Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Беляев, Г. А. Чечкин, Усреднение операторов с мелкомасштабной структурой граничных условий, *Матем. заметки*, 1999, том 65, выпуск 4, 496–510

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1076>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 14:58:08

УДК 517.9

УСРЕДНЕНИЕ ОПЕРАТОРОВ С МЕЛКОМАСШТАБНОЙ СТРУКТУРОЙ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

А. Ю. Беляев, Г. А. Чечкин

В настоящей работе рассматриваются вопросы усреднения краевых задач, содержащих малый параметр в граничных условиях. На основе введенных новых понятий доказывается теорема о компактности семейства решений. На примере задачи с быстро меняющимися граничными условиями в случае вероятностного описания структуры области проверяется действенность предлагаемого метода исследования.

Библиография: 36 названий.

Введение. При описании физических процессов уравнениями в частных производных нередко возникают трудности, связанные с выбором граничных условий, адекватных конкретной прикладной задаче. Причины этих трудностей могут происходить из-за геометрической нерегулярности границ области, в которой происходит процесс, или из-за вырождения коэффициентов уравнений вблизи края этой области. Обычно в таких случаях удается описать процесс некоторой регуляризованной задачей с более простой структурой граничных условий, в которой учет краевых осцилляций и вырождений производится приближенно с помощью ряда эффективных параметров. Для обоснования такого приближенного подхода требуется асимптотический анализ исходной проблемы, содержащей естественные малые параметры. Возникающий класс асимптотических задач методологически близок к теории усреднения уравнений в перфорированных областях и (или) с быстро осциллирующими коэффициентами (см. [1], [2]).

Проблема усреднения уравнений в областях с быстро осциллирующей границей рассматривалась во многих работах (см. [3]–[16]). В большинстве таких задач главный член асимптотики решения удовлетворяет исходным уравнениям в области со “сглаженной” границей. Граничные условия при этом обычно сохраняют первоначальный вид, но в них появляются усредненные параметры, отражающие геометрию мелкомасштабных осцилляций. Интересный подход к асимптотическому исследованию эллиптических операторов с коэффициентами, вырождающимися вблизи границы области, предложен в [17]. В этом случае тип граничных условий предельной задачи может не совпадать с исходным. Он зависит от характера вырождения констант эллиптичности.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 95-01-01232 (первый автор) и грант № 98-01-00062 (второй автор).

Предлагаемой статье предшествовали работы [18]–[26], где исследовалась проблема усреднения уравнения Пуассона с осциллирующим типом граничных условий. На границе выделялось подмножество, имеющее в локальных координатах мелкомасштабную периодическую структуру, и на нем ставилось условие Дирихле; на оставшейся части границы ставилось условие Неймана. Также были рассмотрены задачи с быстрым непериодическим изменением типа граничных условий [19]–[22], [27], [28] в том числе и для системы теории упругости [22], [27], [28]. В приложениях такие задачи могут возникать при расчетах экранирующих свойств защитных металлических сеток в электромагнитных полях, при исследовании колебания тел, частично закрепленных на границе. Асимптотика решения в этом случае принципиально зависит от отношения площадей, приходящихся на выделенное подмножество и его дополнение. В частности, если это отношение в периодическом случае не стремится к 0, то предельная задача для главного члена асимптотики оказывается задачей Дирихле. Здесь мы исследуем проблему усреднения в случае, когда условие Дирихле для оператора Лапласа выставлено на подмножестве границы, необязательно обладающей периодической структурой. Предлагаемый подход включает в себя большой класс задач, в которых для выделенного подмножества может быть разумным образом определен малый характерный линейный масштаб. В качестве примера мы приводим процедуру построения предельной задачи, когда геометрия указанного подмножества случайна. При таком обобщении периодической задачи приходится ограничиться исследованием слабых асимптотик решений вблизи границы, в то время как в периодическом случае возможно построение полного асимптотического разложения, включающего в себя корректоры в виде функций, экспоненциально затухающих при удалении от границы (см., например, [23], [25]).

