Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. Ч. Кулаев, К вопросу об осцилляционности функции Грина разрывной краевой задачи четвертого порядка, *Матем. заметки*, 2016, том 100, выпуск 3, 375–387

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10744>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 17:13:01

К вопросу об осцилляционности функции Грина разрывной краевой задачи четвертого порядка

Р. Ч. Кулаев

Работа посвящена изучению условий осцилляционности функции Грина многогодовой краевой задачи для уравнения четвертого порядка, описывающей малые деформации стержня, скрепленного со сплошным упругим основанием и, кроме того, имеющего в отдельных точках “сосредоточенные” упругие опоры. Показано, что условие положительности функции Грина является необходимым и достаточным для того, чтобы функции Грина обладала осцилляционными свойствами.

Библиография: 24 названия.

Ключевые слова: краевая задача четвертого порядка, функция Грина, осцилляционность, осцилляционная теорема, знакорегулярность.

DOI: 10.4213/mzm10744

В настоящей работе рассматривается разрывная краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка, являющаяся моделью стержневой конструкции. Изучается вопрос об осцилляционности соответствующей функции Грина. Напомним, что непрерывная на квадрате $[a, b] \times [a, b]$ функция $G(x, s)$ называется *осцилляционным* (по Гантмахеру–Крейну) ядром [1; гл. 3, § 6] интегрального оператора

$$(Gu)(x) = \int_a^b G(x, s)u(s) d\mu(s), \quad (0.1)$$

если при всех $j = 1, 2, 3, \dots$ выполнены условия

$$G(x, s) > 0, \quad a < x, \quad s < b, \quad G \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_j \\ s_1 & \dots & s_j \end{pmatrix} \geq 0, \quad \begin{matrix} a < x_1 < \dots < x_j < b, \\ a < s_1 < \dots < s_j < b. \end{matrix} \quad (0.2)$$

$$G \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_j \\ x_1 & \dots & x_j \end{pmatrix} > 0, \quad a < x_1 < \dots < x_j < b, \quad (0.3)$$

где через

$$G \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_j \\ s_1 & \dots & s_j \end{pmatrix}$$

обозначены определители $\det \|G(x_i, s_k)\|_{i,k=1}^j$, называемые *ассоциированными ядрами* функции $G(x, s)$.

Свойство осцилляционности функции Грина примечательно тем, что оно обеспечивает соответствующей краевой задаче комплекс замечательных спектральных свойств, характерных для классической задачи Штурма–Лиувилля и называемых осцилляционными.

Математическая основа осцилляционных свойств малых гармонических колебаний одномерных механических систем (струн, стержней, многопролетных балок, крутильных колебаний валов и др.) была заложена в работах Келлога [2], [3] и Гантмахера с Крейном (см. [1] и библиографию там же). Разнообразные аспекты, связанные с осцилляционностью и знакорегулярностью, рассматривались в [4]–[6]. В [7] результаты Гантмахера и Крейна были обобщены и дополнены, а также была описана общая схема применения теории к обоснованию осцилляционных свойств функций Грина двухточечных краевых задач. Однако общие методы этой теории оказались малоэффективными для многоточечных задач. Для подобных задач была разработана модификация результатов Келлога–Крейна, которая позволила установить теоремы осцилляционного типа для некоторых классов многоточечных и неклассических краевых задач (см. [8]–[11] и библиографию в них). В частности, удалось обосновать осцилляционность функции Грина краевой задачи, моделирующей малые деформации растянутой цепочки шарнирно сочлененных стержней [12].

В центре внимания настоящей работы модель конструкции растянутой цепочки из жестко соединенных стержней, скрепленной со сплошным упругим основанием и, кроме того, имеющей в отдельных точках “сосредоточенные” упругие опоры. Известно (см. [1]), что если упругие основание и опоры отсутствуют, то функция Грина является осцилляционной. Если же жесткость упругого основания или отдельных упругих опор достаточно велика, то функция Грина является знакопеременной и поэтому вопрос об условиях ее осцилляционности является нетривиальным.

В работе [13] показано, что в частном случае – когда сплошное упругое основание отсутствует, а имеются только “сосредоточенные” упругие опоры – условия осцилляционности функции Грина эквивалентны условиям ее положительности. В данной статье будет показано, что этот результат сохраняет силу и в общем случае.

1. Постановка задачи и формулировка основного результата. Имеется несколько различных подходов к рассматриваемым в данной работе вопросам. Наиболее типичными из них являются функционально-аналитический и синтетический подходы. В конструкциях, опирающихся на функционально-аналитические методы, разрывной краевой задаче отвечает оператор, определяющий двухточечную краевую задачу для уравнения с обобщенными коэффициентами (см., например, [14]–[16]). При синтетическом подходе вся система дифференциальных соотношений – обыкновенное дифференциальное уравнение плюс условия согласования во внутренних точках отрезка – рассматривается как единое целое и имеет поточечный смысл, что сужает класс рассматриваемых задач, но позволяет изучать такие качественные свойства решений, как распределение нулей, экстремумов и т.п. (см. [13], [17], [18]). В данной работе мы придерживаемся синтетического взгляда.

Обозначим через Γ интервал $(a, b) \in \mathbb{R}$ с фиксированным конечным набором точек

$$a = a_0 < a_1 < \dots < a_n < a_{n+1} = b.$$

Через $C[\Gamma]$ обозначим пространство функций, равномерно непрерывных на каждом из интервалов (a_{i-1}, a_i) , $1 \leq i \leq n+1$. Для функций из $C[\Gamma]$ в каждой точке

