Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. Б. Пламеневская, Типичный гомеоморфизм не обладает свойством липшицева отслеживания, *Матем. заметки*, 1999, том 65, выпуск 3, 477–480

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1074>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 14:20:30

ТИПИЧНЫЙ ГОМЕОМОРФИЗМ НЕ ОБЛАДАЕТ СВОЙСТВОМ ЛИПШИЦЕВА ОТСЛЕЖИВАНИЯ

О. Б. Пламеневская

Пусть M – гладкое замкнутое многообразие с римановой метрикой dist .

Рассмотрим пространство $Z(M)$ дискретных динамических систем (гомеоморфизмов) на M с C^0 -топологией, индуцированной метрикой

$$\rho_0(\varphi, \psi) = \max_{x \in M} \{ \text{dist}(\varphi(x), \psi(x)), \text{dist}(\varphi^{-1}(x), \psi^{-1}(x)) \}.$$

Пусть $\delta > 0$. Последовательность $\{x_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ называется δ -траекторией системы φ , если

$$\text{dist}(\varphi(x_k), x_{k+1}) < \varepsilon, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Задача отслеживания псевдотраекторий заключается в нахождении настоящих траекторий данной системы, близких (в каком-либо смысле) к ее δ -траекториям. Сформулируем несколько определений (см. [1]).

Система φ обладает свойством *отслеживания*, если при любом $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всякой δ -траектории $\{x_k\}$ найдется точка $x \in M$, для которой

$$\text{dist}(\varphi^k(x), x_k) < \varepsilon, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Система φ обладает свойством *липшицева отслеживания* (с константами $L, d > 0$), если при любом $\delta \in (0, d)$ для всякой δ -траектории $\{x_k\}$ найдется точка $x \in M$, для которой

$$\text{dist}(\varphi^k(x), x_k) < L\delta, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Пусть $B_\varepsilon(A)$ обозначает ε -окрестность множества $A \subset M$.

Система φ обладает свойством *слабого отслеживания*, если при любом $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всякой δ -траектории $\{x_k\}$ найдется траектория $O(x)$ некоторой точки $x \in M$, для которой

$$\{x_k\} \subset B_\varepsilon(O(x)).$$

Свойство элементов топологического пространства X называется *типичным*, если оно выполняется для всех элементов некоторого массивного подмножества $Y \subset X$; Y *массивно*, если оно содержит счетное пересечение открытых всюду плотных подмножеств X .

Пространство X называется *пространством Бэра*, если любое его массивное подмножество всюду плотно. Классическая теорема Бэра утверждает, что всякое полное метрическое пространство является пространством Бэра. Несложно видеть, что $Z(M)$ – полное пространство.

Типичность свойства слабого отслеживания в пространстве $Z(M)$ доказана Р. Корлессом и С. Ю. Пилюгиным [2]. Типичность свойства отслеживания в случае $\dim M \leq 3$ доказана К. Ода-ни [3]. Доказательство типичности отслеживания для произвольной размерности фазового пространства M получено в [4].

Цель данной заметки – показать, что в отличие от свойства отслеживания свойство липшицева отслеживания не является типичным в $Z(M)$. Более того, типичный гомеоморфизм не обладает свойством липшицева отслеживания. Мы определяем также свойство липшицева слабого отслеживания и показываем, что типичный гомеоморфизм не обладает даже этим более слабым свойством.

Система φ обладает свойством *липшицева слабого отслеживания* (с константами $L, d > 0$), если при любом $\delta \in (0, d)$ для всякой δ -траектории $\{x_k\}$ найдется траектория $O(x)$, для которой

$$\{x_k\} \subset B_{L\delta}(O(x)).$$

Выделим сначала некоторый класс гомеоморфизмов многообразия M , не имеющих липшицева отслеживания с заданными константами. Для фиксированной точки $p \in M$ будем обозначать

$$B_R = \{x \in M : \text{dist}(x, p) \leq R\}, \quad S_{R_1, R_2} = \{x \in M : R_2 \leq \text{dist}(x, p) \leq R_1\}.$$

ЛЕММА. Пусть гомеоморфизм φ имеет неподвижную точку p . Предположим, что существуют числа $R_1, \dots, R_5$,

$$R_1 > R_2 > R_3 > R_4 > R_5 > 0, \quad (1)$$

для которых

$$\varphi(S_{R_1, R_3}) \subset \text{int } S_{R_2, R_3}, \quad (2)$$

$$\varphi(B_{R_4}) \subset \text{int } B_{R_5}, \quad (3)$$

причем выполняются неравенства

$$R_2 - R_4 < d, \quad (4)$$

$$R_1 - R_3 > 2L(R_2 - R_4), \quad (5)$$

$$R_3 - R_5 > 2L(R_2 - R_4). \quad (6)$$

Тогда гомеоморфизм φ не имеет липшицева отслеживания с константами L и d .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$\delta = R_2 - R_4. \quad (7)$$

