Ψ , т.е. ψ есть функция φ_e^n .

Частичная функция f называется *продолжением* частичной функции g , если график функции g является подмножеством графика функции f .

Очевидно, что $(n+1)$ -местная функция U , где $U(e, x_1, \dots, x_n) \simeq \varphi_e^n(x_1, \dots, x_n)$, является универсальной для класса всех n -местных Δ_1^1 -функций. Однако ни она, ни любая другая универсальная функция для этого класса не является гиперарифметической. Более того, имеет место следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. *Никакое продолжение $(n+1)$ -местной функции, универсальной для класса всех n -местных Δ_1^1 -функций, не является Δ_1^1 -функцией.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что существует такая $(n+1)$ -местная Δ_1^1 -функция ϕ , что $\phi(e, x_1, \dots, x_n) = \varphi_e^n(x_1, \dots, x_n)$ для тех натуральных чисел $e, x_1, \dots, x_n$, где значение $\varphi_e^n(x_1, \dots, x_n)$ определено. Согласно предложению 2 найдется такое l , что график функции ϕ 1-сводится к множеству $H(l)$. Отсюда, следует что для любого e график n -местной функции $\phi(e, x_1, \dots, x_n)$ 1-сводится к $H(l)$. Рассмотрим n -местную функцию ψ , где отношение $\psi(x_1, \dots, x_n) = y$ определяется условием

$$((y = 0 \& \tau^n(x_1, \dots, x_n) \notin H(2^l)) \vee (y = 1 \& \tau^n(x_1, \dots, x_n) \in H(2^l))).$$

Очевидно, что ψ – гиперарифметическая функция. Следовательно, ψ есть φ_m^n для некоторого m . Так как ψ тотальна, то $!\varphi_m^n(x_1, \dots, x_n)$ для всех $x_1, \dots, x_n$. Поэтому $\phi(m, x_1, \dots, x_n) = \varphi_m^n(x_1, \dots, x_n)$ для всех $x_1, \dots, x_n$, а тогда график функции φ_m^n 1-сводится к $H(l)$. Иными словами, график функции ψ 1-сводится к $H(l)$. Это означает, что существует такая общерекурсивная инъективная функция f , что $\psi(x_1, \dots, x_n) = y \Leftrightarrow f(x_1, \dots, x_n, y) \in H(l)$, каковы бы ни были $x_1, \dots, x_n, y$. В частности, $\psi(x_1, \dots, x_n) = 1 \Leftrightarrow f(x_1, \dots, x_n, 1) \in H(l)$. Тогда для всякого x имеем

$$x \in H(2^l) \iff \psi(\pi_1^n(x), \dots, \pi_n^n(x)) = 1 \iff f(\pi_1^n(x), \dots, \pi_n^n(x)) \in H(l).$$

Из этого следует, что множество $H(2^l)$ 1-сводится к $H(l)$ посредством функции $g(x) = f(\pi_1^n(x), \dots, \pi_n^n(x))$. Но $H(2^l)$ есть $(H(l))'$, так что $(H(l))' \leq_1 H(l)$, а тогда $(H(l))' \leq_T H(l)$, где $\leq_T$ означает сводимость по Тьюрингу. Тем самым получили противоречие с теоремой I (с) из [5; § 13.1].

Для гиперарифметических функций имеет место следующий аналог так называемой s - m - n -теоремы (см. [5; § 1.8, теорема V]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. *Для любых $m, n \geq 1$ существует такая $(m+n)$ -местная общерекурсивная функция s_n^m , что для всяких натуральных $x, y_1, \dots, y_m, z_1, \dots, z_n$ имеет место*

$$\varphi_x^{m+n}(y_1, \dots, y_m, z_1, \dots, z_n) \simeq \varphi_{s_n^m(x, y_1, \dots, y_m)}^n(z_1, \dots, z_n). \quad (3.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Алгоритм вычисления $s_n^m(k, l_1, \dots, l_m)$ для данных натуральных $k, l_1, \dots, l_m$ состоит в следующем:

- 1) построить формулу Φ с геделевым номером k из класса $Fm(y, x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_{m+n})$;
- 2) подставить в Φ термы $\bar{l}_1, \dots, \bar{l}_m$ вместо переменных $x_1, \dots, x_m$ и переменные $x_1, \dots, x_n$ вместо $x_{m+1}, \dots, x_{m+n}$ соответственно; в результате получится формула Ψ из класса $Fm(y, x_1, \dots, x_n)$;
- 3) найти геделев номер формулы Ψ в нумерации этого класса; это и есть $s_n^m(k, l_1, \dots, l_m)$; очевидно, что при этом выполнено условие (3.2).

4. Гиперарифметическая реализуемость. Пусть $(e)_i$ есть показатель, с которым i -е простое число входит в разложение числа e в произведение степеней простых чисел. Заметим, что при любом i функция $f(x) = (x)_i$ примитивно-рекурсивна, так что в рассматриваемых нами языках есть символ для этой функции.

Индукцией по количеству логических символов в замкнутой формуле A языка L_H определим условие “натуральное число e гиперарифметически реализует A ”, которое обозначим так: $e \text{ hr } A$. Имеем

- 1) $e \text{ hr } A \Leftrightarrow [e = 0 \text{ и } A \text{ истинна}], \text{ если } A - \text{ атомная формула};$
- 2) $e \text{ hr } (A \& B) \Leftrightarrow [(e)_0 \text{ hr } A \text{ и } (e)_1 \text{ hr } B];$
- 3) $e \text{ hr } (A \vee B) \Leftrightarrow [((e)_0 = 0 \text{ и } (e)_1 \text{ hr } A) \text{ или } ((e)_0 = 1 \text{ и } (e)_1 \text{ hr } B)];$
- 4) $e \text{ hr } (A \rightarrow B) \Leftrightarrow [\forall a (a \text{ hr } A \Rightarrow (!\varphi_e(a) \text{ и } \varphi_e(a) \text{ hr } B))];$
- 5) $e \text{ hr } (\neg A) \Leftrightarrow e \text{ hr } (A \rightarrow 0 = 1);$
- 6) $e \text{ hr } \exists x A(x) \Leftrightarrow [(e)_1 \text{ hr } A((e)_0)];$
- 7) $e \text{ hr } \forall x A(x) \Leftrightarrow [\forall a (!\varphi_e(a) \& \varphi_e(a) \text{ hr } A(a))].$

Замкнутую формулу A языка L_H будем называть реализуемой, если существует такое число e , что имеет место $e \text{ hr } A$. Тот факт, что замкнутая формула A языка L_H истинна в стандартной интерпретации этого языка, будем обозначать так: $\models A$. Соответственно, запись $\not\models A$ будет означать, что формула A ложна.

ТЕОРЕМА 1 (Коновалов). Для любой формулы $\Phi(x_1, \dots, x_n)$ языка L_H , не содержащей параметров, отличных от $x_1, \dots, x_n$, найдется n -местная Δ_1^1 -функция ψ_Φ такая, что для любых натуральных чисел $k_1, \dots, k_n$ выполняются следующие условия:

- 1) если $\models \Phi(k_1, \dots, k_n)$, то $!\psi_\Phi(k_1, \dots, k_n)$ и $\psi_\Phi(k_1, \dots, k_n) \text{ hr } \Phi(k_1, \dots, k_n)$;
- 2) если $\not\models \Phi(k_1, \dots, k_n)$, то формула $\Phi(k_1, \dots, k_n)$ не реализуема.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Индукция по построению формулы Φ . Для каждого случая построения формулы Φ искомую функцию ψ_Φ будем задавать при помощи подходящей формулы языка L_H , определяющей график функции ψ_Φ .

1) Если Φ – атомная формула, то ψ_Φ зададим формулой $y = 0$. Так как реализуемость атомных формул совпадает с классической истинностью, для этого случая условия 1) и 2) очевидно выполнены.

2) Пусть Φ имеет вид $A \& B$, причем существуют такие n -местные Δ_1^1 -функции ψ_A и ψ_B , что выполнены условия 1) и 2), когда Φ есть A или B . Функцию ψ_Φ зададим формулой

$$\exists u \exists v (y = 2^u \cdot 3^v \& u = \psi_A(x_1, \dots, x_n) \& v = \psi_B(x_1, \dots, x_n)),$$

так что $\psi_\Phi(x_1, \dots, x_n) \simeq 2^{\psi_A(x_1, \dots, x_n)} \cdot 3^{\psi_B(x_1, \dots, x_n)}$. Если формула $\Phi(k_1, \dots, k_n)$ истинна, то $A(k_1, \dots, k_n)$ и $B(k_1, \dots, k_n)$ истинны. Тогда значения $\psi_A(k_1, \dots, k_n)$ и $\psi_B(k_1, \dots, k_n)$ определены, и

$$\psi_A(k_1, \dots, k_n) \text{ hr } A(k_1, \dots, k_n), \quad \psi_B(k_1, \dots, k_n) \text{ hr } B(k_1, \dots, k_n).$$

Ясно, что $\psi_\Phi(k_1, \dots, k_n)$ определено, и $\psi_\Phi(k_1, \dots, k_n) \text{ hr } \Phi(k_1, \dots, k_n)$, так что условие 1) выполнено. Докажем, что выполнено условие 2). Пусть формула $\Phi(k_1, \dots, k_n)$ ложна. Тогда ложна хотя бы одна из формул $A(k_1, \dots, k_n)$ или $B(k_1, \dots, k_n)$. По индукционному предположению в этом случае хотя бы одна из этих формул не реализуема, а тогда не реализуема и формула $\Phi(k_1, \dots, k_n)$.

3) Пусть Φ имеет вид $A \vee B$. В этом случае функцию ψ_Φ зададим формулой

$$\exists u ((A \& u = \psi_A(x_1, \dots, x_n) \& y = 2^0 \cdot 3^u) \vee (B \& u = \psi_B(x_1, \dots, x_n) \& y = 2^1 \cdot 3^u)).$$

Докажем, что выполнено условие 1). Пусть формула $\Phi(k_1, \dots, k_n)$ истинна. Тогда возможны следующие три случая:

- а) формула $A(k_1, \dots, k_n)$ истинна, а формула $B(k_1, \dots, k_n)$ ложна;
- б) формула $B(k_1, \dots, k_n)$ истинна, а формула $A(k_1, \dots, k_n)$ ложна;
- в) обе формулы $A(k_1, \dots, k_n)$ и $B(k_1, \dots, k_n)$ истинны.

В случае а) значение $\psi_A(k_1, \dots, k_n)$ определено и $\psi_A(k_1, \dots, k_n) \text{ hr } A(k_1, \dots, k_n)$. Очевидно, что тогда $\psi_\Phi(k_1, \dots, k_n) = 2^0 \cdot 3^{\psi_A(k_1, \dots, k_n)}$ и $\psi_\Phi(k_1, \dots, k_n) \text{ hr } \Phi(k_1, \dots, k_n)$, так что условие 1) выполнено.

