Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. Р. Акопян, Оптимальное восстановление аналитической функции по заданным с погрешностью граничным значениям, *Матем. заметки*, 2016, том 99, выпуск 2, 163–170

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10741>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 06:42:04

Оптимальное восстановление аналитической функции по заданным с погрешностью граничным значениям

Р. Р. Акопян

Решена задача оптимального восстановления аналитической функции по ее значениям на части границы, заданным с погрешностью, и родственные экстремальные задачи.

Библиография: 18 названий.

DOI: 10.4213/mzm10741

1. Пусть G – односвязная ограниченная область комплексной плоскости с границей Γ , являющейся замкнутой жордановой спрямляемой кривой. Через γ обозначим произвольное измеримое по Лебегу подмножество кривой Γ , имеющее положительную меру.

Рассмотрим пространство Харди $H(G)$ функций, аналитических и ограниченных на области G с нормой

$$\|f\|_{H(G)} = \sup\{|f(z)| : z \in G\}.$$

Известно (см., например, [1; гл. III, § 1, п. 1.7]), что для произвольной функции f из пространства $H(G)$ почти всюду на Γ существуют некасательные предельные граничные значения, которые составляют функцию (которую также обозначим f) из пространства $L^\infty(\Gamma)$; при этом имеет место равенство

$$\|f\|_{H(G)} = \|f\|_{L^\infty(\Gamma)}.$$

В пространстве $H(G)$ выделим класс Q функций, удовлетворяющих условию

$$\|f\|_{L^\infty(\Gamma \setminus \gamma)} \leq 1.$$

Обозначим через Υ_z функционал, определенный на подпространстве $L^\infty(\gamma)$ функций, являющихся граничными значениями на γ функций пространства $H(G)$, и ставящий в соответствие граничным значениям аналитической функции на γ ее значение в точке z области G , т.е. задаваемый равенством

$$\Upsilon_z f = f(z).$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 15-01-02705) и Программы государственной поддержки ведущих университетов РФ (соглашение № 02.А03.21.0006 от 27.08.2013).

В настоящей работе на классе Q рассматриваются несколько взаимосвязанных экстремальных задач для функционала Υ_z .

Функцию вещественного переменного $\delta \in [0, \infty)$, определяемую равенством

$$\omega(\delta) = \omega(\delta; \Upsilon_z, Q) = \sup\{|f(z)| : f \in Q, \|f\|_{L^\infty(\gamma)} \leq \delta\}, \quad (1.1)$$

называют *модулем непрерывности* функционала Υ_z на классе Q . Помимо значений величины $\omega(\delta)$ интерес представляет экстремальная функция, на которой в (1.1) достигается верхняя грань.

Через $\Omega(\delta, \Delta) = \Omega(\delta, \Delta; \Upsilon_z)$ обозначим неотрицательную функцию двух неотрицательных переменных δ и Δ , определяемую равенством

$$\Omega(\delta, \Delta) = \Omega(\delta, \Delta; \Upsilon_z) = \sup\{|f(z)| : \|f\|_{L^\infty(\gamma)} \leq \delta, \|f\|_{L^\infty(\Gamma \setminus \gamma)} \leq \Delta\}. \quad (1.2)$$

Довольно очевидно, что имеют место соотношения

$$\omega(\delta) = \Omega(\delta, 1), \quad \delta \geq 0, \quad \Omega(\delta, \Delta) = \Delta \omega\left(\frac{\delta}{\Delta}\right), \quad \delta \geq 0, \quad \Delta > 0,$$

так что задачи о вычислении величин (1.1) и (1.2) эквивалентны. Из определения (1.2) следует, что для функций пространства $H(G)$ справедливо точное неравенство

$$|f(z)| \leq \Omega(\|f\|_{L^\infty(\gamma)}, \|f\|_{L^\infty(\Gamma \setminus \gamma)}).$$

В дальнейших рассуждениях будет существенно использоваться гармоническая мера подмножеств границы области; напомним ее определение (см., например, [2; гл. VIII, § 4]). Пусть $u(\zeta) = u(\zeta, \gamma, G)$, $\zeta \in G$, есть гармоническая в области G функция, имеющая почти всюду на γ граничные значения, равные единице, и на $\Gamma \setminus \gamma$ – равные нулю. Значение $u(z, \gamma, G)$ этой функции в точке $z \in G$ как раз и называется *гармонической мерой* множества γ относительно точки z и области G . Для гармонической меры справедливо представление

$$u(z, \gamma, G) = \int_{\gamma} P_G(\zeta, z) ds,$$

в котором $P_G(\cdot, z)$ – ядро Пуассона области G для точки z .