Краевые задачи для Лапласиана сводятся к интегральным уравнениям на границе области, поэтому рассматриваемую задачу можно трактовать как проблему усреднения некоторого эллиптического псевдодифференциального оператора в перфорированной области. В этом смысле ее исследование является обобщением подхода, развитого в [1], [29], [30] для усреднения уравнений в перфорированных областях случайной структуры.

Кратко результаты о граничном усреднении задач со случайной структурой изложены в [31].

1. Теорема о компактности. В ограниченной области $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, с достаточно гладкой границей рассматривается семейство краевых задач, зависящих от малого параметра $\varepsilon > 0$:

$$\begin{aligned} \Delta u_\varepsilon &= 0 \quad \text{в } D, \\ u_\varepsilon &= 0 \quad \text{на } \Gamma_\varepsilon \subset \partial D, \\ \varepsilon \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu} &= g(x) \quad \text{на } \partial D \setminus \Gamma_\varepsilon. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь Γ_ε – часть границы ∂D области D , имеющая ячеистую структуру с характерным масштабом ε . На этой части границы задано однородное условие Дирихле. На оставшейся части выставлено условие Неймана, в котором $g(x)$ не зависит от малого параметра, а ν есть внешняя нормаль к ∂D .

Принципиальную роль в асимптотике решения u_ε при $\varepsilon \rightarrow 0$ играет зависимость Γ_ε от малого параметра, а сомножитель ε , явно входящий в (1), можно было бы исключить

из задачи заменой. Он введен для того, чтобы главный член асимптотики u_ε при $\varepsilon \rightarrow 0$ был порядка 1. Термин *характерный масштаб* для конкретных примеров ячеистых структур обычно не вызывает затруднений. В частности, если двумерное множество состоит из большого количества одинаковых “пятен”, разбросанных равномерно, и доля площади, занятой “пятнами”, не близка к 0 и 1, то в качестве характерного масштаба можно выбрать диаметр “пятна”. Однако этот термин мало пригоден для получения результатов достаточной степени общности. Поэтому мы сформулируем основное свойство структур, рассматриваемых в работе, не используя явно геометрических параметров.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Семейство замкнутых множеств $\Gamma_\varepsilon \subset \partial D$ назовем *самоподобным*, если найдутся не зависящие от ε константы C_1 и s , $C_1 > 0$, $1 < s \leq 2$, такие, что для любого ε , $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, и любой гладкой функции $\varphi \in C^\infty(\overline{D})$ с носителем, не пересекающимся с Γ_ε , выполнено неравенство

$$\left(\int_{\partial D} |\varphi|^s dx \right)^{1/s} \leq C_1 \left(\varepsilon \int_D (\nabla \varphi)^2 dx \right)^{1/2}. \quad (2)$$

Ниже будет проиллюстрирована связь свойства самоподобности с эвристическим понятием “характерный масштаб ячеистой структуры”.

Предварительно отметим, что если на многообразии ∂D имеется “пятно” фиксированных размеров, с которым у Γ_ε при $\varepsilon \rightarrow 0$ нет общих точек, то (2) не имеет места. Таким образом, самоподобные семейства должны при малых ε покрывать ∂D достаточно густо. Неравенство (2) характеризует эту густоту, неявно ограничивая сверху максимальные размеры “пятен” на ∂D , оставшихся непокрытыми множествами Γ_ε .

Наряду со свойством (2) мы будем пользоваться неравенством Пуанкаре в следующей формулировке.

НЕРАВЕНСТВО ПУАНКАРЕ. Для всех функций, заданных в области D , справедливо неравенство

$$\int_D \varphi^2 dx \leq C_2 \left(\left(\int_{\partial D} |\varphi| dx \right)^2 + \int_D (\nabla \varphi)^2 dx \right), \quad (3)$$

где константа C_2 зависит только от области.

Ограниченность области D и гладкость ее границ, о которых упоминалось в начале, а также какая-либо регулярность множеств $\Gamma_\varepsilon \subset \partial D$ требуются нам лишь в той мере, в какой они необходимы для (2), (3).