В случае б) определено $\psi_B(k_1, \dots, k_n)$ и $\psi_B(k_1, \dots, k_n) \text{ hr } B(k_1, \dots, k_n)$. А тогда $\psi_\Phi(k_1, \dots, k_n) = 2^1 \cdot 3^{\psi_B(k_1, \dots, k_n)}$ и $\psi_\Phi(k_1, \dots, k_n) \text{ hr } \Phi(k_1, \dots, k_n)$, так что условие 1) выполнено. В случае в) определены оба значения $\psi_A(k_1, \dots, k_n)$ и $\psi_B(k_1, \dots, k_n)$, и

$$\psi_A(k_1, \dots, k_n) \text{ hr } A(k_1, \dots, k_n), \quad \psi_B(k_1, \dots, k_n) \text{ hr } B(k_1, \dots, k_n),$$

а $\psi_\Phi(k_1, \dots, k_n)$ равно наименьшему из чисел $2^0 \cdot 3^{\psi_A(k_1, \dots, k_n)}$ и $2^1 \cdot 3^{\psi_B(k_1, \dots, k_n)}$. Очевидно, что при этом условие 1) также выполнено. Докажем, что выполнено условие 2). Если формула $\Phi(k_1, \dots, k_n)$ ложна, то ложны обе формулы $A(k_1, \dots, k_n)$ и $B(k_1, \dots, k_n)$. По индукционному предположению в этом случае обе они не реализуемы, а тогда не реализуема и формула $\Phi(k_1, \dots, k_n)$.

4) Пусть Φ имеет вид $A \rightarrow B$. Функция ψ_B задается формулой $\Psi(y, x_1, \dots, x_n)$ из класса $Fm(y, x_1, \dots, x_n)$. Эта формула не содержит параметров, отличных от $y, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}$, так что она принадлежит классу $Fm(y, x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$. Пусть r – ее геделев номер в нумерации этого класса, т.е.

$$\psi_r^{n+1}(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \simeq \psi_B(x_1, \dots, x_n).$$

Функцию ψ_Φ зададим формулой $y = s_1^n(r, x_1, \dots, x_n)$. Таким образом, выполнено $\psi_\Phi(k_1, \dots, k_n) = s_1^n(r, k_1, \dots, k_n)$. Очевидно, что ψ_Φ – тотальная функция. Нетрудно доказать, что для этой функции выполнены условия 1) и 2).

5) Случай, когда Φ имеет вид $\neg A$, сводится к предыдущему, так как Φ можно заменить на $A \rightarrow 0 = 1$.

6) Пусть $\mathbf{x} = x_1, \dots, x_n$, и Φ имеет вид $\exists x A(x, \mathbf{x})$, причем формула $A(x, \mathbf{x})$ не содержит параметров кроме явно указанных. Индукционное предположение состоит в том, что существует $(n+1)$ -местная гиперарифметическая функция ψ_A такая, что для любых натуральных чисел $k, k_1, \dots, k_n$, если $\models A(k, \mathbf{k})$, то значение $\psi_A(k, \mathbf{k})$ определено и реализует формулу $A(k, \mathbf{k})$, где $\mathbf{k} = k_1, \dots, k_n$. Функцию ψ_Φ зададим формулой

$$\exists z \exists u (u = \psi_A(z, \mathbf{x}) \& y = 2^z \cdot 3^u \& A(z, \mathbf{x}) \& \forall z_1 (z_1 < z \rightarrow \neg A(z_1, \mathbf{x}))).$$

Докажем, что выполнено условие 1). Пусть формула $\Phi(\mathbf{k})$ истинна. Тогда существует хотя бы одно такое натуральное число z , что высказывание $A(z, \mathbf{k})$ истинно. Пусть k – наименьшее из таких чисел. По индукционному предположению имеет место $\psi_A(k, \mathbf{k}) \text{ hr } A(k, \mathbf{k})$. А тогда $2^k \cdot 3^{\psi_A(k, \mathbf{k})} \text{ hr } \Phi(\mathbf{k})$. Теперь выполнимость условия 1) вытекает из того очевидного факта, что $\psi_\Phi(\mathbf{k}) = 2^k \cdot 3^{\psi_A(k, \mathbf{k})}$. Докажем,

что выполнено условие 2). Пусть формула $\exists x A(x, \mathbf{k})$ ложна. Тогда для любого k формула $A(k, \mathbf{k})$ ложна и, по индукционному предположению, не реализуема. Следовательно, формула $\Phi(\mathbf{k})$ не может быть реализуемой.

7) Пусть Φ имеет вид $\forall x A(x, \mathbf{x})$, причем для формулы $A(x, \mathbf{x})$ выполнены те же условия, что и в предыдущем пункте. Тогда $(n+1)$ -местная функция ψ , определяемая условным равенством $\psi(\mathbf{x}, x) \simeq \psi_A(x, \mathbf{x})$, также является гиперарифметической. Пусть r – номер функции ψ в нумерации всех $(n+1)$ -местных гиперарифметических функций, т.е. $\varphi_r^{n+1}(\mathbf{x}, x) \simeq \psi_A(x, \mathbf{x})$. Функцию ψ_Φ зададим формулой $y = s_1^n(r, \mathbf{x})$. Очевидно, что функция ψ_Φ всюду определена и, если $\psi_\Phi(\mathbf{k}) = m$, то

$$\varphi_m^1(k) \simeq \psi_A(k, \mathbf{k}). \quad (4.1)$$

Докажем, что выполнено условие 1). Пусть формула $\Phi(\mathbf{k})$ истинна. Тогда для каждого k истинно высказывание $A(k, \mathbf{k})$, и в силу индукционного предположения

$$\psi_A(k, \mathbf{k}) \text{ hr } A(k, \mathbf{k}). \quad (4.2)$$

Положим $\psi_\Phi(\mathbf{k}) = m$ и докажем, что $m \text{ hr } \forall x A(x, k_1, \dots, k_n)$, т.е., для любого натурального k имеет место $\varphi_m^1(k) \text{ hr } A(k, \mathbf{k})$, но это очевидно в силу (4.1) и (4.2). Докажем, что выполнено условие 2). Пусть формула $\forall x A(x, \mathbf{k})$ ложна. Тогда существует такое k , что ложна формула $A(k, \mathbf{k})$. По индукционному предположению формула $A(k, \mathbf{k})$ не реализуема. Тогда не может быть реализуемой и формула Φ .

ТЕОРЕМА 2 (Коновалов). *Замкнутая формула языка L_H реализуема тогда и только тогда, когда она истинна в стандартной интерпретации.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть замкнутая формула Φ языка L_H истинна в стандартной интерпретации. Эту формулу можно рассматривать как формулу $\Phi(x)$ с фиктивным параметром x . В силу теоремы 1 существует такая одноместная гиперарифметическая функция ψ_Φ , что для любого k число $\psi_\Phi(k)$ реализует формулу $\Phi(k)$, т.е. формулу Φ . Следовательно, формула Φ реализуема. Обратно, пусть формула Φ реализуема. Тогда в силу утверждения 2) теоремы 1 она не может быть ложной в стандартной интерпретации, следовательно, Φ истинна.

5. Язык L_W . Теорема 2 означает, что семантика языка L_H , основанная на понятии гиперарифметической реализуемости, не отличается от классической семантики этого языка. Рассмотрим одно естественное расширение языка L_H . Пусть W – некоторое Π_1^1 -полное множество (см. [5; § 16.1]). Например, можно считать, что $W = O$ (см. [5; § 16.3, следствие XX (b)]). Так как все Π_1^1 -полные множества рекурсивно изоморфны друг другу, то все дальнейшие построения и результаты не зависят от выбора множества W . Язык L_W получается добавлением к языку арифметики LA одноместного предикатного символа W . Стандартную классическую семантику языка LA продолжим на язык L_W , положив, что замкнутая формула вида $W(t)$ истинна, если и только если $t \in W$, где t – значение терма t .

Очевидно, что в языке L_W определимы все гиперарифметические предикаты. В то же время предикат $W(x)$ не является гиперарифметическим и, следовательно, не определим в языке L_H . Таким образом, выразительные возможности языка L_W существенно шире, чем возможности языка L_H .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. *В языке L_W выражается предикат $\varphi_x(y) = z$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для фиксированных k, l, m высказывание $\varphi_k(l) = m$ означает истинность формулы $\Psi_k^1(l, m)$ языка L_H . Геделев номер формулы $\Psi_k^1(x_1, y)$ может быть найден эффективно по k , так что для некоторой рекурсивной функции f и любого k формула $\Psi_k^1(x_1, y)$ имеет геделев номер $f(k)$. В силу предложения 4 существует O -рекурсивная функция g , которая по геделеву номеру формулы языка L_H строит некоторый Δ_1^1 -индекс предиката, задаваемого этой формулой. В частности, $g(f(k))$ есть Δ_1^1 -индекс предиката $\varphi_k(x_1) = y$, а тогда $\pi_2(g(f(k)))$ есть его Π_1^1 -индекс. Очевидно, что функция $h(x) \simeq \pi_2(g(f(x)))$ является O -рекурсивной. Π_1^1 -универсальный предикат задается некоторой формулой $U(z, x)$ языка L_W . Предикат $h(x) = y$ также задается некоторой формулой $\Phi_h(x, y)$ того же языка. Итак, высказывание $\varphi_k(l) = m$ эквивалентно истинности формулы

$$\exists u \exists v (\Phi_h(k, u) \& \tau(l, m) = v \& U(u, v)),$$

и предикат $\varphi_x(y) = z$ выражается формулой

$$\exists u \exists v (\Phi_h(x, u) \& \tau(y, z) = v \& U(u, v)).$$

Гиперарифметическая реализуемость для языка L_W , т.е. отношение $e \text{ hr } \Phi$, где e – натуральное число, Φ – высказывание языка L_W , определяется точно так же, как это было сделано в разделе 4 для языка L_H . Из определения реализуемости вытекает следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. *Всякое высказывание языка L_W , не содержащее кванторный символ $\forall$, реализуемо тогда и только тогда, когда оно классически истинно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Индукция по количеству логических символов в высказывании Φ языка L_W . Если Φ – атомное высказывание, то для него реализуемость определяется именно как истинность. Пусть утверждение доказано для всех высказываний, содержащих менее k логических символов. Индукционный шаг, когда высказывание Φ , содержащее k логических символов, имеет вид $A \& B$ или $A \vee B$, где A и B – высказывания, не представляет труда. Рассмотрим случай, когда Φ имеет вид $A \rightarrow B$. Высказывания A и B содержат менее k логических символов, и потому для них реализуемость и истинность совпадают. Пусть высказывание $A \rightarrow B$ истинно. Тогда возможны два (не исключающие друг друга) случая:

- а) высказывание A ложно;
- б) высказывание B истинно.