Обозначим через $\phi = \phi[G, \gamma]$ функцию, определяемую равенством

$$\phi(z) = \exp(u(z) + i v(z)), \quad (1.3)$$

где $u(z) = u(z, \gamma, G)$ – гармоническая мера γ относительно точки z и множества G , а v – гармонически сопряженная к u функция в области G . Ясно, что для произвольного вещественного σ функция

$$\phi^\sigma(z) = \exp(\sigma(u(z) + i v(z)))$$

также является аналитической и ограниченной, т.е. $\phi^\sigma \in H(G)$. Более того,

$$|\phi^\sigma(\zeta)| = \exp(\sigma u(\zeta)) = 1, \quad \zeta \in \Gamma \setminus \gamma.$$

Следовательно, для произвольного вещественного σ функция ϕ^σ принадлежит классу Q .

Решение задач (1.1) и (1.2) легко следует из известного результата Ф. и Р. Неванлинна [3] (см. также [2; гл. VIII, § 4, теорема 1]) и приведено в следующей теореме.

ТЕОРЕМА А. Для функций ω и Ω , определенных соотношениями (1.1) и (1.2), справедливы равенства

$$\omega(\delta) = \delta^\alpha, \quad \Omega(\delta, \Delta) = \delta^\alpha \Delta^{1-\alpha}, \quad \alpha = u(z, \gamma, G). \quad (1.4)$$

При этом верхняя грань в (1.1) достигается на функции ϕ^σ , $\sigma = \ln \delta$, а в (1.2) – на функции $\Delta \phi^\sigma$ при $\sigma = \ln(\delta/\Delta)$.

2. На классе функций Q рассмотрим две взаимосвязанные экстремальные задачи. Первой является задача оптимального восстановления значения аналитической функции в конкретной точке z области. Пусть для неизвестной функции f из класса Q задана функция $q \in L^\infty(\gamma)$ такая, что $\|f - q\|_{L^\infty(\gamma)} \leq \delta$. Иными словами, заданы граничные значения функции f с погрешностью δ на части границы γ . Мы хотим наилучшим (оптимальным) способом восстановить по q значение $f(z)$. В качестве множества методов восстановления $\mathcal{R}$, из которых выбирается оптимальный, будем рассматривать $\mathcal{O}$ – множество всех возможных, или $\mathcal{L}$ – множество линейных, функционалов на $L^\infty(\gamma)$. Точная постановка задачи следующая. Для числа $\delta \geq 0$ и метода восстановления $T \in \mathcal{R}$ определим величину погрешности метода формулой

$$\mathcal{U}(T, \delta) = \sup\{|f(z) - Tq| : f \in Q, q \in L^\infty(\gamma), \|f - q\|_{L^\infty(\gamma)} \leq \delta\}. \quad (2.1)$$

Тогда

$$\mathcal{E}_{\mathcal{R}}(\delta) = \inf\{\mathcal{U}(T, \delta) : T \in \mathcal{R}\} \quad (2.2)$$

есть величина оптимального восстановления аналитической функции в точке z (или, что то же самое, оптимального восстановления функционала Υ_z) с помощью методов восстановления $\mathcal{R}$ на функциях класса Q по их граничным значениям на γ , заданным с ошибкой δ . Задача состоит в вычислении величины $\mathcal{E}(\delta)$ и определении оптимального метода восстановления – функционала, на котором в (2.2) достигается нижняя грань.

Задача (2.2) есть частный случай задачи оптимального восстановления операторов на классе элементов банахова пространства по неполной и/или неточной информации. Общие результаты в этой тематике и дальнейшие ссылки можно найти в [4]–[9]. Результаты, связанные с задачами оптимального восстановления на классах аналитических функций, можно найти в монографии [9].