Если семейство $\{\Gamma_\varepsilon\}$ самоподобно, то при $\varepsilon \rightarrow 0$ решения u_ε задачи (1) обладают следующими асимптотическими свойствами.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $g \in L_{s'}(\partial D)$, где s' – взаимное число к показателю s из определения 1, $1/s + 1/s' = 1$. Тогда

- 1) последовательность u_ε при $\varepsilon \rightarrow 0$ ограничена в пространстве $L_s(\partial D)$;
- 2) существуют измеримая функция $C: \partial D \rightarrow [0, +\infty)$ и подпоследовательность $\varepsilon_k \rightarrow 0$, не зависящие от выбора функции $g \in L_{s'}(\partial D)$, такие, что по этой подпоследовательности функции u_{ε_k} слабо сходятся к $C(x)g(x)$ в $L_s(\partial D)$;

- 3) последовательность u_ε компактна в $L_p(D)$, а подпоследовательность u_{ε_k} сходится сильно в $L_p(D)$ к гармонической функции u^* со значениями $C(x)g(x)$ на границе ∂D области D , где $p < ns/(n-1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение 3) теоремы вытекает из двух предыдущих в силу следующего свойства гармонических функций.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть D – область с гладкой границей, последовательность гармонических в области D функций v_ε слабо компактна в $L_s(\partial D)$, $s > 1$. Тогда она сильно компактна в пространстве $L_p(D)$, $p < ns/(n-1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $H_s^l(D)$, $s \neq 1$, $k < l < k+1$ ($k = 0, 1, \dots$), замыкание множества функций из $C^\infty(\overline{D})$ по норме

$$\|v\|_{H_s^l(D)} \equiv \left(\int_{D \times D} \frac{|D^{(k)}v(x+y) - D^{(k)}v(x)|^s}{|y|^{s+nl}} dx dy \right)^{1/s}.$$

Если $l < 0$, то по определению $H_s^l \equiv H_{s'}^{-l}$, где $1/s + 1/s' = 1$. Теперь воспользуемся неравенством

$$\|v\|_{L_p(D)} \leq \tilde{C} \|v\|_{H_s^l(D)}, \quad p \leq \frac{ns}{n-ls}, \quad (4)$$

из [32] и неравенством

$$\|v\|_{H_s^l(D)} \leq \tilde{C}^1 \|v\|_{H_s^{l-1/s}(\partial D)}, \quad s \neq 1, \quad l > 0, \quad l \neq \frac{1}{s}, \quad (5)$$

из [33], которые имеют место для гармонических функций в области D .

Из определения соболевских пространств с отрицательными показателями следует непрерывность вложения $L_s(\partial D) \subset H_s^{l-1/s}(\partial D)$ при $l < 1/s$. Поэтому из неравенства (5) вытекает оценка $\|v\|_{H_s^l(D)} \leq \tilde{C}^3 \|v\|_{L_s(\partial D)}$. Учитывая неравенство (4), мы получаем оценку $\|v\|_{L_p(D)} \leq \tilde{C}^4 \|v\|_{L_s(\partial D)}$, $p < ns/(n-1)$. Предложение доказано.

Для доказательства утверждения 1) теоремы воспользуемся вариационной формулировкой задачи (1): функции u_ε должны удовлетворять условию Дирихле на Γ_ε и интегральному тождеству

$$\varepsilon \int_D \nabla u_\varepsilon \nabla v dx = \int_{\partial D} g v dx, \quad (6)$$

выполненому для любой гладкой функции v с компактным носителем в $\overline{D} \setminus \Gamma_\varepsilon$. Через H_ε обозначим замыкание по норме соболевского пространства $W_2^1(D)$ – пространства гладких функций с компактным носителем в $\overline{D} \setminus \Gamma_\varepsilon$. Из (2) и (3) следует, что функционалы в левой и правой частях (6) на H_ε удовлетворяют условиям леммы Лакса–Мильграма (см., например, [34]). Поэтому решение $u_\varepsilon \in H_\varepsilon$ существует и единственно. Кроме того, по непрерывности соотношения (2), (3), (6) справедливы не только для гладких функций, но и для функций из H_ε . При этом из H_ε в $L_s(\partial D)$ действует непрерывный оператор следа, и под значениями функций из H_ε на границе области D подразумеваются значения их следов.