В случае а) по индукционному предположению высказывание A не реализуемо, а тогда, очевидно, высказывание $A \rightarrow B$ реализуемо любым числом. В случае б) по индукционному предположению существует число b , реализующее B . Тогда число e , являющееся геделевым номером формулы $y = b$ в нумерации класса $Fm(y, x_1)$, реализует высказывание $A \rightarrow B$. Таким образом, в обоих случаях высказывание Φ реализуемо. Пусть теперь высказывание Φ реализуемо. Предположим, что оно ложно. Тогда A истинно, а B ложно. По индукционному предположению в этом случае A реализуемо, а B – нет. Но тогда высказывание $A \rightarrow B$ не может быть реализуемым, что противоречит условию. Случай, когда Φ имеет вид $\neg A$, сводится к предыдущему. Наконец, рассмотрим случай, когда Φ имеет вид $\exists x A(x)$. Тогда для всякого натурального n высказывание $A(n)$ содержит менее k логических символов, и для него реализуемость совпадает с истинностью. Пусть высказывание Φ

истинно. Тогда для некоторого n истинно $A(n)$. По индукционному предположению существует число a , реализующее $A(n)$. Тогда число $2^n \cdot 3^a$ реализует Φ , т.е. высказывание Φ реализуемо. Обратно, если Φ реализуемо, то для некоторого n реализуемо $A(n)$. По индукционному предположению $A(n)$ истинно, а тогда истинно и высказывание Φ .

Следующая теорема показывает, что семантика языка L_W , основанная на гиперарифметической реализуемости, отличается от классической семантики.

ТЕОРЕМА 3 (Коновалов). *Существует классически истинное высказывание языка L_W , которое не является гиперарифметически реализуемым.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу предложения 8 предикат $\varphi_x(y) = z$ выражается в языке L_W . Следовательно, существует формула $\Phi(x)$ этого языка, выражающая с точки зрения классической семантики предикат $\varphi_x(x) = 1$. Можно считать, что формула $\Phi(x)$ не содержит кванторный символ $\forall$, так что в силу предложения 9 для любого n высказывание $\Phi(n)$ реализуемо тогда и только тогда, когда $\varphi_n(n) = 1$. Пусть Ψ есть классически истинное высказывание

$$\forall x (\Phi(x) \vee \neg\Phi(x)). \quad (5.1)$$

Докажем, что формула Ψ не реализуема. Допустим, что существует число e , которое реализует высказывание (5.1). Очевидно, что функция $f(x) = (\varphi_e(x))_0$ является гиперарифметической и всюду определена, причем принимает только значения 0 и 1. Пусть m – номер функции f , т.е. $f = \varphi_m$. Рассмотрим значение $f(m)$. Если $f(m) = 0$, т.е. $\varphi_m(m) = 0$, то высказывание $\neg\Phi(m)$ истинно и реализуемо. Но в таком случае должно быть $(\varphi_e(m))_0 = 1$, т.е. $f(m) = 1$. Получили противоречие. С другой стороны, если $f(m) = 1$, т.е. $\varphi_m(m) = 1$, то истинно и реализуемо высказывание $\Phi(m)$, и в этом случае должно быть $(\varphi_e(m))_0 = 0$, т.е. $f(m) = 0$, так что снова получается противоречие.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Существует высказывание языка L_W , которое гиперарифметически реализуемо, но не является классически истинным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В качестве такого высказывания можно взять $\neg\Psi$, где Ψ – высказывание, построенное при доказательстве теоремы 3.

6. Гиперарифметическая реализуемость и интуиционистская логика. Язык логики предикатов описан, например, в [6; §31]. Он содержит счетное число предикатных переменных и счетное число предметных переменных. Предикатные формулы строятся обычным образом из атомных формул вида $P(x_1, \dots, x_n)$, где P – произвольная n -местная предикатная переменная ($n = 0, 1, 2, \dots$), а $x_1, \dots, x_n$ – предметные переменные. Через $A(P_1, \dots, P_n)$ будем обозначать предикатную формулу, не содержащую предикатных переменных, отличных от $P_1, \dots, P_n$. Пусть $\Phi_1, \dots, \Phi_n$ – некоторый список формул языка L_W , причем каждая из формул Φ_i ($i = 1, \dots, n$) не содержит параметров, отличных от $x_1, \dots, x_m$, если P_i есть m -местная предикатная переменная. В этом случае через $A(\Phi_1, \dots, \Phi_n)$ обозначим формулу языка L_W , полученную заменой в $A(P_1, \dots, P_n)$ каждой атомной подформулы вида $P_i(v_1, \dots, v_m)$ на результат подстановки в Φ_i переменных $v_1, \dots, v_m$ вместо свободных вхождений переменных $x_1, \dots, x_m$ соответственно. При этом будем считать,

что предварительно происходит переименование связанных переменных в формуле Φ_i так, чтобы подстановка $v_1, \dots, v_m$ вместо $x_1, \dots, x_m$ стала свободной в смысле [6; § 34]. Формулы вида $A(\Phi_1, \dots, \Phi_n)$ будем называть L_W -примерами предикатной формулы $A(P_1, \dots, P_n)$. Очевидно, что если формула $A(P_1, \dots, P_n)$ замкнута, то всякий ее L_W -пример является высказыванием.

Замкнутую предикатную формулу будем называть гиперарифметически реализуемой, если реализуем всякий ее L_W -пример. Из доказательства теоремы 3 видно, что существует предикатная формула, выводимая в классическом исчислении предикатов, которая не является гиперарифметически реализуемой. Так же обстоит дело и с интуиционистским исчислением предикатов.

ТЕОРЕМА 4 (Коновалов). *Существует предикатная формула, выводимая в интуиционистском исчислении предикатов, которая не является гиперарифметически реализуемой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $A(P)$ – это формула $\forall x \forall y P(x, y) \rightarrow \forall y \forall x P(x, y)$, а Φ – это формула $\exists z \neg \neg \Psi(x, y, z)$, где $\Psi(x, y, z)$ – формула языка L_W , выражающая предикат $! \varphi_x(y) \rightarrow \varphi_x(y) = z$ и при этом не содержащая кванторный символ $\forall$. Докажем, что L_W -пример $A(\Phi)$ формулы $A(P)$ не реализуем.

Формула $A(\Phi)$ имеет вид $\forall x \forall y \exists z \neg \neg \Psi(x, y, z) \rightarrow \forall y \forall x \exists z \neg \neg \Psi(x, y, z)$. Докажем, что посылка этой формулы реализуема, а заключение – нет.

Докажем реализуемость посылки. Пусть ψ – одноместная вычислимая функция, которая по геделеву номеру n формулы $\Phi_n^1(x_1, y)$ в нумерации класса формул $Fm(y, x_1)$ языка L_H строит геделев номер формулы

$$\exists u (\Phi_n^1(x_1, u) \& y = 2^u \cdot 3^0) \vee (\neg \exists u \Phi_n^1(x_1, u) \& y = 2^0 \cdot 3^0). \quad (6.1)$$

Функция ψ является гиперарифметической, так что $\psi = \varphi_e$ для некоторого e . Докажем, что e реализует посылку $\forall x \forall y \exists z \neg \neg \Psi(x, y, z)$, т.е. для любого n имеет место $\varphi_e(n) \text{ hr } \forall y \exists z \neg \neg \Psi(n, y, z)$. Последнее означает, что для любого m

$$\phi(m) \text{ hr } \exists z \neg \neg \Psi(n, m, z), \quad (6.2)$$

где $\phi = \varphi_{\varphi_e(n)}$. Заметим, что функция ϕ задается формулой (6.1). Рассмотрим случай, когда значение $\varphi_n(m)$ определено и равно некоторому числу k . Тогда, как видно из (6.1), $\phi(m) = 2^k \cdot 3^0$, и для доказательства (6.2) достаточно показать, что

$$0 \text{ hr } \neg \neg \Psi(n, m, k). \quad (6.3)$$

Но это действительно так, ибо в данном случае формула $\Psi(n, m, k)$ выражает истинное высказывание $! \varphi_n(m) \rightarrow \varphi_n(m) = k$ и поэтому, в силу предложения 9, реализуема, а тогда формула $\neg \neg \Psi(n, m, k)$ реализуема любым числом, в частности, имеет место (6.3). Если же значение $\varphi_n(m)$ не определено, то $\phi(m) = 2^0 \cdot 3^0$, а для доказательства (6.2) достаточно показать, что $0 \text{ hr } \neg \neg \Psi(n, m, 0)$. Но в этом случае формула $\Psi(n, m, 0)$ выражает истинное высказывание $! \varphi_n(m) \rightarrow \varphi_n(m) = 0$, и доказательство завершается теми же рассуждениями, что и в предыдущем случае.

Докажем, что заключение $\forall y \forall x \exists z \neg \neg \Psi(x, y, z)$ формулы $A(\Phi)$ не реализуемо. Для этого достаточно доказать нереализуемость формулы $\forall x \exists z \neg \neg \Psi(x, 0, z)$. Допустим, что эта формула реализуема, т.е. существует такая одноместная гиперарифметическая функция ψ_1 , что для любого n число $\psi_1(n)$ реализует формулу $\exists z \neg \neg \Psi(n,$

$0, z)$. Тогда число $\pi_2(\psi_1(n))$ реализует формулу $\neg\neg\Psi(n, 0, k)$, где $k = \pi_1(\psi_1(n))$. Следовательно, высказывание $\Psi(n, 0, k)$ реализуемо, а потому и истинно, т.е., если значение $\varphi_n(0)$ определено, то $\psi_2(n) = \varphi_n(0)$, где $\psi_2(x) = \pi_1(\psi_1(x))$. Очевидно, что функция ψ_2 является гиперарифметической. Очевидно также, что существует такая двухместная вычислимая функция ϕ , что для любых m и n формула $\Phi_{\phi(m,n)}^1(y, x_1)$ есть $\Phi_n^1(y, x_1 + m)$. Таким образом, $\varphi_{\phi(m,n)}(x) \simeq \varphi_n(x + m)$. Положим $\psi_3(x, y) = \psi_2(\phi(x, y))$. Очевидно, что ψ_3 – гиперарифметическая функция. Пусть определено значение $\varphi_n(m)$. Тогда определено и значение $\varphi_{\phi(m,n)}(0)$. Следовательно, $\psi_3(m, n) = \psi_2(\phi(m, n)) = \varphi_{\phi(m,n)}(0) = \varphi_n(m)$. Таким образом, ψ_3 является продолжением функции, универсальной для класса всех одноместных гиперарифметических функций, что противоречит предположению 6. Полученное противоречие доказывает нереализуемость заключения формулы $A(\Phi)$.

7. Базисная логика. Базисная логика высказываний *BPC* введена А. Виссером [7]. Это подсистема интуиционистского исчисления высказываний, в которой ослаблено правило вывода *modus ponens*. В. Руйтенбург [8] на основе *BPC* построил базисную логику предикатов *BQC*.

Базисная логика предикатов строится в языке логики предикатов с равенством. Атомные формулы: $\top$, $\perp$, $t_1 = t_2$, $P^n(t_1, \dots, t_n)$, где P^n есть n -местная предикатная переменная, а $t_1, \dots, t_n$ суть предметные переменные.

Индуктивное определение формулы:

- 1) атомная формула есть формула;
- 2) если A и B – формулы, то $(A \& B)$, $(A \vee B)$ – формулы;
- 3) если A и B – формулы, $\mathbf{z}$ – список переменных (возможно, пустой), то $\forall \mathbf{z} (A \rightarrow B)$ – формула;
- 4) если A – формула, x – переменная, то $\exists x A$ – формула.