Известно (см. [6], [8]–[11] и приведенную там библиографию), что в задаче оптимального восстановления линейного функционала на выпуклом центрально симметричном классе с помощью множества $\mathcal{O}$ всех возможных функционалов существует оптимальный линейный метод и сама величина оптимального восстановления равна модулю непрерывности восстанавливаемого функционала. Следовательно, с учетом теоремы А справедливы равенства

$$\mathcal{E}_{\mathcal{O}}(\delta) = \mathcal{E}_{\mathcal{L}}(\delta) = \omega(\delta) = \delta^\alpha. \quad (2.3)$$

Вторая рассматриваемая в работе задача – это задача наилучшего приближения функционала Υ_z линейными ограниченными функционалами. Точная постановка задачи такова. Пусть $\mathcal{L}(N)$ – множество линейных ограниченных функционалов в $L^\infty(\gamma)$, норма которых не превосходит числа $N \geq 0$. Величина

$$U(T) = \sup\{|f(z) - Tf| : f \in Q\} \quad (2.4)$$

является уклонением функционала $T \in \mathcal{L}(N)$ от функционала Υ_z на классе Q . Соответственно, величина

$$E(N) = \inf\{U(T) : T \in \mathcal{L}(N)\} \quad (2.5)$$

есть наилучшее приближение функционала Υ_z множеством линейных ограниченных функционалов $\mathcal{L}(N)$ на классе Q . Задача состоит в том, чтобы вычислить величину $E(N)$ и найти экстремальный функционал, на котором в (2.5) достигается нижняя грань.

Задача (2.5) является частным случаем задачи Стечкина приближения неограниченного оператора линейными ограниченными на классе элементов банахова пространства. Исследования этой задачи начались в 1965–67 гг. с работ Стечкина [12], [13] и имеют богатую историю (см. работы [4], [6], [8] и приведенную в них библиографию). Наиболее полно исследована задача наилучшего приближения неограниченного функционала и взаимосвязь с задачей его оптимального восстановления (см. работы [6], [8]–[11] и библиографию там).

В частности, для задач (2.2) и (2.5) эта взаимосвязь выражается в следующем соотношении:

$$E(N) = \inf\{\omega(\delta) - \delta N : \delta \in [0, \infty)\} = \inf\{\delta^\alpha - \delta N : \delta \in [0, \infty)\}$$

и, следовательно,

$$E(N) = \beta \alpha^{\alpha/\beta} N^{-\alpha/\beta}, \quad \beta = 1 - \alpha, \quad \alpha = u(z, \gamma, G). \quad (2.6)$$

Таким образом, к настоящему моменту величины $\mathcal{E}_O(\delta)$, $\mathcal{E}_L(\delta)$, $E(N)$ известны. Для решения задач (2.2) и (2.5) остается найти экстремальные функционалы.

3. Так как множество γ имеет положительную меру, то оно является множеством единственности (см., например, [2; гл. X, § 2]) для функций пространства $H(G)$. Метод восстановления функции $f \in H(G)$ по ее (точным) граничным значениям на γ дает формула Карлемана–Голузина–Крылова [14] (см. также [15])

$$f(z) = \lim_{\sigma \rightarrow -\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \left(\frac{\varphi(z)}{\varphi(\zeta)} \right)^{\sigma} d\zeta \quad \text{для всех } z \in G, \quad (3.1)$$

где φ – произвольная функция из $H(G)$, удовлетворяющая условиям

$$|\varphi(\zeta)| = 1, \quad \zeta \in \Gamma \setminus \gamma, \quad |\varphi(z)| > 1, \quad z \in G.$$

В качестве функции φ в формуле (3.1) может выступать и функция (1.3).