$\xi \in [a, b]$ заведомо существуют пределы $u(\xi \pm 0)$ (при $\xi = a$ или $\xi = b$ имеет смысл, естественно, только один из этих пределов). *Простым скачком* функции $u(x) \in C[\Gamma]$ в точке $\xi \in \Gamma$ назовем величину

$$\Delta u(\xi) = u(\xi + 0) - u(\xi - 0).$$

Кроме того, для функции $u(x) \in C[\Gamma]$ полагаем $u(a) = u(a+0)$ и $u(b) = u(b-0)$. Через $C^k[\Gamma]$ обозначим пространство функций из $C[\Gamma]$, имеющих k производных, также принадлежащих $C[\Gamma]$. Пространства $C^k[\Gamma]$ допускают естественную нормировку

$$\|u\|_k = \sum_{j=0}^k \sup_{x \in \Gamma} |u^{(j)}(x)|.$$

Нами будет рассматриваться дифференциальное уравнение

$$Lu \equiv (p(x)u'')' - (q(x)u')' + h(x)u = f(x), \quad x \in \Gamma \setminus \{a_i\}_{i=1}^n, \quad (1.1)$$

с коэффициентами $p(x) \in C^2[\Gamma]$, $\inf_{x \in \Gamma} p(x) > 0$, $q(x) \in C^1[\Gamma]$, $q(x) \geq 0$ на Γ , $h(x) \in C[\Gamma]$, $h(x) \geq 0$ на Γ , $f(x) \in C[\Gamma]$, дополненное в точках a_i , $i = 1, \dots, n$, условиями согласования

$$\Delta u(a_i) = 0, \quad \Delta u'(a_i) = 0, \quad \Delta(pu'')(a_i) = 0, \quad (1.2)$$

$$\Delta D^3 u(a_i) + \delta(a_i)u(a_i) = f(a_i), \quad (1.3)$$

где через $D^3 u$ в (1.3) обозначена третья квазипроизводная $(p(x)u'')' - q(x)u'$, а $\delta(a_i)$ и $f(a_i)$ – заданные числа, причем $\delta(a_i) \geq 0$ для всех $i = 1, \dots, n$.

Мы смотрим на систему соотношений (1.1)–(1.3) как на единый объект

$$Lu = F(x), \quad x \in \Gamma, \quad (1.4)$$

левая часть Lu которого – это левая часть уравнения (1.1) вместе с равенствами (1.2) и левой частью условия (1.3), а правая часть – это правая часть (1.1) при $x \in \Gamma$ и правая часть (1.3) при $x = a_i$, $i = 1, \dots, n$.

Решением дифференциального уравнения (1.4) будем называть всякую функцию $u(x) \in C^4[\Gamma]$, удовлетворяющую обыкновенному дифференциальному уравнению (1.1), а в точках a_i – условиям (1.2), (1.3). Тогда краевая задача для уравнения (1.4) – это система (1.1)–(1.3) вместе с какими-нибудь граничными условиями.

В данной работе мы будем рассматривать граничные условия вида

$$\begin{aligned} u(a) + \alpha(a)D^3 u(a) &= 0, & \vartheta(a)u'(a) - \beta(a)u''(a) &= 0, \\ u(b) - \alpha(b)D^3 u(b) &= 0, & \vartheta(b)u'(b) + \beta(b)u''(b) &= 0, \end{aligned} \quad (1.5)$$

в которых $\alpha(\cdot)$, $\vartheta(\cdot)$ и $\beta(\cdot)$ – неотрицательные числа, причем $\vartheta(\cdot) + \beta(\cdot) \neq 0$.

Задача (1.4), (1.5) описывает малые упругие деформации стержня, скрепленного со сплошным упругим основанием и имеющего в отдельных точках “сосредоточенные” упругие опоры. При этом коэффициенты $p(x)$ и $q(x)$ задают, соответственно, реакцию стержня на изгиб и растяжение, коэффициент $h(x)$ – плотность распределения упругой среды, а числа $\delta(a_i)$ – жесткость упругой опоры в точке a_i . Функция $f(x)$ в правой части уравнения (1.1) определяет плотность распределения внешней нагрузки, а величины $f(a_i)$ в условиях (1.2) задают сосредоточенные внешние

силы, приложенные в точках a_i , $i = 1, \dots, n$. Что касается граничных условий, то они охватывают все известные случаи закрепления концов стержня. Как уже отмечалось выше, нас интересует вопрос об условиях осцилляционности функции Грина краевой задачи (1.4), (1.5).

Отметим частные случаи краевой задачи (1.4), (1.5), изучавшиеся ранее. Все они относятся к случаю $h(x) \equiv 0$ с различными предположениями относительно значений $\delta(a_i)$. Так, в случае, когда все $\delta(a_i) = 0$, функция Грина обладает осцилляционными свойствами (см. [1] или [17]). Если же жесткости опор стремятся к бесконечности, то мы в пределе получаем так называемую “задачу о стержне с шарнирной опорой”, функция Грина которой меняет знак “в шахматном порядке” (эта задача и ее обобщения исследовались Азбелевым, Покорным, Дерром и Тептиным (см. работы [9]–[11] и библиографию в них)). В этом случае сама функция Грина не является осцилляционным ядром, но таковым будет ее частное с многочленом, имеющим простые нули в точках a_i . Промежуточный случай – когда $0 < \delta(a_i) < +\infty$ – изучен в работах [18], [13], в которых изучены условия положительности функции Грина и показано, что из положительности функции Грина следует ее осцилляционность. Поэтому содержательным для нас является случай, когда коэффициент $h(x)$ уравнения (1.1) не равен тождественно нулю.

Основной результат статьи формулируется следующим образом.

ТЕОРЕМА 1. *Положительности на $(a, b) \times (a, b)$ функции Грина краевой задачи (1.4), (1.5) достаточно для ее осцилляционности.*

Основная идея доказательства заключается в том, что мы сводим многоточечную краевую задачу (1.4), (1.5) к двухточечной краевой задаче для интегро-дифференциального уравнения и, используя непрерывную зависимость решений от коэффициентов уравнения вместе с результатом работы [13], совершаем предельный переход.

2. Предварительные сведения. В данном пункте мы приводим свойства решений однородного уравнения (1.4) и функции Грина краевой задачи (1.4), (1.5). Эти свойства установлены в работах [18] и [19] для частного случая – когда в уравнении (1.1) коэффициент $h(x)$ равен тождественно нулю. Однако они переносятся и на случай $h(x) \geq 0$. Мы приводим эти свойства без доказательств, поскольку они практически дословно повторяют рассуждения, проведенные в [18], [19]. Формулируя соответствующие утверждения, мы будем делать ссылки на работу, в которой аналогичный результат доказан для случая $h(x) \equiv 0$.