Секвенцией называется выражение вида $A \Rightarrow B$, где A и B – формулы. Базисное исчисление предикатов *BQC* – это секвенциальное исчисление, имеющее аксиомы

- 1) $A \Rightarrow A$;
- 2) $A \Rightarrow \top$;
- 3) $\perp \Rightarrow A$;
- 4) $A \& \exists x B \Rightarrow \exists x (A \& B)$, где переменная x не свободна в A ;
- 5) $A \& (B \vee C) \Rightarrow (A \& B) \vee (A \& C)$;
- 6) $\forall \mathbf{z} (A \rightarrow B) \& \forall \mathbf{z} (B \rightarrow C) \Rightarrow \forall \mathbf{z} (A \rightarrow C)$;
- 7) $\forall \mathbf{z} (A \rightarrow B) \& \forall \mathbf{z} (A \rightarrow C) \Rightarrow \forall \mathbf{z} (A \rightarrow B \& C)$;
- 8) $\forall \mathbf{z} (A \rightarrow C) \& \forall \mathbf{z} (B \rightarrow C) \Rightarrow \forall \mathbf{z} (A \vee B \rightarrow C)$;
- 9) $\forall \mathbf{z} (A(\mathbf{z}) \rightarrow B(\mathbf{z})) \Rightarrow \forall \mathbf{x} (A(\mathbf{t}) \rightarrow B(\mathbf{t}))$, где $\mathbf{t}$ – список переменных, каждая из которых свободна для соответствующей переменной в формулах $A(\mathbf{z})$ и $B(\mathbf{z})$;
- 10) $\forall \mathbf{z} (A \rightarrow B) \Rightarrow \forall \mathbf{y} (A \rightarrow B)$, где переменные из списка $\mathbf{y}$ не входят свободно в левую часть секвенции;
- 11) $\forall \mathbf{zx} (B \rightarrow A) \Rightarrow \forall \mathbf{z} (\exists x B \rightarrow A)$, где переменная x не свободна в A ;
- 12) $\top \Rightarrow x = x$;
- 13) $(x = y) \& A(x) \Rightarrow A(y)$, где переменная y свободна для x в формуле $A(x)$,

и следующие правила вывода:

$$\text{I. } \frac{A \Rightarrow B; B \Rightarrow C}{A \Rightarrow C};$$

- II. $\frac{A \Rightarrow B; A \Rightarrow C}{A \Rightarrow B \& C}$;
- III. а) $\frac{A \Rightarrow B \& C}{A \Rightarrow B}$; б) $\frac{A \Rightarrow B \& C}{A \Rightarrow C}$;
- IV. $\frac{B \Rightarrow A; C \Rightarrow A}{B \vee C \Rightarrow A}$;
- V. а) $\frac{B \vee C \Rightarrow A}{B \Rightarrow A}$; б) $\frac{B \vee C \Rightarrow A}{C \Rightarrow A}$;
- VI. $\frac{A(\mathbf{x}) \Rightarrow B(\mathbf{x})}{A(\mathbf{t}) \Rightarrow B(\mathbf{t})}$, где каждая переменная из списка $\mathbf{t}$ свободна для соответствующей переменной из списка $\mathbf{x}$ в формулах $A(\mathbf{x})$ и $B(\mathbf{x})$;
- VII. $\frac{B \Rightarrow A}{\exists x B \Rightarrow A}$, где переменная x не свободна в A ;
- VIII. $\frac{\exists x B \Rightarrow A}{B \Rightarrow A}$, где переменная x не свободна в A ;
- IX. $\frac{A \& B \Rightarrow C}{A \Rightarrow \forall \mathbf{z}(B \rightarrow C)}$, где каждая переменная из списка $\mathbf{z}$ не свободна в A .

8. Абсолютная гиперарифметическая реализуемость. Если мы хотим исследовать предикатную логику гиперарифметической реализуемости в общем виде, то следует рассматривать предикаты, формулируемые в произвольном языке, для которого определена гиперарифметическая реализуемость. Чтобы избежать зависимости от выбора конкретного языка, применим подход, который использовался в аналогичной ситуации при исследовании предикатной логики рекурсивной реализуемости. А именно, следуя [4], n -местным обобщенным предикатом на множестве $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ назовем всякую тотальную функцию типа $\mathbb{N}^n \rightarrow 2^{\mathbb{N}}$.

Технически удобно наряду с языком BQC рассматривать его расширение BQC^N константами для всех натуральных чисел. *Оценкой* формулы или секвенции языка BQC^N будем называть отображение, которое каждой (n -местной) предикатной переменной, входящей в эту формулу или секвенцию, ставит в соответствие некоторый (n -местный) обобщенный предикат. *Оцененной формулой* языка BQC^N будем называть пару $\langle A, f \rangle$, где A – формула языка BQC^N , а f – некоторая ее оценка. Аналогично, *оцененная секвенция* – это пара $\langle A \Rightarrow B, f \rangle$, где $A \Rightarrow B$ – секвенция языка BQC^N , а f – ее оценка.

Для натурального числа e , замкнутой формулы A языка BQC^N и ее оценки f определим отношение “ e реализует $\langle A, f \rangle$ ”, обозначаемое $e \text{ hr } \langle A, f \rangle$ (или кратко $e \text{ hr } A$, т.е. “ e реализует A ”, поскольку оценка f остается фиксированной) индукцией по количеству логических символов в A :

- 1) никакое число не реализует формулу $\perp$;
- 2) $e \text{ hr } \top \Leftrightarrow e = 0$;
- 3) $e \text{ hr } \langle P(a_1, \dots, a_n), f \rangle \Leftrightarrow e \in f(P)(a_1, \dots, a_n)$;
- 4) $e \text{ hr } a = b \Leftrightarrow e = 0$ и числа a и b равны;
- 5) $e \text{ hr } (A \& B) \Leftrightarrow (e)_0 \text{ hr } A$ и $(e)_1 \text{ hr } B$;
- 6) $e \text{ hr } (A \vee B) \Leftrightarrow$ либо $(e)_0 = 0$ и $(e)_1 \text{ hr } A$, либо $(e)_0 = 1$ и $(e)_1 \text{ hr } B$;

- 7) пусть $\mathbf{x}$ – список переменных (возможно, пустой) длины n , тогда $e \text{ hr } \forall \mathbf{x} (A \rightarrow B) \Rightarrow \forall \mathbf{k}, a [a \text{ hr } A(\mathbf{k}) \Rightarrow \varphi_e^{n+1}(\mathbf{k}, a) \text{ hr } B(\mathbf{k})]$, где $\mathbf{k} = k_1, \dots, k_n$;
 8) $e \text{ hr } \exists x A \Rightarrow (e)_1 \text{ hr } A((e)_0)$.

Пусть Φ – оцененная секвенция $A \Rightarrow B$ языка BQC , $\mathbf{z}$ – список различных переменных, содержащий все параметры Φ (такие списки переменных будем называть допустимыми для Φ). Тогда $e \text{ hr}_{\mathbf{z}} \Phi \Rightarrow \forall \mathbf{k}, a (a \text{ hr } [\mathbf{k}/\mathbf{z}] A \Rightarrow \varphi_e^{n+1}(\mathbf{k}, a) \text{ hr } [\mathbf{k}/\mathbf{z}] B)$.

Секвенцию Φ будем называть *реализуемой относительно допустимого для нее списка переменных $\mathbf{z}$* и писать $\text{hr}_{\mathbf{z}} \Phi$, если найдется такое натуральное число e , что $e \text{ hr}_{\mathbf{z}} \Phi$. Нетрудно показать, что если секвенция реализуема относительно некоторого допустимого списка, то она реализуема относительно любого допустимого списка.

ТЕОРЕМА 5 (Коновалов). *Если секвенция Φ выводима в исчислении BQC , то найдется такое число d , что для любой оценки предикатных переменных выполнено $d \text{ hr}_{\mathbf{z}} \Phi$ для некоторого допустимого списка переменных $\mathbf{z}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала докажем, что утверждение теоремы выполнено для всякой аксиомы Φ исчисления BQC . Будем считать, что все свободные переменные в рассматриваемых секвенциях входят в список $\mathbf{x} = x_1, \dots, x_n$, т.е. этот список допустим для всех рассматриваемых секвенций.

1) Пусть Φ есть аксиома $A \Rightarrow A$. Очевидно, что в качестве числа d можно взять геделев номер формулы $y = x_{n+1}$.

2) Пусть Φ есть аксиома $A \Rightarrow \top$. Очевидно, что в качестве числа d можно взять геделев номер формулы $y = 0$.

3) Пусть Φ есть аксиома $\perp \Rightarrow A$. Очевидно, что в качестве числа d можно взять геделев номер формулы $y = 0$.

4) Пусть Φ есть аксиома $A \& \exists x B \Rightarrow \exists x (A \& B)$, где переменная x не свободна в A . В качестве d можно взять геделев номер формулы $y = 2^{((x_{n+1})_1)_0} \cdot 3^{2^{(x_{n+1})_0} \cdot 3^{((x_{n+1})_1)_1}}$.

5) Пусть Φ есть аксиома $A \& (B \vee C) \Rightarrow (A \& B) \vee (A \& C)$. В качестве d можно взять геделев номер формулы $y = 2^{((x_{n+1})_1)_0} \cdot 3^{2^{(x_{n+1})_0} \cdot 3^{((x_{n+1})_1)_1}}$.

6) Пусть Φ есть аксиома

$$\forall \mathbf{z} (A \rightarrow B) \& \forall \mathbf{z} (B \rightarrow C) \Rightarrow \forall \mathbf{z} (A \rightarrow C),$$

где $\mathbf{z}$ есть список переменных $z_1, \dots, z_m$. Секвенцию Φ можно записать в виде

$$\forall \mathbf{z} (A(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \rightarrow B(\mathbf{x}, \mathbf{z})) \& \forall \mathbf{z} (B(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \rightarrow C(\mathbf{x}, \mathbf{z})) \Rightarrow \forall \mathbf{z} (A(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \rightarrow C(\mathbf{x}, \mathbf{z})).$$

Пусть ϕ – двухместная вычислимая функция, которая по геделеву номеру a формулы $\Phi_a(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, y)$ и номеру b формулы $\Phi_b(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, y)$ выдает номер $\phi(a, b)$ формулы $\exists v (\Psi_a(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, v) \& \Psi_b(x_1, \dots, x_m, v, y))$. Очевидно, что для любых натуральных чисел $l_1, \dots, l_m, l$ имеет место условное равенство

$$\varphi_{\phi(a,b)}^{m+1}(l_1, \dots, l_m, l) \simeq \varphi_b^{m+1}(l_1, \dots, l_m, \varphi_a^{m+1}(l_1, \dots, l_m, l)). \quad (8.1)$$