В случае, когда граничные значения функции на γ заданы с погрешностью, задача восстановления значения в точке z (аналитического продолжения с части границы области) является некорректной. При определенных условиях на множество G , его границу и множество γ эта задача исследовалась Лаврентьевым [16; гл. II, § 1, пп. 4, 5] (см. также [15; гл. I, § 2]). Предложенные методы регуляризации имеют в качестве ядра введенные и названные им функции Карлемана, являющиеся по сути аппроксимациями ядра Коши. Примером такого регуляризующего метода является конструкция, основанная на формуле Карлемана–Голузина–Крылова. Регуляризующий метод (метод восстановления) R_{σ} здесь имеет следующий вид:

$$(R_{\sigma}q)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{q(\zeta)}{\zeta - z} \left(\frac{\phi(z)}{\phi(\zeta)} \right)^{\sigma} d\zeta. \quad (3.2)$$

Применив приведенные ниже рассуждения к методу (3.2), можно показать, что этот метод, при выборе параметра регуляризации $\sigma = \ln \delta$, является по порядку оптимальным в задаче (2.2); точнее справедливо равенство

$$\mathcal{U}(R_\sigma, \delta) = c(z)\delta^\alpha, \quad \alpha = u(z, \gamma, G).$$

Множитель $c(z)$ удовлетворяет соотношению $c(z) \geq \int_\gamma |z - \zeta|^{-1} ds$ и потому неограничен в области G .

4. Нашей целью является построение наилучшего (оптимального) метода. Рассмотрим функционал T_σ на $L^\infty(\gamma)$, определяемый равенством

$$(T_\sigma q)(z) = \int_\gamma P_G(\zeta, z) \left(\frac{\phi(z)}{\phi(\zeta)} \right)^\sigma q(\zeta) ds, \quad (4.1)$$

где $P_G(\cdot, z)$ – ядро Пуассона области G для точки z , а функция ϕ определена соотношением (1.3). Вычислим для функционала T_σ , заданного равенством (4.1), его норму и уклонение (2.4).

ЛЕММА 1. Для функционала (4.1) при $\sigma = \ln \delta$ имеют место равенства

$$\|T_\sigma\| = \alpha\delta^{-\beta}, \quad U(T_\sigma) = \beta\delta^\alpha. \quad (4.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что $\phi^\sigma \in Q \subset H(G)$ для всех $\sigma \in \mathbb{R}$, а при выборе $\sigma = \ln \delta$ для граничных значений имеют место равенства

$$|\phi^\sigma(\zeta)| = \begin{cases} \delta, & \zeta \in \gamma, \\ 1, & \zeta \in \Gamma \setminus \gamma, \end{cases} \quad |\phi^\sigma(z)| = \delta^\alpha, \quad \alpha = u(z, \gamma, G).$$

В силу неотрицательности ядра Пуассона P_G для нормы T_σ имеем оценку сверху

$$\begin{aligned} \|T_\sigma\| &= \sup \left\{ \left| \int_\gamma P_G(\zeta, z) \left(\frac{\phi(z)}{\phi(\zeta)} \right)^\sigma q(\zeta) ds \right| : q \in L^\infty(\gamma), \|q\|_{L^\infty(\gamma)} \leq 1 \right\} \\ &\leq \int_\gamma P_G(\zeta, z) ds |\phi^\sigma(z)| \delta^{-1} = \alpha\delta^{\alpha-1} = \alpha\delta^{-\beta}. \end{aligned}$$

С другой стороны, рассматривая в качестве q граничные значения на γ функции $\delta^{-1}\phi^\sigma$, получаем оценку снизу

$$\|T_\sigma\| \geq \left| \int_\gamma P_G(\zeta, z) \left(\frac{\phi(z)}{\phi(\zeta)} \right)^\sigma \delta^{-1}\phi^\sigma(\zeta) ds \right| = \int_\gamma P_G(\zeta, z) ds |\phi^\sigma(z)| \delta^{-1} = \alpha\delta^{\alpha-1} = \alpha\delta^{-\beta}.$$

Таким образом, действительно, $\|T_\sigma\| = \alpha\delta^{-\beta}$.