Прежде всего, отметим, что краевая задача (1.4), (1.5) однозначно разрешима и является самосопряженной; следовательно, соответствующая функция Грина $G(x, s)$ существует, непрерывна и симметрична $G(x, s) = G(s, x)$ [18].

ЛЕММА 1 [18]. *Пусть $u(x)$ – решение однородного уравнения (1.4), удовлетворяющее в точке $x = b$ соответствующим краевым условиям из (1.5). Если $u(x_0) = 0$, $x_0 \in (a, b)$, то $u'(x_0)u''(x_0) < 0$.*

Из леммы 1 и общих свойств функции Грина $G(x, s)$ краевой задачи (1.4), (1.5) (см. [18]) следует, что функция $G(\cdot, s)$ не имеет кратных нулей ни при каком $s \in (a, b)$. А отсюда, в свою очередь, следует локальная невырожденность интегрального оператора (0.1) в классе $\delta[a, b]$ линейных комбинаций δ -функций. Напомним (см. [8]), что интегральный оператор (0.1) с непрерывным ядром называется *локально невырожденным*, если для любой $u(x) \in \delta[a, b]$ выполнена импликация: из

$Gu(x) = 0$ на некотором интервале $(\xi, \eta) \subset [a, b]$ следует, что $u(x) = 0$ на этом промежутке (при этом полагают $G\delta(x-s) = G(x, s)$).

ЛЕММА 2 [19]. *Все решения краевой задачи для однородного уравнения (1.4) с условиями*

$$\begin{aligned} u(a) + \alpha(a)D^3u(a) &= B_1, & \vartheta(a)u'(a) - \beta(a)u''(a) &= B_2, \\ u(b) &= 0, & u'(b)u''(b) &\leq 0, \end{aligned}$$

где $B_1B_2 = 0$, $B_1 + B_2 = 1$, одновременно или положительны на (a, b) , или знакопеременные.

Обозначим через $u_a(x)$ решение однородного уравнения (1.4), удовлетворяющее краевым условиям

$$\begin{aligned} u(a) + \alpha(a)D^3u(a) &= B_1, & \vartheta(a)u'(a) - \beta(a)u''(a) &= B_2, \\ u(b) - \alpha(b)D^3u(b) &= 0, & \vartheta(b)u'(b) + \beta(b)u''(b) &= 0, \end{aligned}$$

правые части которых определяются по правилу: если $\alpha(a) = 0$, то $B_1 = 0$, $B_2 = 1$, а если $\alpha(a) > 0$, то $B_1 = 1$, $B_2 = 0$. Меняя в определении $u_a(x)$ ролями граничные точки a и b , получим функцию $u_b(x)$. Функции $u_a(x)$, $u_b(x)$ одновременно либо положительны на (a, b) , либо меняют знак [19].

В [19] показано, что функция Грина $G(x, s)$ краевой задачи (1.4), (1.5) положительна на $(a, b) \times (a, b)$ тогда и только тогда, когда $u_a(x) > 0$ на (a, b) . Кроме того, если в условиях (1.5) $\alpha(a) > 0$, то срезка $G(x, a)$ функции Грина краевой задачи (1.4), (1.5) пропорциональна функции $u_a(x)$ с положительным коэффициентом пропорциональности [23; § 6.2]. Поэтому справедлива

ЛЕММА 3. *Функция Грина $G(x, s)$ краевой задачи (1.4), (1.5) положительна на $(a, b) \times (a, b)$ тогда и только тогда, когда $u_a(x) > 0$ на (a, b) . При этом, если $u_a(x) > 0$ на $[a, b]$, то $G(x, s) > 0$ на $[a, b] \times [a, b]$.*

ТЕОРЕМА 2 [13]. *При $h(x) \equiv 0$ функция Грина краевой задачи (1.4), (1.5) является осцилляционным ядром тогда и только тогда, когда она положительна на $(a, b) \times (a, b)$.*

3. Вспомогательное интегро-дифференциальное уравнение. Результаты данного пункта носят вспомогательный характер. Здесь мы следуем идеям и методам, развитым в работах [20], [21] и подробно изложенным в монографии [22].

Пусть $BV[a, b]$ – пространство функций с ограниченным изменением, $AC[a, b]$ – пространство абсолютно непрерывных на $[a, b]$ функций. Для функции $u(x) \in BV[a, b]$ в каждой точке $\xi \in [a, b]$ существуют конечные пределы $u(\xi \pm 0)$ (при $\xi = a$ или $\xi = b$ полагаем $u(a-0) = u(a)$, $u(b+0) = u(b)$), что позволяет определить скачок $\Delta u(\xi) = u(\xi+0) - u(\xi-0)$.

Рассмотрим интегро-дифференциальное уравнение

$$D^3u(x) - D^3u(a) + \int_a^x u dH = F(x) - F(a). \quad (3.1)$$

В рассматриваемом уравнении, как обычно, полагаем

$$D^3u(x) = [(pu'')' - qu'](x),$$

а интеграл понимается в смысле Римана–Стилтьеса. Относительно коэффициентов уравнения будем предполагать, что $p(x) \in C^2[\Gamma]$, $\inf_{x \in \Gamma} p(x) > 0$, $q(x) \in C^1[a, b]$, $q(x) \geq 0$ на Γ , $H(x) \in BV[a, b]$, $F(x) \in BV[a, b]$.