В качестве d возьмем номер формулы из $Fm(y, x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$, выражающей отношение $y = \phi((x_{n+1})_0, (x_{n+1})_1)$. Действительно, если даны числа $k_1, \dots, k_n, k$, причем $k \text{ hr } (\forall \mathbf{z} (A(\mathbf{k}, \mathbf{z}) \rightarrow B(\mathbf{k}, \mathbf{z})) \& \forall \mathbf{z} (B(\mathbf{k}, \mathbf{z}) \rightarrow C(\mathbf{k}, \mathbf{z})))$, где $\mathbf{k} = k_1, \dots, k_n$, то

$$(k)_0 \text{ hr } \forall \mathbf{z} (A(\mathbf{k}, \mathbf{z}) \rightarrow B(\mathbf{k}, \mathbf{z})), \quad (8.2)$$

$$(k)_1 \text{ hr } \forall \mathbf{z} (B(\mathbf{k}, \mathbf{z}) \rightarrow C(\mathbf{k}, \mathbf{z})). \quad (8.3)$$

Докажем, что $\varphi_d^{n+1}(\mathbf{k}, k) \text{ hr } \forall \mathbf{z} (A(\mathbf{k}, \mathbf{z}) \rightarrow C(\mathbf{k}, \mathbf{z}))$. Так как $\varphi_d^{n+1}(\mathbf{k}, k) = \phi((k)_0, (k)_1)$, то требуется доказать, что, каковы бы ни были числа $l_1, \dots, l_m, l$, если $l \text{ hr } A(\mathbf{k}, \mathbf{l})$, где $\mathbf{l} = l_1, \dots, l_m$, то $\varphi_{\phi((k)_0, (k)_1)}^{m+1}(\mathbf{l}, l)$ определено, и при этом $\varphi_{\phi((k)_0, (k)_1)}^{m+1}(\mathbf{l}, l) \text{ hr } C(\mathbf{k}, \mathbf{l})$. Итак, пусть $l \text{ hr } A(\mathbf{k}, \mathbf{l})$. Тогда в силу (8.2) значение $\varphi_{(k)_0}^{m+1}(\mathbf{l}, l)$ определено, и при этом $\varphi_{(k)_0}^{m+1}(\mathbf{l}, l) \text{ hr } B(\mathbf{k}, \mathbf{l})$. Отсюда и из (8.3) следует, что значение $\varphi_{(k)_1}^{m+1}(\mathbf{l}, \varphi_{(k)_0}^{m+1}(\mathbf{l}, l))$ определено, и при этом $\varphi_{(k)_1}^{m+1}(\mathbf{l}, \varphi_{(k)_0}^{m+1}(\mathbf{l}, l)) \text{ hr } C(\mathbf{k}, \mathbf{l})$. Но в силу (8.1) это как раз и означает, что значение $\varphi_{\phi((k)_0, (k)_1)}^{m+1}(\mathbf{l}, l)$ определено, и при этом $\varphi_{\phi((k)_0, (k)_1)}^{m+1}(\mathbf{l}, l) \text{ hr } C(\mathbf{k}, \mathbf{l})$.

7) Пусть Φ есть аксиома

$$\forall \mathbf{z} (A \rightarrow B) \& \forall \mathbf{z} (A \rightarrow C) \Rightarrow \forall \mathbf{z} (A \rightarrow B \& C),$$

т.е.

$$\forall \mathbf{z} (A(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \rightarrow B(\mathbf{x}, \mathbf{z})) \& \forall \mathbf{z} (A(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \rightarrow C(\mathbf{x}, \mathbf{z})) \Rightarrow \forall \mathbf{z} (A(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \rightarrow B(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \& C(\mathbf{x}, \mathbf{z})).$$

Пусть вычислимая функция ϕ по геделеву номеру a формулы $\Phi_a(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, y)$ и геделеву номеру b формулы $\Phi_b(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, y)$ выдает геделев номер $\phi(a, b)$ формулы $\exists u \exists v (\Phi_a(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, u) \& \Phi_b(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, v) \& y = 2^u \cdot 3^v)$. Очевидно, что для любых натуральных чисел $l_1, \dots, l_m, l$

$$\varphi_{\phi(a,b)}^{m+1}(\mathbf{l}, l) \simeq 2^{\varphi_a^{m+1}(\mathbf{l}, l)} \cdot 3^{\varphi_b^{m+1}(\mathbf{l}, l)}, \quad (8.4)$$

где $\mathbf{l} = l_1, \dots, l_m$. В качестве d возьмем номер формулы из $Fm(y, x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$, выражающей отношение $y = \phi((x_{n+1})_0, (x_{n+1})_1)$. Действительно, если даны числа $k_1, \dots, k_n, k$, причем

$$k \text{ hr } (\forall \mathbf{z} (A(\mathbf{k}, \mathbf{z}) \rightarrow B(\mathbf{k}, \mathbf{z})) \& \forall \mathbf{z} (A(\mathbf{k}, \mathbf{z}) \rightarrow C(\mathbf{k}, \mathbf{z}))),$$

где $\mathbf{k} = k_1, \dots, k_n$, то

$$(k)_0 \text{ hr } \forall \mathbf{z} (A(\mathbf{k}, \mathbf{z}) \rightarrow B(\mathbf{k}, \mathbf{z})), \quad (8.5)$$

$$(k)_1 \text{ hr } \forall \mathbf{z} (A(\mathbf{k}, \mathbf{z}) \rightarrow C(\mathbf{k}, \mathbf{z})). \quad (8.6)$$

Докажем, что

$$\varphi_d^{n+1}(\mathbf{k}, k) \text{ hr } \forall \mathbf{z} (A(\mathbf{k}, \mathbf{z}) \rightarrow B(\mathbf{k}, \mathbf{z}) \& C(\mathbf{k}, \mathbf{z})).$$

Так как $\varphi_d^{n+1}(\mathbf{k}, k) = \phi((k)_0, (k)_1)$, то надо доказать, что для любых чисел $l_1, \dots, l_m, l$, если $l \text{ hr } A(\mathbf{k}, \mathbf{l})$, то значение $\varphi_{\phi((k)_0, (k)_1)}^{m+1}(\mathbf{l}, l)$ определено, и

$$\varphi_{\phi((k)_0, (k)_1)}^{m+1}(\mathbf{l}, l) \text{ hr } B(\mathbf{k}, \mathbf{l}) \& C(\mathbf{k}, \mathbf{l}), \quad (8.7)$$

где $\mathbf{l} = l_1, \dots, l_m$. Пусть $l \text{ hr } A(\mathbf{k}, \mathbf{l})$. Тогда в силу (8.5) и (8.6) значения $\varphi_{(k)_0}^{m+1}(\mathbf{l}, l)$ и $\varphi_{(k)_1}^{m+1}(\mathbf{l}, l)$ определены, и при этом $\varphi_{(k)_0}^{m+1}(\mathbf{l}, l) \text{ hr } B(\mathbf{k}, \mathbf{l})$, $\varphi_{(k)_1}^{m+1}(\mathbf{l}, l) \text{ hr } C(\mathbf{k}, \mathbf{l})$. Отсюда и из (8.4) следует, что определено значение $\varphi_{\phi((k)_0, (k)_1)}^{m+1}(\mathbf{l}, l) = 2^{\varphi_{(k)_0}^{m+1}(\mathbf{l}, l)} \cdot 3^{\varphi_{(k)_1}^{m+1}(\mathbf{l}, l)}$, и при этом выполняется (8.7), что и требовалось доказать.

8) Пусть Φ есть аксиома

$$\forall \mathbf{z} (A \rightarrow C) \& \forall \mathbf{z} (B \rightarrow C) \Rightarrow \forall \mathbf{z} (A \vee B \rightarrow C),$$

т.е.

$$\forall \mathbf{z} (A(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \rightarrow C(\mathbf{x}, \mathbf{z})) \& \forall \mathbf{z} (B(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \rightarrow C(\mathbf{x}, \mathbf{z})) \Rightarrow \forall \mathbf{z} (A(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \vee B(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \rightarrow C(\mathbf{x}, \mathbf{z})).$$

Пусть вычислимая функция ϕ по номеру a формулы $\Phi_a(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, y)$ и номеру b формулы $\Phi_b(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, y)$ выдает номер $\phi(a, b)$ формулы

$$((x_{m+1})_0 = 0 \& \Phi_a(x_1, \dots, x_m, (x_{m+1})_1, y)) \vee ((x_{m+1})_0 = 1 \& \Phi_b(x_1, \dots, x_m, (x_{m+1})_1, y)).$$

Очевидно, что для любых натуральных чисел $l_1, \dots, l_m, l$

$$\varphi_{\phi(a,b)}^{m+1}(l_1, \dots, l_m, l) \simeq \begin{cases} \varphi_a^{m+1}(l_1, \dots, l_m, (l)_1), & \text{если } (l)_0 = 0, \\ \varphi_b^{m+1}(l_1, \dots, l_m, (l)_1), & \text{если } (l)_0 = 1. \end{cases} \quad (8.8)$$

В качестве d возьмем номер формулы из $Fm(y, x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$, выражающей отношение $y = \phi((x_{n+1})_0, (x_{n+1})_1)$. Действительно, если даны числа $k_1, \dots, k_n, k$, причем

$$k \text{ hr } (\forall \mathbf{z} (A(\mathbf{k}, \mathbf{z}) \rightarrow C(\mathbf{k}, \mathbf{z})) \& \forall \mathbf{z} (B(\mathbf{k}, \mathbf{z}) \rightarrow C(\mathbf{k}, \mathbf{z}))),$$

где $\mathbf{k} = k_1, \dots, k_n$, то

$$(k)_0 \text{ hr } \forall \mathbf{z} (A(\mathbf{k}, \mathbf{z}) \rightarrow C(\mathbf{k}, \mathbf{z})), \quad (8.9)$$

$$(k)_1 \text{ hr } \forall \mathbf{z} (B(\mathbf{k}, \mathbf{z}) \rightarrow C(\mathbf{k}, \mathbf{z})). \quad (8.10)$$

Докажем, что

$$\varphi_d^{n+1}(\mathbf{k}, k) \text{ hr } \forall \mathbf{z} (A(\mathbf{k}, \mathbf{z}) \vee B(\mathbf{k}, \mathbf{z}) \rightarrow C(\mathbf{k}, \mathbf{z})).$$

Так как $\varphi_d^{n+1}(\mathbf{k}, k) = \phi((k)_0, (k)_1)$, надо доказать, что для любых $l_1, \dots, l_m, l$, если $l \text{ hr } (A(\mathbf{k}, \mathbf{l}) \vee B(\mathbf{k}, \mathbf{l}))$, то значение $\varphi_{\phi((k)_0, (k)_1)}^{m+1}(\mathbf{l}, l)$ определено, и

$$\varphi_{\phi((k)_0, (k)_1)}^{m+1}(\mathbf{l}, l) \text{ hr } C(\mathbf{k}, \mathbf{l}), \quad (8.11)$$

где $\mathbf{l} = l_1, \dots, l_m$. Пусть $l \text{ hr } (A(\mathbf{k}, \mathbf{l}) \vee B(\mathbf{k}, \mathbf{l}))$. Если $(l)_0 = 0$, то $(l)_1 \text{ hr } A(\mathbf{k}, \mathbf{l})$, а тогда в силу (8.9) значение $\varphi_{(k)_0}^{m+1}(\mathbf{l}, (l)_1)$ определено, и при этом $\varphi_{(k)_0}^{m+1}(\mathbf{l}, (l)_1) \text{ hr } C(\mathbf{k}, \mathbf{l})$. Отсюда и из (8.8) следует, что значение $\varphi_{\phi((k)_0, (k)_1)}^{m+1}(\mathbf{l}, l) = \varphi_{(k)_0}^{m+1}(l_1, \dots, l_m, (l)_1)$ определено, и при этом выполняется (8.11). Если же $(l)_0 = 1$, то $(l)_1 \text{ hr } B(\mathbf{k}, \mathbf{l})$, и в силу (8.10) значение $\varphi_{(k)_1}^{m+1}(\mathbf{l}, (l)_1)$ определено, и при этом $\varphi_{(k)_1}^{m+1}(\mathbf{l}, (l)_1) \text{ hr } C(\mathbf{k}, \mathbf{l})$. Отсюда и из (8.8) следует, что значение $\varphi_{\phi((k)_0, (k)_1)}^{m+1}(\mathbf{l}, l) = \varphi_{(k)_1}^{m+1}(l_1, \dots, l_m, (l)_1)$ определено, и при этом выполняется (8.11), что и требовалось доказать.