Построим δ -траекторию системы φ следующим образом. Выберем точку y так, что

$$\text{dist}(y, p) = \frac{R_1 + R_3}{2}. \quad (8)$$

Тогда $y \in S_{R_1, R_3}$ и в силу (2) будет $\text{dist}(\varphi(y), p) < R_2$. Найдем точку z такую, что

$$\text{dist}(\varphi(y), z) < \delta, \quad \text{dist}(z, p) < R_4.$$

Последовательность

$$\dots, \varphi^{-1}(y), y, \varphi(y), z, \varphi(z), \varphi^2(z), \dots$$

является δ -траекторией гомеоморфизма φ . Предположим, что она отслеживается с точностью $L\delta$ траекторией некоторой точки $x \in M$. Можно считать, что $\text{dist}(x, y) < L\delta$. Из неравенства (5) и выбора δ следует, что $L\delta$ -окрестность точки y целиком лежит в S_{R_1, R_3} , откуда $x \in S_{R_1, R_3}$. Тогда

$$\varphi^k(x) \in \text{int } S_{R_2, R_3}, \quad k \geq 1, \quad (9)$$

поскольку включение (2) влечет положительную инвариантность множества $\text{int } S_{R_2, R_3}$. В то же время $z \in B_{R_4}$, значит $\varphi(z) \in B_{R_5}$ в силу (3). По предположению об отслеживании должно быть

$$\text{dist}(\varphi(z), \varphi^3(x)) < L\delta,$$

однако вместе с (9) это противоречит неравенству (6). Таким образом, построенная δ -траектория не отслеживается с точностью $L\delta$, что доказывает лемму, так как $\delta < d$ по неравенству (4).

ТЕОРЕМА 1. *Типичный гомеоморфизм не обладает свойством липшицева отслеживания.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем подмножество $G(L, d)$ пространства $Z(M)$, считая $\varphi \in G(L, d)$, если для некоторого натурального n гомеоморфизм φ^n удовлетворяет условиям леммы.

Очевидно, что при любых $L, d > 0$ множество $G(L, d)$ открыто. Докажем, что оно плотно в $Z(M)$.

Предположим сначала, что некоторый гомеоморфизм φ имеет неподвижную точку p . Покажем, что в любой окрестности φ найдется гомеоморфизм, удовлетворяющий условиям леммы.

Выберем достаточно малое $R > 0$ и будем изменять φ на множестве $B_R(p)$. Зафиксируем числа $R_1, \dots, R_5$ такие, что $R > R_1$ и выполняются неравенства (1) и (4)–(6). Пользуясь тем, что p – неподвижная точка φ , найдем r_1 такое, что

$$\varphi(B_{r_1}(p)) \subset \text{int } B_{R_2}(p).$$

Считая $r_1 < R_1$, найдем отображение, “сжимающее” шар $B_{R_1}(p)$ в $B_{r_1}(p)$, т.е. построим гомеоморфизм $\alpha: M \rightarrow M$ такой, что

$$\alpha|_{M \setminus B_R(p)} = \text{id}, \quad \alpha(p) = p, \quad \alpha(B_{R_1}(p)) = B_{r_1}(p).$$

Заменив при необходимости φ гомеоморфизмом $\varphi \circ \alpha$ (который мы снова будем обозначать через φ), добьемся справедливости включения

$$\varphi(B_{R_1}(p)) \subset \text{int } B_{R_2}(p).$$

Далее, $\varphi(S_{R_1, R_3}) \not\supset p$, так как $\varphi(p) = p$, а тогда в силу компактности множества S_{R_1, R_3} для некоторого $r_3 > 0$ будет

$$\varphi(S_{R_1, R_3}) \subset \text{int } S_{R_2, r_3}.$$

Если $r_3 \geq R_3$, то условие (2) выполняется. В противном случае построим гомеоморфизм $\beta: M \rightarrow M$ со свойствами

$$\beta|_{M \setminus B_{R_2}(p)} = \text{id}, \quad \beta(p) = p, \quad \beta(B_{r_3}(p)) = B_{R_3}(p).$$

Отображение β переводит S_{R_2, r_3} в S_{R_2, R_3} , поэтому для гомеоморфизма $\beta \circ \varphi$ верно включение (2).

Действуя аналогично, еще раз поменяем гомеоморфизм внутри шара $B_{R_3}(p)$ так, чтобы выполнялось включение (3). Полученный гомеоморфизм удовлетворяет условиям леммы и отличается от исходного лишь внутри $B_R(p)$. Если R достаточно мало, расстояние между новым и старым гомеоморфизмами также будет мало.