При $v = u_\varepsilon$ из (6) следует неравенство

$$\varepsilon \int_D (\nabla u_\varepsilon)^2 dx \leq \left(\int_{\partial D} |g|^{s'} dl \right)^{1/s'} \left(\int_{\partial D} |u_\varepsilon|^s dl \right)^{1/s}.$$

Оценивая правую часть этого неравенства с помощью (2), мы получим оценки

$$\varepsilon \int_D (\nabla u_\varepsilon)^2 dx \leq C_3, \quad \int_{\partial D} |u_\varepsilon|^s dl \leq C_3 \quad (7)$$

с константой C_3 , не зависящей от ε . Таким образом, утверждение 1) теоремы доказано.

Рассмотрим вспомогательную задачу

$$\begin{aligned} \Delta w_\varepsilon &= 0 \quad \text{в } D, \\ w_\varepsilon &= 0 \quad \text{на } \Gamma_\varepsilon, \\ \varepsilon \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \nu} &= 1 \quad \text{на } \partial D \setminus \Gamma_\varepsilon, \end{aligned} \quad (8)$$

которая совпадает с исходной при $g = 1$. Соответствующее этой задаче интегральное тождество в H_ε имеет вид

$$\varepsilon \int_D \nabla w_\varepsilon \nabla v dx = \int_{\partial D} v dx. \quad (9)$$

Решение $w_\varepsilon \in H_\varepsilon$ удовлетворяет оценкам, аналогичным (7):

$$\varepsilon \int_D (\nabla w_\varepsilon)^2 dx \leq C_4, \quad \int_{\partial D} |w_\varepsilon|^s dx \leq C_4 \quad (10)$$

с константой C_4 , которая не зависит от ε . Из (10) следует, что можно выбрать подпоследовательность $\varepsilon = \varepsilon_k$, по которой следы функций w_{ε_k} слабо сходятся в $L_s(\partial D)$. Предельную функцию на ∂D мы обозначим через $C(x)$. Очевидно, что $C \in L_s(\partial D)$. Из принципа максимума для гармонических функций следует также, что $C(x) \geq 0$.

Выберем произвольную функцию $\theta \in C_\infty(\overline{D})$ и в тождества (6), (9) подставим $v = \theta w_\varepsilon$, $v = \theta u_\varepsilon$ соответственно. Вычитая одно получившееся равенство из другого, имеем

$$\varepsilon \int_D (w_\varepsilon \nabla u_\varepsilon - u_\varepsilon \nabla w_\varepsilon) \nabla \theta dx = \int_{\partial D} (g(x) w_\varepsilon - u_\varepsilon) \theta dx. \quad (11)$$

Покажем, что левая часть (11) стремится к 0 при $\varepsilon \rightarrow 0$. Действительно, из оценок (7), (10) и неравенства Пуанкаре следует, что функции $\sqrt{\varepsilon} u_\varepsilon$ и $\sqrt{\varepsilon} w_\varepsilon$ ограничены в $W_2^1(D)$. По теореме Реллиха последовательности этих функций сильно компактны в $L_2(D)$, а по норме пространства $L_p(D)$, $p < ns/(n-1)$, сходятся, как было доказано выше, к 0. Поэтому в $L_2(D)$ они тоже сходятся к 0. Таким образом, в произведениях под интегралом в левой части (11) один из сомножителей ограничен в $L_2(D)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, а другой сходится к 0, что и требовалось.

В правой части (11) перейдем к пределу по подпоследовательности $\varepsilon_k \rightarrow 0$. Функции w_{ε_k} слабо сходятся к $C(x)$ в $L_s(\partial D)$. Функции u_{ε_k} ограничены в $L_s(\partial D)$. Выделим из подпоследовательности ε_k еще одну подпоследовательность, по которой u_{ε_k} слабо сходятся в $L_s(\partial D)$ к некоторой предельной функции u^* на ∂D , и сначала перейдем к пределу по ней. Получим

$$\int_{\partial D} (g(x)C(x) - u^*)\theta dx = 0.$$

Ввиду произвольности выбора $\theta \in C_\infty(\overline{D})$ на ∂D функция $u^* = gC$, т.е. предельная функция u^* , не зависит от выбора второй подпоследовательности. Поэтому вся последовательность u_{ε_k} имеет единственный предел. Теорема 1 доказана.