9) Пусть Φ есть аксиома $\forall \mathbf{z} (A(\mathbf{z}) \rightarrow B(\mathbf{z})) \Rightarrow \forall \mathbf{z} (A(\mathbf{t}) \rightarrow B(\mathbf{t}))$, где каждая переменная из списка $\mathbf{t}$ свободна для соответствующей переменной в формулах $A(\mathbf{z})$ и $B(\mathbf{z})$. Список $\mathbf{x}$ параметров секвенции Φ состоит из параметров ее левой части, а также тех переменных $x_{j_1}, \dots, x_{j_r}$ из списка $\mathbf{t}$, которые не входят в список $\mathbf{z}$. Пусть список $\mathbf{t}$ есть $x_{j_1}, \dots, x_{j_r}, z_{i_1}, \dots, z_{i_{m-r}}$. Тогда секвенцию Φ можно переписать в виде

$$\begin{aligned} & \forall \mathbf{z} (A(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \rightarrow B(\mathbf{x}, \mathbf{z})) \\ \Rightarrow & \quad \forall \mathbf{z} (A(\mathbf{x}, x_{j_1}, \dots, x_{j_r}, z_{i_1}, \dots, z_{i_{m-r}}) \rightarrow B(\mathbf{x}, x_{j_1}, \dots, x_{j_r}, z_{i_1}, \dots, z_{i_{m-r}})). \end{aligned}$$

Пусть ϕ – такая вычислимая функция, которая по геделеву номеру a формулы $\Phi_a(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, y)$ и числам $b_1, \dots, b_r$ строит геделев номер $\phi(a, b_1, \dots, b_r)$ формулы $\Phi_a(b_1, \dots, b_r, x_{i_1}, \dots, x_{i_{m-r}}, x_{m+1}, y)$ из класса $Fm(y, x_1, \dots, x_m, x_{m+1})$. Очевидно, что для любых натуральных чисел $a, l_1, \dots, l_m, l, b_1, \dots, b_r$

$$\varphi_{\phi(a, b_1, \dots, b_r)}^{m+1}(l_1, \dots, l_m, l) \simeq \varphi_a^{m+1}(b_1, \dots, b_r, l_{i_1}, \dots, l_{i_{m-r}}, l). \quad (8.12)$$

В качестве d возьмем номер формулы из $Fm(y, x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$, выражающей отношение $y = \phi(x_{n+1}, x_{j_1}, \dots, x_{j_r})$. Пусть даны числа $k_1, \dots, k_n, k$, причем

$$k \text{ hr } \forall \mathbf{z} (A(\mathbf{k}, \mathbf{z}) \rightarrow B(\mathbf{k}, \mathbf{z})). \quad (8.13)$$

Требуется доказать, что

$$\varphi_d^{n+1}(\mathbf{k}, k) \text{ hr } \forall \mathbf{z} (A(\mathbf{k}, k_{j_1}, \dots, k_{j_r}, z_{i_1}, \dots, z_{i_{m-r}}) \rightarrow B(\mathbf{k}, k_{j_1}, \dots, k_{j_r}, z_{i_1}, \dots, z_{i_{m-r}})).$$

Так как $\varphi_d^{n+1}(\mathbf{k}, k) = \phi(k, k_{j_1}, \dots, k_{j_r})$, надо доказать, что для любых чисел $l_1, \dots, l_m, l$, если

$$l \text{ hr } A(\mathbf{k}, k_{j_1}, \dots, k_{j_r}, l_{i_1}, \dots, l_{i_{m-r}}), \quad (8.14)$$

то значение $\varphi_{\phi(k, k_{j_1}, \dots, k_{j_r})}^{m+1}(\mathbf{l}, l)$ определено, и

$$\varphi_{\phi(k, k_{j_1}, \dots, k_{j_r})}^{m+1}(\mathbf{l}, l) \text{ hr } B(\mathbf{k}, k_{j_1}, \dots, k_{j_r}, l_{i_1}, \dots, l_{i_{m-r}}), \quad (8.15)$$

где $\mathbf{l} = l_1, \dots, l_m$. Пусть имеет место (8.14). Тогда в силу (8.13) определено значение $\varphi_k^{m+1}(k_{j_1}, \dots, k_{j_r}, l_{i_1}, \dots, l_{i_{m-r}}, l)$, и при этом

$$\varphi_k^{m+1}(k_{j_1}, \dots, k_{j_r}, l_{i_1}, \dots, l_{i_{m-r}}, l) \text{ hr } B(\mathbf{k}, k_{j_1}, \dots, k_{j_r}, l_{i_1}, \dots, l_{i_{m-r}}).$$

Отсюда и из (8.12) следует, что определено значение $\varphi_{\phi(k, k_{j_1}, \dots, k_{j_r})}^{m+1}(\mathbf{l}, l)$, и при этом выполняется (8.15), что и требовалось доказать.

10) Пусть Φ есть аксиома $\forall \mathbf{z} (A \rightarrow B) \Rightarrow \forall \mathbf{y} (A \rightarrow B)$, где переменные из списка $\mathbf{y}$ не входят свободно в левую часть секвенции. В силу этого условия $\mathbf{y}$ может содержать некоторые переменные из списка $\mathbf{z}$ (скажем, $z_1, \dots, z_r$) и “фиктивные” переменные $y_1, \dots, y_s$. Будем считать, что $\mathbf{y} = z_1, \dots, z_r, y_1, \dots, y_s$. При этом $z_{r+1}, \dots, z_m$ являются параметрами Φ . Таким образом, список параметров Φ имеет вид $\mathbf{x} = \mathbf{u}, z_{r+1}, \dots, z_m$, где $\mathbf{u} = u_1, \dots, u_l$ – список тех параметров формул A и B , которые не входят в $\mathbf{z}$. Теперь секвенцию Φ можно записать в виде

$$\forall \mathbf{z} (A(\mathbf{u}, \mathbf{z}) \rightarrow B(\mathbf{u}, \mathbf{z})) \Rightarrow \forall \mathbf{z}^- \mathbf{y}^- (A(\mathbf{u}, \mathbf{z}) \rightarrow B(\mathbf{u}, \mathbf{z})),$$

где $\mathbf{z}^- = z_1, \dots, z_r$, $\mathbf{y}^- = y_1, \dots, y_s$. Пусть вычислимая функция ϕ по геделеву номеру a формулы $\Phi_a(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, y)$ и натуральным числам $b_1, \dots, b_{m-r}$ строит геделев номер $\phi(a, b_1, \dots, b_{m-r})$ формулы $\Phi_a(x_1, \dots, x_r, b_1, \dots, b_{m-r}, x_{r+s+1}, y)$ из $Fm(y, x_1, \dots, x_r, x_{r+1}, \dots, x_{r+s+1})$. Тогда

$$\varphi_{\phi(a, b_1, \dots, b_{m-r})}^{r+s+1}(l_1, \dots, l_{r+s+1}) \simeq \varphi_a^{m+1}(l_1, \dots, l_r, b_1, \dots, b_{m-r}, l_{r+s+1})$$

для любых $a, l_1, \dots, l_{r+s+1}, b_1, \dots, b_{m-r}$. В качестве d возьмем геделев номер формулы из класса $Fm(y, x_1, \dots, x_{n+m-r+1})$, выражающей, что $y = \phi(x_{l+m-r+1}, x_{k+1}, \dots, x_{l+m-r})$. Нетрудно доказать, что это число является искомым.

11) Пусть Φ есть аксиома $\forall \mathbf{z} x (B \rightarrow A) \Rightarrow \forall \mathbf{z} (\exists x B \rightarrow A)$, где переменная x не свободна в A , т.е.

$$\forall \mathbf{z} x (B(\mathbf{x}, \mathbf{z}, x) \rightarrow A(\mathbf{x}, \mathbf{z})) \Rightarrow \forall \mathbf{z} (\exists x B(\mathbf{x}, \mathbf{z}, x) \rightarrow A(\mathbf{x}, \mathbf{z})).$$

Пусть вычислимая функция ϕ по геделеву номеру a формулы $\Phi_a(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, x_{m+2}, y)$ выдает геделев номер $\phi(a)$ формулы $\Phi_a(x_1, \dots, x_m, (x_{m+1})_0, (x_{m+1})_1, y)$. Очевидно, что для любых натуральных чисел $l_1, \dots, l_m, l$ имеет место условное равенство

$$\varphi_{\phi(a)}^{m+1}(l_1, \dots, l_m, l) \simeq \varphi_a^{m+2}(l_1, \dots, l_m, (l)_0, (l)_1). \quad (8.16)$$

В качестве d возьмем номер формулы из $Fm(y, x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$, выражающей отношение $y = \phi(x_{n+1})$. Действительно, пусть даны числа $k_1, \dots, k_n, k$, причем

$$k \text{ hr } (\forall \mathbf{z} x (B(\mathbf{k}, \mathbf{z}, x) \rightarrow A(\mathbf{k}, \mathbf{z}))), \quad (8.17)$$

где $\mathbf{k} = k_1, \dots, k_n$. Требуется доказать, что $\varphi_d^{n+1}(\mathbf{k}, k) \text{ hr } \forall \mathbf{z} (\exists x B(\mathbf{k}, \mathbf{z}, x) \rightarrow A(\mathbf{k}, \mathbf{z}))$. Теперь заметим, что $\varphi_d^{n+1}(\mathbf{k}, k) = \phi(k)$. Поэтому надо доказать, что для любых чисел $l_1, \dots, l_m, l$, если $l \text{ hr } \exists x B(\mathbf{k}, \mathbf{l}, x)$, то значение $\varphi_{\phi(k)}^{m+1}(\mathbf{l}, l)$ определено, и

$$\varphi_{\phi(k)}^{m+1}(\mathbf{l}, l) \text{ hr } A(\mathbf{k}, \mathbf{l}), \quad (8.18)$$

где $\mathbf{l} = l_1, \dots, l_m$. Пусть $l \text{ hr } \exists x B(\mathbf{k}, \mathbf{l}, x)$. Тогда $(l)_1 \text{ hr } B(\mathbf{k}, \mathbf{l}, (l)_0)$, и в силу (8.17) значение $\varphi_k^{m+2}(\mathbf{l}, (l)_0, (l)_1)$ определено, и при этом $\varphi_k^{m+2}(\mathbf{l}, (l)_0, (l)_1) \text{ hr } A(\mathbf{k}, \mathbf{l})$. Отсюда и из (8.16) следует, что определено значение $\varphi_{\phi(k)}^{m+1}(\mathbf{l}, l) = \varphi_k^{m+2}(\mathbf{l}, (l)_0, (l)_1)$, и при этом выполняется (8.18), что и требовалось доказать.