Теперь вычислим уклонение (2.4) для оператора T_σ . Применяя формулу Пуассона для аналитической и ограниченной в области G функции f/ϕ^σ , имеем равенство

$$\frac{f(z)}{\phi^\sigma(z)} = \int_\Gamma P_G(\zeta, z) \frac{f(\zeta)}{\phi^\sigma(\zeta)} ds.$$

Отсюда получим представление уклонения (2.4) для функционала T_σ :

$$\begin{aligned} U(T_\sigma) &= \sup \left\{ \left| f(z) - \int_\gamma P_G(\zeta, z) \left(\frac{\phi(z)}{\phi(\zeta)} \right)^\sigma f(\zeta) ds \right| : f \in Q \right\} \\ &= \sup \left\{ \left| \int_{\Gamma \setminus \gamma} P_G(\zeta, z) \left(\frac{\phi(z)}{\phi(\zeta)} \right)^\sigma f(\zeta) ds \right| : f \in Q \right\}. \end{aligned}$$

Это представление влечет оценку

$$U(T_\sigma) \leq \int_{\Gamma \setminus \gamma} P_G(\zeta, z) ds |\phi^\sigma(z)| = \beta \delta^\alpha.$$

Для оценки уклонения снизу рассмотрим в качестве f функцию ϕ^σ ; как уже было сказано выше, она принадлежит классу Q . В результате получаем соотношение

$$U(T_\sigma) \geq \left| \int_{\Gamma \setminus \gamma} P_G(\zeta, z) \left(\frac{\phi(z)}{\phi(\zeta)} \right)^\sigma \phi^\sigma(\zeta) ds \right| = \int_{\Gamma \setminus \gamma} P_G(\zeta, z) ds |\phi^\sigma(z)| = \beta \delta^\alpha.$$

Тем самым доказано, что $U(T_\sigma) = \beta \delta^\alpha$. Лемма 1 доказана.

Для произвольного $N > 0$ выберем δ так, чтобы $N = \alpha \delta^{-\beta}$. В силу (4.2) имеем для уклонения $U(T_\sigma)$ выражение

$$U(T_\sigma) = \beta \alpha^{\alpha/\beta} N^{-\alpha/\beta}. \quad (4.3)$$

Объединяя вместе равенства (2.6) и (4.3), получим следующее утверждение о задаче наилучшего приближения функционала (2.5).

ТЕОРЕМА 1. *Для произвольного $N > 0$ справедливо равенство*

$$E(N) = \beta \alpha^{\alpha/\beta} N^{-\alpha/\beta}.$$

При этом функционалом наилучшего приближения является функционал T_σ , определяемый соотношением (4.1) с параметром σ , задаваемым равенством

$$\sigma = -\frac{1}{\beta} \ln \frac{N}{\alpha}.$$

5. Полученные только что результаты позволяют выписать решение задачи (2.2). Вычислим вначале величину погрешности (2.1) для метода T_σ .

ЛЕММА 2. *Для функционала, определяемого соотношением (4.1), при $\sigma = \ln \delta$ имеет место равенство*

$$\mathcal{U}(T_\sigma, \delta) = \delta^\alpha. \quad (5.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценку сверху уклонения $\mathcal{U}(T_\sigma, \delta)$ получим, используя лемму 1. Имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(T_\sigma, \delta) &= \sup \{ |f(z) - T_\sigma q| : f \in Q, q \in L^\infty(\gamma), \|f - q\|_{L^\infty(\gamma)} \leq \delta \} \\ &\leq \sup \{ |f(z) - T_\sigma f| : f \in Q \} \\ &\quad + \sup \{ |T_\sigma(f - q)| : f \in Q, q \in L^\infty(\gamma), \|f - q\|_{L^\infty(\gamma)} \leq \delta \} \\ &\leq U(T_\sigma) + \|T_\sigma\| \delta = \beta \delta^\alpha + \alpha \delta^{-\beta} \cdot \delta = \delta^\alpha. \end{aligned}$$

Выбор $q \equiv 0$ и $f = \phi^\sigma$ дает оценку уклонения снизу

$$\mathcal{U}(T_\sigma, \delta) \geq |\phi^\sigma(z)| = \delta^\alpha.$$

Лемма 2 доказана.

Равенства (2.3) и (5.1) позволяют сформулировать следующее утверждение о задаче оптимального восстановления (2.2).