Обозначим через A множество всех точек отрезка $[a, b]$, в которых хотя бы одна из функций $p(x)$, $p'(x)$, $q(x)$ и $H(x)$, $F(x)$ имеет ненулевой скачок. Выбросив из отрезка $[a, b]$ точки множества A , заменим каждую точку $\xi \in A$ парой $\{\xi - 0, \xi + 0\}$, считая такие пары упорядоченными $\xi - 0 < \xi + 0$. Множество, получаемое в результате такой замены, обозначим через $[a, b]_A$. Следуя [22], уравнение (3.1) мы рассматриваем как двухслойное: один уровень для значений $x \in [a, b]$, когда речь идет о самих решениях, и второй уровень для значений $x \in [a, b]_A$ в тождестве (3.1). В связи с этим, решение $u(x)$ уравнения (3.1) будем искать в классе функций, абсолютно непрерывных на $[a, b]$ вместе со своей первой производной, для которых функция $(pu'')(x)$ также абсолютно непрерывна, а третья квазипроизводная $D^3u(x)$ принадлежит $BV[a, b]$. Множество всех таких функций образует линейное пространство, которое обозначим через $\mathfrak{U}$. Введем в этом пространстве норму. Для этого представим квазипроизводную $D^3u(x)$ в факторизованном виде [18]

$$D^3u = \frac{1}{z(x)} \frac{d}{dx} \left(p(x) z^2(x) \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{z(x)} \frac{du}{dx} \right) \right), \quad x \in \Gamma, \quad (3.2)$$

где $z(x)$ – решение дифференциального уравнения

$$(p(x)z')' - q(x)z = 0, \quad x \in \Gamma,$$

обладающее свойствами (см., например, [23; § 8.5]):

$$z(x) \in C[a, b] \cap C^2[\Gamma], \quad \min_{x \in [a, b]} z(x) > 0, \quad (pz')(x) \in C[a, b] \cap C^1[\Gamma].$$

Отсюда, в частности, следуют включения $z(x)$, $(pz')(x) \in AC[a, b]$.

Если теперь обозначить

$$D^1u = \frac{1}{z} \frac{du}{dx}, \quad D^2u = pz^2 \frac{d}{dx} D^1u,$$

то включение $u(x) \in \mathfrak{U}$ эквивалентно тому, что $u, D^1u, D^2u \in AC[a, b]$ и $D^3u \in BV[a, b]$, что позволяет ввести в пространстве $\mathfrak{U}$ норму

$$\|u\|_{\mathfrak{U}} := \sup_{x \in \Gamma} |u(x)| + \sup_{x \in \Gamma} |D^1u(x)| + \sup_{x \in \Gamma} |D^2u(x)| + V_a^b(D^3u(x)).$$

Приступая к изучению интегро-дифференциального уравнения (3.1), начнем мы с леммы, которая более точно описывает свойства решений этого уравнения в точках из множества A .

ЛЕММА 4. Пусть $u(x)$ – решение уравнения (3.1). Тогда в любой точке $\xi \in A$ функция $u(x)$ удовлетворяет условию

$$\Delta D^3u(\xi) + u(\xi) \Delta H(\xi) = \Delta F(\xi).$$

Утверждение леммы следует из свойств коэффициентов уравнения (3.1) и интеграла Римана–Стилтьеса.

Для интегро-дифференциального уравнения (3.1) справедлив следующий аналог теоремы существования и единственности Коши.

ТЕОРЕМА 3. Для любых вещественных чисел u_0, u_1, u_2 и u_3 и произвольной точки $x_0 \in [a, b]_A$ существует единственное решение $u(x)$ уравнения (3.1), удовлетворяющее начальным условиям

$$u(x_0) = u_0, \quad u'(x_0) = u_1, \quad u''(x_0) = u_2, \quad u'''(x_0) = u_3. \quad (3.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя факторизацию (3.2), последовательным интегрированием интегро-дифференциальное уравнение (3.1) сводится к интегральному уравнению

$$u = Ku + v, \quad (3.4)$$

где

$$Ku(x) = - \int_{x_0}^x z(\zeta) \int_{x_0}^{\zeta} \frac{1}{p(\xi)z^2(\xi)} \int_{x_0}^{\xi} z(\eta) \left(\int_{x_0}^{\eta} u dH \right) d\eta d\xi d\zeta. \quad (3.5)$$

Докажем однозначную разрешимость уравнения (3.4) для любой $v(x) \in C[a, b]$. Для этого достаточно показать, что спектральный радиус $\varrho(K) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|K^n\|}$ интегрального оператора K меньше единицы. Отсюда будет следовать обратимость оператора $I - K$ и представимость решения уравнения (3.4) в виде равномерно сходящегося в операторной топологии ряда Неймана (см., например, [24; гл. VII, § 3]):

$$u = (I - K)^{-1}v = \sum_{n=0}^{\infty} K^n v. \quad (3.6)$$

Тогда из (3.4), (3.5) будет следовать принадлежность функций $u(x)$, $D^1 u(x)$ и $D^2 u(x)$ пространству $AC[a, b]$ и $D^3 u(x) \in BV[a, b]$.

Покажем, что для любой функции $v(x) \in C[a, b]$ выполняется неравенство

$$|K^m v(x)| \leq C^m \max_{x \in [a, b]} |v(x)| \frac{|x - x_0|^{3m}}{(3m)!}, \quad m \in \mathbb{N}, \quad (3.7)$$

с некоторой константой C .

Доказательство будем вести индукцией по m . При $m = 1$ имеем

$$\begin{aligned} |Kv(x)| &\leq V_a^b(H) \max_{x \in [a, b]} |v(x)| \left| \int_{x_0}^x z(\zeta) \int_{x_0}^{\zeta} \frac{1}{p(\xi)z^2(\xi)} \int_{x_0}^{\xi} z(\eta) d\eta d\xi d\zeta \right| \\ &\leq V_a^b(H) \frac{(\max_{x \in [a, b]} z(x))^2}{\inf_{x \in \Gamma} (pz^2)(x)} \max_{x \in [a, b]} |v(x)| \frac{|x - x_0|^3}{3!} = C \max_{x \in [a, b]} |v(x)| \frac{|x - x_0|^3}{3!}, \end{aligned}$$

где

$$C = V_a^b(H) \frac{(\max_{x \in [a, b]} z(x))^2}{\inf_{x \in \Gamma} (pz^2)(x)}.$$