2. Структура случайных множеств Γ_ε . Для более детального описания семейства $\{\Gamma_\varepsilon\}$ мы используем конструкцию традиционную в теории усреднения (см. [1]). Эта конструкция обладает достаточной степенью общности и годится для описания мелкозернистых множеств с периодической, квазипериодической и случайной структурой.

Пусть (Ω, B, μ) – вероятностное пространство, на котором задана полугруппа отображений $T_x: \Omega \rightarrow \Omega$, измеримых по $\omega \in \Omega$, $x \in \mathbb{R}^{n-1}$ и сохраняющих меру μ на Ω . Предполагается выполненным следующее *групповое свойство*: для любых $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^{n-1}$ и любого $\omega \in \Omega$

$$T_{x_1} \circ T_{x_2} \omega = T_{x_1+x_2} \omega, \quad T_0 \omega = \omega.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Измеримую функцию $\varphi: \Omega \times \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ будем называть *случайной статистически однородной*, если она имеет вид $\varphi = \varphi(T_x \omega)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Случайное множество называется *однородным*, если однородна его характеристическая функция.

ПРИМЕР. Если Ω – $(n-1)$ -мерный тор с естественной группой сдвигов на нем, то однородность множества и функции означает их периодичность.

Семейство отображений T на Ω образует динамическую систему с $(n-1)$ -мерным “временем” x . Всюду далее мы будем считать эту систему *эргодической*, т.е. любая μ -измеримая функция на Ω , инвариантная относительно этой группы сдвигов, является почти всюду константой. Это дает нам возможность пользоваться теоремой Биркгофа (см. [1], [35]) в следующей формулировке.

ТЕОРЕМА БИРКГОФА. Для любой функции $\varphi \in L_\alpha(\Omega)$, $\alpha \geq 1$, и любой ограниченной области $D \subset \mathbb{R}^{n-1}$ почти наверное выполняется равенство

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\text{mes } D} \int_D \varphi(T_{x/\varepsilon} \omega) dx = \int_\Omega \varphi(\omega) \mu(d\omega) \equiv \langle \varphi \rangle.$$

Угловыми скобками мы обозначаем интеграл по Ω с мерой μ , т.е. математическое ожидание. Из теоремы Биркгофа следует, что функции $\varphi(T_{x/\varepsilon} \omega)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ почти наверное слабо сходятся к $\langle \varphi \rangle$ в $L_\alpha^{\text{loc}}(\mathbb{R}^{n-1})$.

Однородные множества мы будем использовать для построения семейств $\{\Gamma_\varepsilon\}$ мелкомасштабных множеств ячеистой структуры. Если $V(\omega) \in \mathbb{R}^{n-1}$ – однородное множество, то его гомотетические сжатия в $1/\varepsilon$ раз $\{\varepsilon V(\omega)\}$ образуют такое семейство на

$(n-1)$ -мерном многообразии ∂D . В дальнейшем мы будем употреблять одно и то же обозначение $\varepsilon V(\omega)$ для однородного мелкомасштабного множества в $\mathbb{R}^{n-1}$ и для множества в $\mathbb{R}^n$, образованного точками $\{(x, z) \in \partial D : x \in \varepsilon V(\omega), z = 0\}$, где под x подразумеваются локальные координаты на ∂D , а под z – координата вдоль нормали к ∂D . Чтобы не усложнять повествование деталями, связанными с криволинейностью локальных координат (x, z) в $\mathbb{R}^n$, мы рассмотрим в качестве области D единичный куб $D = \{(x, z) : 0 < x_i < 1, 0 < z < 1\}$ и будем считать, что смешанные граничные условия в (1) заданы лишь на одной грани, а на всех остальных выставлено однородное условие Дирихле. Таким образом, $\Gamma_\varepsilon = (\partial D \setminus Q) \cup (Q \cap \varepsilon V(\omega))$, где $Q = \{(x, z) : 0 < x_i < 1, z = 0\}$ – одна из граней куба.