12) Пусть Φ есть аксиома $\top \Rightarrow x = x$. Очевидно, что в этом случае в качестве d можно взять геделев номер формулы $y = 0$ из класса $Fm(y, x_1, x_2)$.

13) Пусть Φ есть аксиома $(x = y) \& A(x) \Rightarrow A(y)$, где переменная y свободна для x в формуле $A(x)$, т.е. $(x = y) \& A(\mathbf{x}, x) \Rightarrow A(\mathbf{x}, y)$. Пусть d – геделев номер формулы $y = (x_{n+3})_1$ из класса $Fm(y, x_1, \dots, x_{n+3})$. Очевидно, что для любых натуральных чисел $k_1, \dots, k_{n+3}$ имеет место равенство

$$\varphi_d(k_1, \dots, k_{n+3}) = (k_{n+3})_1. \quad (8.19)$$

Докажем, что d – искомое число. Пусть даны числа $k_1, \dots, k_{n+2}, k$, причем

$$k \text{ hr } (k_{n+1} = k_{n+2}) \& A(\mathbf{k}, k_{n+1}). \quad (8.20)$$

Требуется доказать, что

$$\varphi_d^{n+3}(k_1, \dots, k_{n+2}, k) \text{ hr } A(\mathbf{k}, k_{n+2}). \quad (8.21)$$

Из (8.20) следует, что $k_{n+1} = k_{n+2}$ и $(k)_1 \text{ hr } A(\mathbf{k}, k_{n+1})$, так что $(k)_1 \text{ hr } A(\mathbf{k}, k_{n+2})$. Отсюда и из (8.19) получается (8.21), что и требовалось доказать.

На этом рассмотрение аксиом закончено. Докажем корректность каждого правила исчисления BQC . А именно, мы покажем, как по реализациям оцененных секвенций, стоящих всылке правила, построить реализацию e заключения этого правила. Итак, пусть фиксирована оценка f . В дальнейшем будем считать, что список параметров секвенций всылках правил есть $\mathbf{x} = x_1, \dots, x_n$.

Докажем корректность правила I. Пусть

$$a \text{ hr } A(\mathbf{x}) \Rightarrow B(\mathbf{x}), \quad (8.22)$$

$$b \text{ hr } B(\mathbf{x}) \Rightarrow C(\mathbf{x}). \quad (8.23)$$

В качестве e можно взять геделев номер формулы $\exists v (\Psi_a(\mathbf{x}, x_{n+1}, v) \& \Psi_b(\mathbf{x}, v, y))$. Очевидно, что для любых натуральных чисел $k_1, \dots, k_n, k$

$$\varphi_e^{n+1}(\mathbf{k}, k) \simeq \varphi_b^{n+1}(\mathbf{k}, \varphi_a^{n+1}(\mathbf{k}, k)), \quad (8.24)$$

где $\mathbf{k} = k_1, \dots, k_n$. Докажем, что $e \text{ hr } A(\mathbf{x}) \Rightarrow C(\mathbf{x})$, а именно, каковы бы ни были $k_1, \dots, k_n, k$, если $k \text{ hr } A(\mathbf{k})$, то значение $\varphi_e^{n+1}(\mathbf{k}, k)$ определено, и

$$\varphi_e^{n+1}(\mathbf{k}, k) \text{ hr } C(\mathbf{k}). \quad (8.25)$$

Пусть $k \text{ hr } A(\mathbf{k})$. В силу (8.22) определено значение $\varphi_a^{n+1}(\mathbf{k}, k)$, и $\varphi_a^{n+1}(\mathbf{k}, k) \text{ hr } B(\mathbf{k})$. Отсюда и из (8.23) следует, что определено значение $\varphi_b^{n+1}(\mathbf{k}, \varphi_a^{n+1}(\mathbf{k}, k))$, и при этом $\varphi_b^{n+1}(\mathbf{k}, \varphi_a^{n+1}(\mathbf{k}, k)) \text{ hr } C(\mathbf{k})$. Отсюда и из (8.24) следует, что значение $\varphi_e^{n+1}(\mathbf{k}, k)$ определено, и при этом имеет место (8.25), что и требовалось доказать.

Докажем корректность правила II. Пусть имеет место (8.22) и

$$b \text{ hr } A(\mathbf{x}) \Rightarrow C(\mathbf{x}). \quad (8.26)$$

В качестве e можно взять геделев номер формулы

$$\exists u \exists v (\Phi_a(\mathbf{x}, x_{n+1}, u) \& \Phi_b(\mathbf{x}, x_{n+1}, v) \& y = 2^u \cdot 3^v).$$

Очевидно, что для любых натуральных чисел $k_1, \dots, k_n, k$

$$\varphi_e^{n+1}(\mathbf{k}, k) \simeq 2^{\varphi_a^{n+1}(\mathbf{k}, k)} \cdot 3^{\varphi_b^{n+1}(\mathbf{k}, k)}, \quad (8.27)$$

где $\mathbf{k} = k_1, \dots, k_n$. Докажем, что $e \text{ hr } A(\mathbf{x}) \Rightarrow B(\mathbf{x}) \& C(\mathbf{x})$. А именно, требуется доказать, что, каковы бы ни были натуральные числа $k_1, \dots, k_n, k$, если $k \text{ hr } A(\mathbf{k})$, то значение $\varphi_e^{n+1}(\mathbf{k}, k)$ определено, и при этом

$$\varphi_e^{n+1}(\mathbf{k}, k) \text{ hr } B(\mathbf{k}) \& C(\mathbf{k}). \quad (8.28)$$

Пусть $k \text{ hr } A(\mathbf{k})$. В силу (8.22) определено значение $\varphi_a^{n+1}(\mathbf{k}, k)$, и $\varphi_a^{n+1}(\mathbf{k}, k) \text{ hr } B(\mathbf{k})$. Аналогично, в силу (8.26) определено значение $\varphi_b^{n+1}(\mathbf{k}, k)$, причем $\varphi_b^{n+1}(\mathbf{k}, k) \text{ hr } C(\mathbf{k})$. Отсюда и из (8.27) следует, что значение $\varphi_e^{n+1}(\mathbf{k}, k) = 2^{\varphi_a^{n+1}(\mathbf{k}, k)} \cdot 3^{\varphi_b^{n+1}(\mathbf{k}, k)}$ определено, и при этом имеет место (8.28), что и требовалось доказать.

Докажем корректность правила III а). Пусть

$$a \text{ hr } A(\mathbf{x}) \Rightarrow B(\mathbf{x}) \& C(\mathbf{x}). \quad (8.29)$$

В качестве e можно взять геделев номер формулы $\exists v (\Phi_a(\mathbf{x}, x_{n+1}, v) \& y = (v)_0)$. Очевидно, что для любых натуральных чисел $k_1, \dots, k_n, k$

$$\varphi_e^{n+1}(\mathbf{k}, k) \simeq (\varphi_a^{n+1}(\mathbf{k}, k))_0, \quad (8.30)$$

где $\mathbf{k} = k_1, \dots, k_n$. Докажем, что $e \text{ hr } A(\mathbf{x}) \Rightarrow B(\mathbf{x})$, а именно, каковы бы ни были $k_1, \dots, k_n, k$, если $k \text{ hr } A(\mathbf{k})$, то значение $\varphi_e^{n+1}(\mathbf{k}, k)$ определено, и при этом

$$\varphi_e^{n+1}(\mathbf{k}, k) \text{ hr } B(\mathbf{k}). \quad (8.31)$$

Пусть $k \text{ hr } A(\mathbf{k})$. Тогда в силу (8.29) определено значение $\varphi_a^{n+1}(\mathbf{k}, k)$, и при этом $\varphi_a^{n+1}(\mathbf{k}, k) \text{ hr } B(\mathbf{k}) \& C(\mathbf{k})$. Отсюда и из (8.30) следует, что значение $\varphi_e^{n+1}(\mathbf{k}, k) = (\varphi_a^{n+1}(\mathbf{k}, k))_0$ определено, и при этом имеет место (8.31), что и требовалось доказать.

Аналогично доказывается корректность правила III б). В этом случае в качестве e можно взять геделев номер формулы $\exists v (\Phi_a(\mathbf{x}, x_{n+1}, v) \& y = (v)_1)$.

Докажем корректность правила IV. Пусть

$$\begin{aligned} a \text{ hr } B(\mathbf{x}) &\Rightarrow A(\mathbf{x}), \\ b \text{ hr } C(\mathbf{x}) &\Rightarrow A(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (8.32)$$

Тогда в качестве e можно взять геделев номер формулы

$$((x_{n+1})_0 = 0 \& \Phi_a(\mathbf{x}, (x_{n+1})_1, y)) \vee ((x_{n+1})_0 = 1 \& \Phi_b(\mathbf{x}, (x_{n+1})_1, y)).$$

Очевидно, что для любых натуральных чисел $k_1, \dots, k_n, k$

$$\varphi_e^{n+1}(\mathbf{k}, k) \simeq \begin{cases} \varphi_a^{n+1}(\mathbf{k}, (k)_1), & \text{если } (k)_0 = 0, \\ \varphi_b^{n+1}(\mathbf{k}, (k)_1), & \text{если } (k)_0 = 1, \end{cases} \quad (8.33)$$

где $\mathbf{k} = k_1, \dots, k_n$. Докажем, что $e \text{ hr } B(\mathbf{x}) \vee C(\mathbf{x}) \Rightarrow A(\mathbf{x})$, а именно, каковы бы ни были $k_1, \dots, k_n, k$, если $k \text{ hr } B(\mathbf{k}) \vee C(\mathbf{k})$, то значение $\varphi_e^{n+1}(\mathbf{k}, k)$ определено, и

$$\varphi_e^{n+1}(\mathbf{k}, k) \text{ hr } A(\mathbf{k}). \quad (8.34)$$

Пусть $k \text{ hr } B(\mathbf{k}) \vee C(\mathbf{k})$. Тогда выполнено одно из двух:

- а) $(k)_0 = 0$ и $(k)_1 \text{ hr } B(\mathbf{k})$;
- б) $(k)_0 = 1$ и $(k)_1 \text{ hr } C(\mathbf{k})$.

В случае а) в силу (8.32) получаем, что определено значение $\varphi_a^{n+1}(\mathbf{k}, (k)_1)$, причем $\varphi_a^{n+1}(\mathbf{k}, (k)_1) \text{ hr } A(\mathbf{k})$. Отсюда и из (8.33) следует, что определено значение $\varphi_e^{n+1}(\mathbf{k}, k) = \varphi_a^{n+1}(\mathbf{k}, (k)_1)$, и при этом имеет место (8.34), что и требовалось доказать. Аналогично рассматривается случай б).