Предположим теперь, что неравенство (3.7) верно при $m = k$. Покажем его справедливость при $m = k + 1$. Имеем

$$\begin{aligned} |K^{k+1}v(x)| &\leq C^k V_a^b(H) \max_{x \in [a, b]} |v(x)| \left| \int_{x_0}^x z(\zeta) \int_{x_0}^{\zeta} \frac{1}{p(\xi)z^2(\xi)} \int_{x_0}^{\xi} z(\eta) \frac{|\eta - x_0|^{3k}}{(3k)!} d\eta d\xi d\zeta \right| \\ &\leq C^{k+1} \max_{x \in [a, b]} |v(x)| \frac{|x - x_0|^{3k+3}}{(3k+3)!}. \end{aligned}$$

Теперь из неравенства (3.7) сразу следует необходимое нам неравенство $\varrho(K) < 1$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 4. *Решение задачи (3.1), (3.3) непрерывно зависит от $V_a^b(H)$ и начальной точки $x_0 \in [a, b]_A$ равномерно по $x \in [a, b]$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы следует из формулы (3.6) и определения (3.5) интегрального оператора K .

4. Вспомогательная краевая задача. Рассмотрим краевую задачу для интегро-дифференциального уравнения (3.1) с краевыми условиями (1.5).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Краевую задачу (3.1), (1.5) назовем *невыврожденной*, если соответствующая однородная задача имеет только тривиальное решение.

ЛЕММА 5. *Для невыврожденности краевой задачи (3.1), (1.5) достаточно, чтобы функция $H(x) \in BV[a, b]$ не убывала.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $u(x)$ – решение однородной задачи (3.1), (1.5). Умножая обе части однородного уравнения (3.1) на $u'(x)$ и интегрируя по частям, получим

$$\begin{aligned} & - \int_a^b p(x)[u''(x)]^2 + q(x)[u'(x)]^2 dx + p(b)u''(b)u'(b) - p(a)u''(a)u'(a) \\ & + u(a)D^3u(a) - u(b)D^3u(b) - \int_a^b u^2(x) dH(x) = 0. \end{aligned}$$

В силу свойств коэффициентов уравнения (3.1) и условий (1.5) все слагаемые слева неположительны и, следовательно, равны нулю. Тогда из условия $\inf_{x \in \Gamma} p(x) > 0$ следует, что $u''(x) \equiv 0$ на Γ , т.е. $u(x)$ – линейная на всем отрезке $[a, b]$ функция. Если $q(x) \equiv 0$ на Γ , то и $D^3u(x) \equiv 0$. Поэтому из краевых условий будет следовать $u(a) = 0 = u(b)$, а значит, $u(x) \equiv 0$ на $[a, b]$. Если же $q(x) \not\equiv 0$ на Γ , то $u'(x) \equiv 0$ на некотором интервале в $\text{supp } q(x)$. А поскольку $u(x)$ линейна на $[a, b]$, то $u'(x) \equiv 0$ на $[a, b]$. Следовательно, и в этом случае получаем тождественное равенство $D^3u(x) \equiv 0$ на Γ из которого, как и выше, следует $u(x) \equiv 0$ на $[a, b]$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Пусть $u(x)$ – ненулевое решение уравнения (3.1), удовлетворяющее в точке b соответствующим краевым условиям из (1.5). Если функция $H(x) \in BV[\Gamma]$ не убывает, то $u(x)$ не имеет кратных нулей на $[a, b]$.*

Действительно, если в некоторой точке $\xi \in (a, b)$ одновременно выполнены соотношения $u(\xi) = u'(\xi) = 0$, то функция $u(x)$ будет решением невыврожденной однородной краевой задачи вида (3.1), (1.5) на $[\xi, b]_A$.

ТЕОРЕМА 5. *Краевая задача (1.4), (1.5) эквивалентна краевой задаче (3.1), (1.5) при условии, что*

$$H(x) = \int_a^x h(s) ds + \sum_{a_i < x} \delta(a_i) \theta(x - a_i), \quad F(x) = \int_a^x f(s) ds + \sum_{a_i < x} f(a_i) \theta(x - a_i), \quad (4.1)$$

где $\theta(x)$ – функция Хевисайда.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что $H(x), F(x) \in BV[a, b]$ и функция $H(x)$ не убывает. Поэтому обе краевые задачи невыврождены. Покажем, что решение одной задачи является решением другой и наоборот.

Пусть $u(x)$ – решение задачи (1.4), (1.5). Подставим его в дифференциальное уравнение (1.1) и проинтегрируем полученное тождество от a до $x \in [a, b]_A$:

$$D^3u(x) - D^3u(a) - \sum_{a_i < x} \Delta D^3u(a_i) + \int_a^x u(s)h(s) ds = \int_a^x f(s) ds.$$

Привлекая условия (1.2), имеем

$$D^3u(x) - D^3u(a) + \int_a^x u(s)h(s) ds + \sum_{a_i < x} \delta(a_i)u(a_i) = \int_a^x f(s) ds + \sum_{a_i < x} f(a_i).$$

Теперь, используя (4.1) и свойства интеграла Римана–Стилтьеса, окончательно получим уравнение (3.1). Следовательно, функция $u(x)$ является решением задачи (3.1), (1.5).

Поскольку обе рассматриваемые краевые задачи однозначно разрешимы и решение задачи (1.4), (1.5) является одновременно и решением (3.1), (1.5), то понятно, что решение задачи (3.1), (1.5) есть решение задачи (1.4), (1.5). Теорема доказана.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Функцией влияния невырожденной краевой задачи (3.1), (1.5) назовем функцию $G(x, s): [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ такую, что для всякой функции $F(x) \in BV[a, b]$ решение задачи может быть представлено в виде*

$$u(x) = \int_{\Gamma} G(x, s) dF(s).$$

Из доказанной теоремы и общих свойств функции Грина краевой задачи (1.4), (1.5) (см. [18] или [23; гл.6]) следует, что при каждом фиксированном $s \in (a, b)$ функция Грина задачи (1.4), (1.5) является решением интегро-дифференциального уравнения (3.1) с правой частью $\theta(x - s)$ и удовлетворяет краевым условиям (1.5). Поэтому имеет место

СЛЕДСТВИЕ 2. *В условиях теоремы 4 функция влияния краевой задачи (3.1), (1.5) существует и совпадает с функцией Грина $G(x, s)$ краевой задачи (1.4), (1.5).*

5. Доказательство основной теоремы. Всюду далее считаем, что функция $H(x) \in BV[a, b]$ определена формулой (4.1). Через $G(x, s)$ обозначается функция Грина краевой задачи (1.4), (1.5) (или, что одно и то же, функция влияния задачи (3.1), (1.5)).