Для того чтобы семейство $\{\Gamma_\varepsilon\}$ было самоподобным в смысле определения 1, нам потребуются дополнительные свойства однородного множества $V(\omega)$, порождающего это семейство. Потребуем невырожденности $V(\omega)$ (определение 4), что обеспечит самоподобие семейства $\{\Gamma_\varepsilon\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Случайное однородное замкнутое множество $V(\omega) \subset \mathbb{R}^{n-1}$ называется *невырожденным*, если существует положительная статистически однородная функция $h = h(\omega)$ такая, что для почти всех ω и любой функции $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus V(\omega))$ с компактным носителем, не содержащим $V(\omega)$, выполнено неравенство

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} h(T_x \omega) \varphi^2(x, 0) dx \leq \int_0^\infty dz \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\nabla \varphi(x, z)|^2 dx, \quad (12)$$

при этом

$$\langle h^{-(1+\delta)} \rangle < +\infty \quad (13)$$

с некоторым $\delta, 0 < \delta \leq +\infty$.

Условие невырожденности $V(\omega)$ будет использовано ниже для исследования вспомогательной задачи (16). Эта задача сводится к некоторому псевдодифференциальному уравнению в области $\mathbb{R}^{n-1} \setminus V$. Оценки (12), (13) гарантируют ее разрешимость. В [29], [30] похожие условия использовались для доказательства разрешимости некоторых уравнений в случайных неограниченных областях в связи с проблемой усреднения течений вязкой жидкости в пористой среде.

При $h = \text{const} > 0$ неравенство (12) фактически означает непрерывность вложения $H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1} \setminus V(\omega))$ в $L_2(\mathbb{R}^{n-1} \setminus V(\omega))$. Для ограниченных областей непрерывность этого вложения имеет место (см. [3], [36]), а для неограниченных ее может и не быть. Если, например, область $\mathbb{R}^{n-1} \setminus V(\omega)$ содержит шар большого радиуса R , то из соображений подобия нетрудно установить, что константа h в неравенстве (12) по порядку величины не должна превышать $1/R$. Конкретные модели случайных множеств конструируются, как правило, так, что для любого $R > 0$ найдется шар радиуса R в $\mathbb{R}^{n-1}$, не пересекающийся с $V(\omega) \subset \mathbb{R}^{n-1}$. Очевидно, что в этом случае неравенство (12) с $h = \text{const}$ не выполняется. Однако оно может иметь место, если весовая функция $h(T_x \omega)$ будет принимать значения тем меньшие, чем более точка $x \in \mathbb{R}^{n-1}$ удалена от $V(\omega)$. При этом, вообще говоря, может нарушаться неравенство (13), так как функция h^{-1} оказывается неограниченной.

Ниже мы приведем способ построения весовой функции h , пригодный для весьма широкого класса моделей случайных множеств.

Пусть область $V(\omega)$ получается объединением в $\mathbb{R}^{n-1}$ шаров радиусов $\rho_i > 0$ с центрами в изолированных точках y_i . Шарам разрешается перекрываться друг с другом. Введем следующие обозначения. Пусть $\tilde{r} = r_\omega(y)$ – расстояние от точки $y \in \mathbb{R}^{n-1}$ до ближайшего центра y_i , $\tilde{\rho} = \rho_\omega(y)$ – радиус шара с центром y_i , ближайшим к y . Если $V(\omega)$ – статистически однородная область, то функции $\tilde{r}$ и $\tilde{\rho}$ тоже статистически однородны.