ТЕОРЕМА 2. Для произвольного $\delta > 0$ справедливо равенство

$$\mathcal{E}_O(\delta) = \mathcal{E}_L(\delta) = \omega(\delta) = \delta^\alpha.$$

При этом оптимальным методом восстановления является метод T_σ , определяемый соотношением (4.1) с параметром σ , задаваемым равенством

$$\sigma = \ln \delta.$$

6. В заключение отметим, что наложенные в данной статье требования на область не являются необходимыми для справедливости утверждений теорем 1 и 2. Так в работе [17] получены аналоги теорем 1 и 2 в случае когда G – полоса, γ – одна из граничных прямых. В работе [18] аналогичные результаты получены в случае когда G есть кольцо, γ – одна из граничных окружностей и параметр δ равен целой степени отношения радиусов граничных окружностей.

Автор выражает благодарность В. В. Арестову и Н. Ю. Антонову за полезные обсуждения результатов работы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] И. И. Привалов, *Граничные свойства аналитических функций*, ГИТТЛ, М.–Л., 1950.
- [2] Г. М. Голузин, *Геометрическая теория функций комплексного переменного*, Гостехиздат, М.–Л., 1952.
- [3] F. Nevanlinna, R. Nevanlinna, “Über die Eigenschaften einer analytischen Funktionen in der Umgebung einer singularen Stille oder Linie”, *Acta Soc. Sc. Fennicae*, **50**:5 (1922), 1–46.
- [4] В. В. Арестов, “О равномерной регуляризации задачи вычисления значений оператора”, *Матем. заметки*, **22**:2 (1977), 231–244.
- [5] C. A. Micchelli, T. J. Rivlin, “A survey of optimal recovery”, *Optimal Estimation in Approximation Theory*, Plenum Press, New York, 1977, 1–54.
- [6] В. В. Арестов, “Наилучшее восстановление операторов и родственные задачи”, *Сборник трудов Всесоюзной школы по теории функций* (Душанбе, август 1986 г.), Тр. МИАН СССР, **189**, Наука, М., 1989, 3–20.
- [7] В. В. Арестов, В. Н. Габушин, “Наилучшее приближение неограниченных операторов ограниченными”, *Изв. вузов. Матем.*, 1995, № 11, 42–68.
- [8] В. В. Арестов, “Приближение неограниченных операторов ограниченными и родственные экстремальные задачи”, *УМН*, **51**:6 (1996), 89–124.
- [9] K. Yu. Osipenko, *Optimal Recovery of Analytic Functions*, NJVA Science Publ., Huntington, 2000.
- [10] В. Н. Габушин, “Наилучшее приближение функционалов на некоторых множествах”, *Матем. заметки*, **8**:5 (1970), 551–562.
- [11] Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко, “Об оптимальном восстановлении функционалов по неточным данным”, *Матем. заметки*, **50**:6 (1991), 85–93.

- [12] С. Б. Стечкин, “Неравенства между нормами производных произвольной функции”, *Acta Sci. Math.*, **26**:3-4 (1965), 225–230.
- [13] С. Б. Стечкин, “Наилучшее приближение линейных операторов”, *Матем. заметки*, **1**:2 (1967), 137–148.
- [14] Г. М. Голузин, В. И. Крылов, “Обобщенная формула Carleman’a и приложение ее к аналитическому продолжению функций”, *Матем. сб.*, **40**:2 (1933), 144–149.
- [15] Л. А. Айзенберг, *Формулы Карлемана в комплексном анализе. Первые приложения*, Наука, Новосибирск, 1990.
- [16] М. М. Лаврентьев, В. Г. Романов, С. П. Шипатский, *Некорректные задачи математической физики и анализа*, Наука, М., 1980.
- [17] Р. Р. Акопян, “Наилучшее приближение оператора аналитического продолжения на классе аналитических в полосе функций”, *Тр. ИММ УрО РАН*, **17**, 2011, 46–54.
- [18] Р. Р. Акопян, “Наилучшее приближение оператора аналитического продолжения на классе аналитических в кольце функций”, *Тр. ИММ УрО РАН*, **18**, 2012, 3–13.

Р. Р. Акопян

Поступило

Озёрский технологический институт (филиал
Национального исследовательского ядерного
университета «МИФИ»);

02.02.2015

Институт математики и компьютерных наук,
Уральский федеральный университет,
г. Екатеринбург

E-mail: RRAkopyan@mephi.ru