Рассмотрим последовательность $\{H_k(x)\}$ монотонно возрастающих функций из $BV[a, b]$. Пусть $\{b_k\}$ – последовательность точек отрезка $[a, b]$, сходящаяся к b . Для каждого номера $k \in \mathbb{N}$ введем в рассмотрение краевую задачу

$$\begin{aligned} D^3u(x) - D^3u(a) + \int_a^x u(s) dH_k(s) &= F(x) - F(a), & x \in [a, b_k]_{A_k}, \\ u(a) + \alpha(a)D^3u(a) &= B_1, & \vartheta(a)u'(a) - \beta(a)u''(a) = B_2, \\ u(b_k) - \alpha(b)D^3u(b_k) &= 0, & \vartheta(b)u'(b_k) + \beta(b)u''(b_k) = 0, \end{aligned} \quad (5.1)$$

где A_k – множество всех точек разрыва коэффициентов и правой части интегро-дифференциального уравнения. Обратим внимание, что коэффициенты краевых условий у всех задач одни и те же и совпадают с коэффициентами условий (1.5). Через $G_k(x, s)$ обозначим функцию влияния краевой задачи (5.1).

ТЕОРЕМА 6. Пусть при любом $k \in \mathbb{N}$ функция $G_k(x, s)$ является осцилляционной. Если $V_a^b(H_k - H) \rightarrow 0$, то из положительности функции $G(x, s)$ на $(a, b) \times (a, b)$ следует ее осцилляционность.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для произвольного номера $j \in \mathbb{N}$ рассмотрим набор

$$a < \begin{matrix} x_1 < \dots < x_j \\ s_1 < \dots < s_j \end{matrix} < b.$$

Поскольку $b_k \rightarrow b$, найдется номер k_0 такой, что $b_{k_0} > x_j$. Тогда для всех $k > k_0$ будет выполнено

$$G_k \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_j \\ s_1 & \dots & s_j \end{pmatrix} \geq 0$$

и в силу теоремы 3 при $k \rightarrow \infty$ будем иметь

$$G_k \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_j \\ s_1 & \dots & s_j \end{pmatrix} \rightarrow G \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_j \\ s_1 & \dots & s_j \end{pmatrix} \geq 0.$$

Теперь для завершения доказательства теоремы нам остается показать выполнение (0.3). Но эти неравенства следуют из результата работы [8], согласно которому для выполнения неравенств (0.3) достаточно выполнения неравенств (0.2), положительности ядра $G(x, s)$ и локальной невырожденности оператора (0.1) в классе $\delta[a, b]$ (см. п. 2). Теорема доказана.

Доказательство теоремы 1 мы проведем отдельно для случаев когда в краевой задаче (1.4), (1.5) коэффициенты граничных условий удовлетворяют соотношениям $\alpha(a)\alpha(b) = 0$ и $\alpha(a)\alpha(b) > 0$. Прежде, чем приступить к соответствующим формулировкам, введем некоторые обозначения.

Обозначим через $\mathcal{S}[a, b]$ множество всех ступенчатых на отрезке $[a, b]$ функций, имеющих на концах отрезка нулевой скачок. Множество всех неотрицательных монотонно возрастающих и равных нулю в граничной точке a функций из $\mathcal{S}[a, b]$ будем обозначать через $\mathcal{S}_+[a, b]$. Для всякой функции $\mathcal{H}(x) \in \mathcal{S}_+[a, b]$ существует конечный набор $a < \xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_k < b$ такой, что имеет место представление

$$\mathcal{H}(x) = \sum_{\xi_i < x} c_i \theta(x - \xi_i), \quad x \in [a, b],$$

в котором все числа $c_i \geq 0$, $1 \leq i \leq k$ (при $x \in [a, \xi_1]$ полагаем $\mathcal{H}(x) = 0$).

ЛЕММА 6. Если функция Грина $G(x, s)$ краевой задачи (1.4), (1.5) положительна на $(a, b) \times (a, b)$ и $\alpha(a)\alpha(b) = 0$, то $G(x, s)$ является осцилляционным ядром.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим функцию $H(x)$, определенную формулой (4.1), и построим последовательность функций $H_k(x) \in \mathcal{S}_+[a, b]$ такую, что $H_k(x) \rightrightarrows H(x)$ на $[a, b]$. Через $A_k = \{\xi_{ki}\}$ обозначим множество всех точек разрыва функций $p(x)$, $q(x)$ и $H_k(x)$. При каждом $k \in \mathbb{N}$ множество A_k конечно.

Пусть, для определенности, $\alpha(b) = 0$. Тогда ввиду леммы 3 $u_a(x) > 0$ на (a, b) и $u_a(b) = 0$. Обозначим через $u_k(x)$ решение краевой задачи (5.1), в которой $F(x) \equiv 0$, $b_k = b$, а правые части граничных условий определяются по правилу: если $\alpha(a) = 0$, то $B_1 = 0$, $B_2 = 1$, а если $\alpha(a) > 0$, то $B_1 = 1$, $B_2 = 0$. Через $x_k \in (a, b]$