Итак, мы показали, что в любой окрестности гомеоморфизма, имеющего неподвижную точку, найдется гомеоморфизм из множества $G(L, d)$. Теперь найдем гомеоморфизм из $G(L, d)$ в произвольном открытом множестве $V \subset Z(M)$. В V найдется гомеоморфизм φ , у которого есть периодические точки. Это вытекает, например, из следующего факта: если x – неблуждающая точка системы φ , то существуют последовательности $x_k \in M$ и $\varphi_k \in Z(M)$, для которых $\varphi_k \rightarrow \varphi$, $x_k \rightarrow x$, причем x_k – периодическая точка φ_k (см. [1, теорема 1.4.1]). Пусть $\varphi^n(p) = p$. Изменяя φ в малых окрестностях точек p и $\varphi^{n-1}(p) = \varphi^{-1}(p)$ аналогично случаю неподвижной точки, можно построить гомеоморфизм $\psi \in V$, n -я степень которого удовлетворяет условиям леммы.

Итак, при любых $L, d > 0$ множество $G(L, d)$ открыто и всюду плотно. Зафиксируем последовательности $L_n \rightarrow \infty$ и $d_n \rightarrow 0$ и рассмотрим множество

$$G = \bigcap_{n \geq 0} G(L_n, d_n).$$

Очевидно, G – массивное множество. Покажем, что гомеоморфизмы из множества G не обладают свойством липшицева отслеживания. Предположим, что это не так, т.е. некоторый гомеоморфизм $\varphi \in G$ имеет липшицево отслеживание с константами L и d . Тогда любая степень φ имеет липшицево отслеживание с теми же константами (это легко проверяется непосредственно). Поэтому $\varphi \notin G(L_n, d_n)$ при $L_n > L, d_n < d$, а это противоречит включению $\varphi \in G$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2. *Типичный гомеоморфизм в $Z(M)$ не обладает свойством липшицева слабого отслеживания.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Несложно видеть, что гомеоморфизмы, описанные в лемме, не обладают свойством липшицева слабого отслеживания с константами L и d . Доказательство теоремы 1 не годится для случая слабого отслеживания лишь потому, что свойство слабого отслеживания для φ не влечет наличия этого свойства у φ^n . Мы покажем, однако, что если $\Phi = \varphi^n$ обладает описанными в лемме свойствами, причем для некоторых $R' > R_1$ и $R'' \in (R_3, R_4)$ выполнено включение

$$\Phi^{-1}(S_{R', R''}) \subset \text{int } S_{R', R''}, \quad (10)$$

то φ не имеет липшицева слабого отслеживания. Добавленное условие аналогично условиям леммы, поэтому рассуждение из теоремы 1 будет доказывать и теорему 2.

Предположим, что гомеоморфизм $\Phi = \varphi^n$ удовлетворяет условиям леммы, а также условию (10). Выберем настолько малое $R > 0$, что

$$\bigcup_{0 < k < n} \varphi^k(B_R(p)) \cap B_R(p) = \emptyset. \quad (11)$$

Будем считать, что $R > R'$. Как и раньше, определим δ равенством (7). Построим для системы φ δ -траекторию вида

$$\dots, \varphi^{-1}(y), y, \varphi(y), \dots, \varphi^{n-1}(y), z, \varphi(z), \varphi^2(z), \dots,$$

по-прежнему выбрав точку y так, чтобы выполнялось (8), а $z \in B_{R_4}(p)$ так, чтобы было верно неравенство $\text{dist}(\varphi^{n-1}(y), z) < \delta$.

Допустим, что построенная δ -траектория слабо отслеживается с точностью $L\delta$ некоторой траекторией $O(x)$ системы φ . Тогда в $L\delta$ -окрестности точки y , которая по неравенству (4) и выбору y (8) целиком лежит в S_{R_1, R_3} , найдется хотя бы одна точка траектории $O(x)$. Можно считать, что $x \in S_{R_1, R_3}$. Мы придем к противоречию, показав, что

$$\text{dist}(O(x), \varphi^n(z)) > L\delta.$$

Поскольку (2) верно для Φ , при положительных k кратных n выполняется включение $\varphi^k(x) \in S_{R_2, R_3}$. Из неравенства (5) следует, что

$$\text{dist}(\varphi^k(x), \varphi^n(z)) > L\delta, \quad (12)$$

так как $\varphi^n(z) \in B_{R_5}(p)$. Если же k не делится на n , то неравенство (12) сразу вытекает из (11).

При отрицательных k точки $\varphi^k(x)$ также не могут лежать в $L\delta$ -окрестности точки $\varphi^n(z)$. Если k не делится на n , это следует из (11), а при отрицательных k кратных n имеем $\varphi^k(x) \in S_{R', R''}$ в силу (10). Теорема доказана.

Я благодарю своего научного руководителя С. Ю. Пилюгина за постановку задачи.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Pilyugin S. Yu. The Space of Dynamical Systems with the C^0 -Topology. Lecture Notes in Math. V. 1571. Berlin–Heidelberg: Springer, 1994.
2. Corless R., Pilyugin S. Yu. // J. Math. Anal. Appl. 1995. V. 189. P. 409–423.
3. Odani K. // Proc. Amer. Math. Soc. 1990. V. 110. P. 281–284.
4. Pilyugin S. Yu., Plamenevskaya O. B. Shadowing is generic // Topology Appl. (to appear).