Докажем корректность правила V а). Пусть

$$a \text{ hr } B(\mathbf{x}) \vee C(\mathbf{x}) \Rightarrow A(\mathbf{x}). \quad (8.35)$$

В качестве e можно взять геделев номер формулы $\exists v (v = 2^0 \cdot 3^{x_{n+1}} \& \Phi_a(\mathbf{x}, v, y))$. Очевидно, что для любых натуральных чисел $k_1, \dots, k_n, k$

$$\varphi_e^{n+1}(\mathbf{k}, k) \simeq \varphi_a^{n+1}(\mathbf{k}, 2^0 \cdot 3^k), \quad (8.36)$$

где $\mathbf{k} = k_1, \dots, k_n$. Докажем, что $e \text{ hr } B(\mathbf{x}) \Rightarrow A(\mathbf{x})$, а именно, каковы бы ни были $k_1, \dots, k_n, k$, если $k \text{ hr } B(\mathbf{k})$, то значение $\varphi_e^{n+1}(\mathbf{k}, k)$ определено, и

$$\varphi_e^{n+1}(\mathbf{k}, k) \text{ hr } A(\mathbf{k}). \quad (8.37)$$

Пусть $k \text{ hr } B(\mathbf{k})$. Тогда $2^0 \cdot 3^k \text{ hr } B(\mathbf{k}) \vee C(\mathbf{k})$, и в силу (8.35) определено значение $\varphi_a^{n+1}(\mathbf{k}, 2^0 \cdot 3^k)$, причем $\varphi_a^{n+1}(\mathbf{k}, 2^0 \cdot 3^k) \text{ hr } A(\mathbf{k})$. Отсюда и из (8.36) следует, что значение $\varphi_e^{n+1}(\mathbf{k}, k) = \varphi_a^{n+1}(\mathbf{k}, 2^0 \cdot 3^k)$ определено, и при этом имеет место (8.37).

Аналогично доказывается корректность правила V b). В этом случае в качестве e можно взять геделев номер формулы $\exists v (v = 2^1 \cdot 3^{x_{n+1}} \& \Phi_a(\mathbf{x}, v, y))$.

Докажем корректность правила VI. Пусть список $\mathbf{t}$ состоит из различных переменных $y_1, \dots, y_m$, образующих список $\mathbf{y}$. Таким образом, список $\mathbf{t}$ имеет вид $y_{i_1}, \dots, y_{i_n}$. Допустим, что

$$a \text{ hr}_{\mathbf{x}} A(\mathbf{x}) \Rightarrow B(\mathbf{x}). \quad (8.38)$$

Пусть e – геделев номер формулы $\exists y_1 \dots \exists y_m (y_1 = x_1 \& \dots \& y_m = x_m \& \Phi_a(\mathbf{t}, x_{m+1}))$ из класса $Fm(y, x_1, \dots, x_m)$. Очевидно, что для любых $k_1, \dots, k_m, k$

$$\varphi_e^{m+1}(\mathbf{k}, k) \simeq \varphi_a^{n+1}(k_{i_1}, \dots, k_{i_n}, k), \quad (8.39)$$

где $\mathbf{k} = k_1, \dots, k_m$. Докажем, что $e \text{ hr}_{\mathbf{y}} A(\mathbf{t}) \Rightarrow B(\mathbf{t})$. А именно, требуется доказать, что, каковы бы ни были натуральные числа $k_1, \dots, k_m, k$, если $k \text{ hr } A(k_{i_1}, \dots, k_{i_n})$, то значение $\varphi_e^{m+1}(\mathbf{k}, k)$ определено, и при этом

$$\varphi_e^{m+1}(\mathbf{k}, k) \text{ hr } B(k_{i_1}, \dots, k_{i_n}). \quad (8.40)$$

Пусть $k \text{ hr } A(k_{i_1}, \dots, k_{i_n})$. Тогда в силу (8.38) значение $\varphi_a^{n+1}(k_{i_1}, \dots, k_{i_n}, k)$ определено, причем $\varphi_a^{n+1}(k_{i_1}, \dots, k_{i_n}, k) \text{ hr } B(k_{i_1}, \dots, k_{i_n})$. Отсюда и из (8.39) следует, что значение $\varphi_e^{m+1}(\mathbf{k}, k) = \varphi_a^{n+1}(k_{i_1}, \dots, k_{i_n}, k)$ определено, и при этом имеет место (8.40).

Докажем корректность правила VII. Пусть

$$a \text{ hr } B(\mathbf{x}, x) \Rightarrow A(\mathbf{x}). \quad (8.41)$$

Тогда в качестве e можно взять геделев номер формулы $\Phi_a(\mathbf{x}, (x_{n+1})_0, (x_{n+1})_1, y)$. Очевидно, что для любых натуральных чисел $k_1, \dots, k_n, k$

$$\varphi_e^{n+1}(\mathbf{k}, k) \simeq \varphi_a^{n+2}(\mathbf{k}, (k)_0, (k)_1), \quad (8.42)$$

где $\mathbf{k} = k_1, \dots, k_n$. Докажем, что $e \text{ hr } \exists x B(\mathbf{x}, x) \Rightarrow A(\mathbf{x})$. А именно, требуется доказать, что, каковы бы ни были натуральные числа $k_1, \dots, k_n, k$, если $k \text{ hr } \exists x B(\mathbf{k}, x)$, то значение $\varphi_e^{n+1}(\mathbf{k}, k)$ определено, и при этом

$$\varphi_e^{n+1}(\mathbf{k}, k) \text{ hr } A(\mathbf{k}). \quad (8.43)$$

Пусть $k \text{ hr } \exists x B(\mathbf{k}, x)$. Тогда $(k)_1 \text{ hr } B(\mathbf{k}, (k)_0)$, и в силу (8.41) определено значение $\varphi_a^{n+2}(\mathbf{k}, (k)_0, (k)_1)$, причем $\varphi_a^{n+2}(\mathbf{k}, (k)_0, (k)_1) \text{ hr } A(\mathbf{k})$. Отсюда и из (8.42) следует, что значение $\varphi_e^{n+1}(\mathbf{k}, k) = \varphi_a^{n+2}(\mathbf{k}, (k)_0, (k)_1)$ определено, и при этом имеет место (8.43).

Докажем корректность правила VIII. Пусть

$$a \text{ hr } \exists x B(\mathbf{x}, x) \Rightarrow A(\mathbf{x}). \quad (8.44)$$

В качестве e можно взять геделев номер формулы $\exists v (v = 2^{x_{n+1}} \cdot 3^{x_{n+2}} \& \Phi_a(\mathbf{x}, v, y))$. Очевидно, что для любых натуральных чисел $k_1, \dots, k_n, k$

$$\varphi_e^{n+2}(\mathbf{k}, k, l) \simeq \varphi_a^{n+1}(\mathbf{k}, 2^k \cdot 3^l), \quad (8.45)$$

где $\mathbf{k} = k_1, \dots, k_n$. Докажем, что $e \text{ hr } B(\mathbf{x}, x) \Rightarrow A(\mathbf{x})$. А именно, требуется доказать, что, каковы бы ни были натуральные числа $k_1, \dots, k_n, k, l$, если $l \text{ hr } B(\mathbf{k}, k)$, то значение $\varphi_e^{n+2}(\mathbf{k}, k, l)$ определено, и при этом

$$\varphi_e^{n+2}(\mathbf{k}, k, l) \text{ hr } A(\mathbf{k}). \quad (8.46)$$

Пусть $l \text{ hr } B(\mathbf{k}, k)$. Тогда $2^k \cdot 3^l \text{ hr } \exists x B(\mathbf{k}, x)$, и в силу (8.44) определено значение $\varphi_a^{n+1}(\mathbf{k}, 2^k \cdot 3^l)$, причем $\varphi_a^{n+1}(\mathbf{k}, 2^k \cdot 3^l) \text{ hr } A(\mathbf{k})$. Отсюда и из (8.45) следует, что значение $\varphi_e^{n+2}(\mathbf{k}, k, l) = \varphi_a^{n+1}(\mathbf{k}, 2^k \cdot 3^l)$ определено, и при этом имеет место (8.46).

Докажем корректность правила IX. Считаем, что $\mathbf{z}$ есть список $x_{n+1}, \dots, x_{n+m}$. Пусть $a \text{ hr } A(\mathbf{x}) \& B(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \Rightarrow C(\mathbf{x}, \mathbf{z})$. Это означает, что, каковы бы ни были $\mathbf{k} = k_1, \dots, k_n$, $\mathbf{l} = l_1, \dots, l_m$, если $k \text{ hr } A(\mathbf{k}) \& B(\mathbf{k}, \mathbf{l})$, то $\varphi_a^{n+m+1}(\mathbf{k}, \mathbf{l}, k) \text{ hr } C(\mathbf{k}, \mathbf{l})$. Пусть ϕ – такая $(n+2)$ -местная вычислимая функция, которая по геделеву номеру a формулы $\Phi_a(\mathbf{x}, \mathbf{z}, x_{n+m+1}, y)$ и числам $k_1, \dots, k_n, k$ строит геделев номер формулы $\exists v (v = 2^k \cdot 3^{x_{n+m+1}} \& \Phi_a(\mathbf{k}, x_1, \dots, x_m, v, y))$. Очевидно, что для любых $\mathbf{k}, \mathbf{l}, l$ имеет место $\varphi_{\phi(a, \mathbf{k}, k)}^{m+1}(\mathbf{l}, l) \simeq \varphi_a^{n+m+1}(\mathbf{k}, \mathbf{l}, 2^k \cdot 3^l)$. Пусть e – геделев номер формулы из класса $Fm(y, x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$, выражающей отношение $y = \phi(a, x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$. Нетрудно доказать, что это число является искомым.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] S. C. Kleene, “On the interpretation of intuitionistic number theory”, *J. Symbolic Logic*, **10** (1945), 109–124.
- [2] В. Е. Плиско, “Обзор предикатной логики реализуемости”, *Алгоритмические вопросы алгебры и логики*, Сборник статей. К 80-летию со дня рождения академика Сергея Ивановича Адяна, Тр. МИАН, **274**, МАИК, М., 2011, 222–251.
- [3] В. Е. Плиско, “Рекурсивная реализуемость и конструктивная логика предикатов”, *Докл. АН СССР*, **214** (1974), 520–523.
- [4] В. Е. Плиско, “Абсолютная реализуемость предикатных формул”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **47:2** (1983), 315–334.
- [5] Х. Роджерс, *Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость*, Мир, М., 1972.
- [6] С. К. Клини, *Введение в метаматематику*, ИЛ, М., 1957.
- [7] A. Visser, “A propositional logic with explicit fixed points”, *Studia Logica*, **40:2** (1981), 155–175.
- [8] W. Ruitenburg, “Basic predicate calculus”, *Notre Dame J. Formal Logic*, **39:1** (1998), 18–46.

А. Ю. Коновалов

Московский государственный университет
имени М.В.Ломоносова

Поступило

13.03.2015

В. Е. Плиско

Московский государственный университет
имени М.В.Ломоносова

E-mail: veplisko@yandex.ru