обозначим ближайший к концу a нуль функции $u_k(x)$. Из теоремы 3 следует, что $u_k(x) \rightrightarrows u_a(x)$ на $[a, b]$. А поскольку $u_a(x) > 0$ на (a, b) , то $x_k \rightarrow b$ и $u_k(x) > 0$ на (a, x_k) . Кроме того, для всех k будет выполнено неравенство $u'_k(x_k)u''_k(x_k) \leq 0$ (при $x_k \neq b$ это следует из леммы 1, а при $x_k = b$ из граничных условий). Поэтому ввиду из теоремы 5 и леммы 2 при любом $k \in \mathbb{N}$ решение краевой задачи

$$\begin{aligned} D^3 u(x) - D^3 u(a) + \int_a^x u(s) dH_k(s) &= 0, & x \in [a, x_k]_{A_k}, \\ u(a) + \alpha(a)D^3 u(a) &= B_1, & \vartheta(a)u'(a) - \beta(a)u''(a) = B_2, \\ u(x_k) &= 0, & \vartheta(b)u'(x_k) + \beta(b)u''(x_k) = 0 \end{aligned} \quad (5.2)$$

положительно на (a, x_k) . Ввиду следствия 2, леммы 3 и теоремы 2 функция влияния $G_k(x, s)$ краевой задачи (5.2) является осцилляционной. И нам остается только сослаться на теорему 6. Лемма доказана.

ЛЕММА 7. Если функция Грина $G(x, s)$ краевой задачи (1.4), (1.5) положительна на $(a, b) \times (a, b)$ и $\alpha(a)\alpha(b) > 0$, то $G(x, s)$ является осцилляционным ядром.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду теоремы 2 можно считать, что $h(x) \neq 0$.

Рассмотрим сначала случай когда $\inf_{a < x, s < b} G(x, s) > 0$. Зададим последовательность функций $H_k(x) \in \mathcal{S}_+[a, b]$ такую, что $H_k(x) \rightrightarrows H(x)$ на $[a, b]$ и для каждого $k \in \mathbb{N}$ рассмотрим краевую задачу (3.1), (1.5) с коэффициентом $H_k(x)$ в интегральном слагаемом. Если $G_k(x, s)$ соответствующие функции влияния, то ввиду теоремы 3 выполнено $G_k(x, s) \rightrightarrows G(x, s)$ на $[a, b] \times [a, b]$ и, начиная с некоторого номера, будут выполняться неравенства $G_k(x, s) > 0$ на $[a, b] \times [a, b]$. Из теоремы 2 следует, что при больших номерах k функции $G_k(x, s)$ являются осцилляционными, а из теоремы 5 уже получаем осцилляционность функции $G(x, s)$.

Рассмотрим теперь случай, когда $\inf_{a < x, s < b} G(x, s) = 0$. Так как срезка $G(x, a)$ функции Грина пропорциональна функции $u_a(x)$, а срезка $G(x, b)$ пропорциональна функции $u_b(x)$ (см. [23; § 6.2]) и при этом функции $u_a(x)$, $u_b(x)$ не имеют кратных нулей на (a, b) , то $G(x, s) > 0$ всюду на $[a, b] \times [a, b]$ кроме двух угловых точек $x = b$, $s = a$ и $x = a$, $s = b$, в которых функция Грина равна нулю. Следовательно, $u_a(x) > 0$ на $[a, b)$ и $u_a(b) = 0$.

Пусть $\xi = \sup\{x \in (a, b) \mid h(x) \neq 0\}$. Рассмотрим строго возрастающую последовательность $\{x_k\}$ точек интервала (a, ξ) , сходящуюся к точке ξ , и определим последовательность функций

$$H_k(x) = \mathcal{H}_k(x) + \sum_{a_i < x} \delta(a_i)\theta(x - a_i), \quad \text{где} \quad \mathcal{H}_k(x) = \begin{cases} \int_a^x h(s) ds, & x \in [a, x_k], \\ \int_a^{x_k} h(s) ds, & x \in [x_k, b]. \end{cases}$$

Очевидно, что $H(x) - H_k(x) \geq 0$ для всех $k \in \mathbb{N}$ и $x \in [a, b]$, причем $V_a^b(H_k - H) \rightarrow 0$.

Для каждого $k \in \mathbb{N}$ рассмотрим краевую задачу (5.1), положив $F(x) \equiv 0$ и $b_k = b$. Обозначим через $u_k(x)$ решение каждой из этих краевых задач, а через $G_k(x, s)$ соответствующую функцию влияния. Поскольку $V_a^b(H_k - H) \rightarrow 0$, в силу теоремы 3 $u_k(x) \rightrightarrows u_a(x)$ на $[a, b]$. Покажем, что начиная с некоторого номера $k = k_0$ будут

выполняться неравенства $u_k(x) > 0$ на $[a, b]$. Рассмотрим тождества

$$D^3 u_a(x) - D^3 u_a(a) + \int_a^x u_a dH = 0, \quad D^3 u_k(x) - D^3 u_k(a) + \int_a^x u_k dH_k = 0.$$

Вычитая первое из второго и вводя обозначение $w_k(x) = u_k(x) - u_a(x)$, получим

$$D^3 w_k(x) - D^3 w_k(a) + \int_a^x w_k dH_k = F_k(x), \quad (5.3)$$

где $F_k(x) = \int_a^x u_a d(H - H_k)$. Очевидно, что функция $F_k(x) \in BV[a, b]$ не равна тождественно нулю, неотрицательна и $F_k(x) \equiv 0$ на $[a, x_k]$.

Рассмотрим краевую задачу для уравнения (5.3) с краевыми условиями (1.5) и обозначим через $\mathcal{G}_k(x, s)$ соответствующую функцию влияния. Тогда

$$w_k(x) = \int_a^b \mathcal{G}_k(x, s) dF_k(s) = \int_{x_k}^b \mathcal{G}_k(x, s) dF_k(s). \quad (5.4)$$

Так как $G(x, s) > 0$ всюду на $[a, b] \times [a, b]$, кроме угловых точек $x = b, s = a$ и $x = a, s = b$, а $\mathcal{G}_k(x, s) \Rightarrow G(x, s)$ на $[a, b] \times [a, b]$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер k , начиная с которого будут выполняться неравенства $\mathcal{G}_k(x, s) > 0$ на $(a + \varepsilon, b] \times (a + \varepsilon, b]$. Поэтому из (5.4) следует, что при всех достаточно больших k будут выполнены неравенства

$$w_k(x) = \int_{x_k}^b \mathcal{G}_k(x, s) dF_k(s) > 0, \quad x \in \left[\frac{a+b}{2}, b \right],$$

т.е. $u_k(x) > 0$ при $x \in [(a+b)/2, b]$. А поскольку $\inf_{x \in [a, (a+b)/2]} u_a(x) > 0$ и $u_k(x) \Rightarrow u_a(x)$ на $[a, (a+b)/2]$, то, начиная с некоторого номера $k = k_0$, будут выполняться неравенства $u_k(x) > 0$ всюду на $[a, b]$. Поэтому из леммы 3 следует, что при $k > k_0$ функции $G_k(x, s)$ положительны на $[a, b] \times [a, b]$ и, как показано выше, являются осцилляционными. Теперь осцилляционность функции $G(x, s)$ следует из теоремы 6 и $V_a^b(H_k - H) \rightarrow 0$. Лемма доказана.

Объединяя утверждения лемм 6, 7, получим теорему 1.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ф. Р. Гантмахер, М. Г. Крейн, *Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем*, Гостехиздат, М., 1950.
- [2] O. D. Kellogg, "Orthogonal function sets arising from integral equations", *Amer. J. Math.*, **40:2** (1918), 145–154.
- [3] O. D. Kellogg, "Interpolation properties of orthogonal sets of solutions of differential equations", *Amer. J. Math.*, **40:3** (1918), 225–234.
- [4] П. Д. Калафати, "О функции Грина обыкновенных дифференциальных уравнений", *ДАН СССР*, **26:6** (1940), 535–539.
- [5] J. M. Karon, "The sihn-regularity propeties of a class of Green's functions for ordinary differential equations", *J. Differential Equations*, **6:3** (1969), 484–502.
- [6] S. Karlin, "Total positivity, interpolations by Splines and Green's functions for ordinary differential equations", *J. Approx. Theory*, **4:1** (1971), 91–112.

- [7] А. Ю. Левин, Г. Д. Степанов, “Одномерные краевые задачи с операторами, не понижающими числа перемен знака. I”, *Сиб. матем. журн.*, **17**:3 (1976), 606–626; “Одномерные краевые задачи с операторами, не понижающими числа перемен знака. II”, *Сиб. матем. журн.*, **17**:4 (1976), 813–830.
- [8] А. В. Боровских, Ю. В. Покорный, “Системы Чебышёва–Хаара в теории разрывных ядер Келлога”, *УМН*, **49**:3 (297) (1994), 3–42.
- [9] Ю. В. Покорный, “О знакорегулярных функциях Грина некоторых неклассических задач”, *УМН*, **36**:4 (1981), 205–206.
- [10] В. Я. Дерр, “К обобщенной задаче Валле Пуссена”, *Дифференц. уравнения*, **23**:11 (1987), 1861–1872.
- [11] А. Л. Тептин, “К вопросу об осцилляционности спектра многоточечной краевой задачи”, *Изв. вузов. Матем.*, 1999, № 4, 44–53.
- [12] Ю. В. Покорный, К. П. Лазарев, “Некоторые осцилляционные теоремы для многоточечных задач”, *Дифференц. уравнения*, **23**:4 (1987), 658–670.
- [13] Р. Ч. Кулаев, “Об осцилляционности функции Грина многоточечной краевой задачи для уравнения четвертого порядка”, *Дифференц. уравнения*, **51**:4 (2015), 445–458.
- [14] М. И. Нейман-заде, А. А. Шкаликов, “Операторы Шрёдингера с сингулярными потенциалами из пространств мультипликаторов”, *Матем. заметки*, **66**:5 (1999), 723–733.
- [15] Ж. Бен Амара, А. А. Владимиров, “Об осцилляции собственных функций задачи четвёртого порядка со спектральным параметром в граничном условии”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **12**:4 (2006), 41–52.
- [16] Ж. Бен Амара, А. А. Владимиров, А. А. Шкаликов, “Спектральные свойства одного линейного пучка дифференциальных операторов четвертого порядка”, *Матем. заметки*, **94**:1 (2013), 55–67.
- [17] А. В. Боровских, “Условия знакорегулярности разрывных краевых задач”, *Матем. заметки*, **74**:5 (2003), 643–655.
- [18] Р. Ч. Кулаев, “Критерий положительности функции Грина многоточечной краевой задачи для уравнения четвертого порядка”, *Дифференц. уравнения*, **51**:2 (2015), 161–173.
- [19] Р. Ч. Кулаев, “Условия осцилляционности функции Грина разрывной краевой задачи для уравнения четвертого порядка”, *Владикавказ. матем. журн.*, **17**:1 (2015), 47–59.
- [20] Ю. В. Покорный, “Интеграл Стилтеса и производные по мере в обыкновенных дифференциальных уравнениях”, *ДАН*, **364**:2 (1999), 167–169.
- [21] Ю. В. Покорный, М. Б. Зверева, С. А. Шабров, “Осцилляционная теория Штурма–Лиувилля для импульсных задач”, *УМН*, **63**:1 (379) (2008), 111–154.
- [22] Ю. В. Покорный, Ж. И. Бахтина, М. Б. Зверева, С. А. Шабров, *Осцилляционный метод Штурма в спектральных задачах*, Физматлит, М., 2009.
- [23] Ю. В. Покорный, О. М. Пенкин, В. Л. Прядиев, А. В. Боровских, К. П. Лазарев, С. А. Шабров, *Дифференциальные уравнения на геометрических графах*, Физматлит, М., 2004.
- [24] Н. Данфорд, Дж. Шварц, *Линейные операторы*. Т. 1. *Общая теория*, ИЛ, М., 1962.

Р. Ч. Кулаев

Южный математический институт ВНИЦ РАН,
г. Владикавказ;
Северо-Осетинский государственный университет
им. К. Л. Хетагурова, г. Владикавказ
E-mail: kulaev@smath.ru

Поступило

23.05.2015

Исправленный вариант

07.02.2016