Они являются локальными характеристиками случайного множества $V(\omega)$, статистические свойства которых для большинства конкретных моделей случайных структур легко контролируются. Мы выразим h из (12) через функции $\tilde{r}$ и $\tilde{\rho}$. Таким образом, неравенство (13) в определении 4 станет эффективно проверяемым.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Неравенство (12) выполняется, если в качестве h взять функцию*

$$h = \frac{1}{\tilde{\rho}} H\left(\frac{\tilde{r}}{\tilde{\rho}}\right), \quad H(t) = \begin{cases} \frac{1}{2t^3} & \text{при } n = 2, \\ \frac{1}{8t^3 \ln(t+1)} & \text{при } n = 3, \\ \frac{n-3}{4t^{2n-3}} & \text{при } n > 3. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разобьем $\mathbb{R}^{n-1}$ на измеримые подмножества V_i , состоящие из точек, для которых y_i – ближайший центр. Если множество центров $\{y_i\}$ не имеет точек накопления, то V_i – это некоторые полиэдры. В каждом из них введем полярные координаты (r, θ) , где $r = |y - y_i|$, θ – полярные углы. Полиэдры звездны относительно центра, поэтому их границы задаются в полярных координатах однозначными функциями $r = R(\theta)$. Внутри каждого полиэдра функция $\rho_\omega(y)$ принимает постоянное значение $\tilde{\rho} > 0$.

Для каждой точки $M \in V_i$ с координатами $(\tilde{r}, \theta)$, $\tilde{r} > \tilde{\rho}$, положим $\tilde{a} = \tilde{\rho}^2/\tilde{r}$ и построим точку $\tilde{M} \in V_i$ с координатами $(\tilde{a}, \theta)$, $0 < \tilde{a} < \tilde{\rho}$. Соединим точки M и $\tilde{M}$ кривой l в цилиндре $V_i \times [0, \infty)$, которая задается в цилиндрических координатах (r, θ, z) уравнением

$$z = \frac{(\tilde{r} - r)(r - \tilde{a})}{\tilde{r} - \tilde{a}}, \quad \theta = \text{const}, \quad \tilde{a} \leq r \leq \tilde{r}.$$

Рассмотрим произвольную функцию $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus V(\omega))$ с компактным носителем, для которой необходимо проверить неравенство (12). В каждом цилиндре $V_i \times [0, \infty)$ $\varphi(r, \theta, 0) \equiv 0$ при $r < \tilde{\rho}$. Представим значение φ в точке $(\tilde{r}, \theta, 0)$, $\tilde{r} > \tilde{\rho}$, в виде интеграла вдоль кривой l :

$$\varphi(\tilde{r}, \theta, 0) = \int_{\tilde{a}}^{\tilde{r}} \frac{d\varphi}{dr} dr,$$

где

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{dz}{dr}$$

– производная вдоль кривой l . Очевидно,

$$\left| \frac{d\varphi}{dr} \right| \leq |\nabla \varphi| \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dr} \right)^2}.$$

Используя неравенство Шварца–Коши–Буняковского, получим

$$\varphi^2(\tilde{r}, \theta, 0) \leq \int_{\tilde{a}}^{\tilde{r}} |\nabla \varphi|^2 \left(1 + \left(\frac{dz}{dr} \right)^2 \right) r^{n-2} dr \int_{\tilde{a}}^{\tilde{r}} \frac{dt}{t^{n-2}}. \quad (14)$$

Введем обозначение

$$I = I(\theta) = \int_{\tilde{\rho}}^{R(\theta)} \varphi^2(\tilde{r}, \theta, 0) \frac{1}{\tilde{\rho}} H\left(\frac{\tilde{r}}{\tilde{\rho}}\right) \tilde{r}^{n-2} d\tilde{r}.$$

После интегрирования $I(\theta)$ по полярным углам и суммирования по всем полиэдрам V_i получится левая часть доказываемого неравенства (12). Из (14) получим оценку

$$I \leq \int_{\tilde{\rho}}^{R(\theta)} \left(\int_{\tilde{a}}^{\tilde{r}} \left(|\nabla \varphi|^2 \left(1 + \left(\frac{dz}{dr} \right)^2 \right) r^{n-2} \frac{1}{\tilde{\rho}} H\left(\frac{\tilde{r}}{\tilde{\rho}}\right) \tilde{r}^{n-2} \left(\int_{\tilde{a}}^{\tilde{r}} \frac{dt}{t^{n-2}} \right) \right) dr \right) d\tilde{r}.$$

В этой оценке мы перейдем от переменных интегрирования $(\tilde{r}, r)$ к переменным (r, z) . Якобиан перехода имеет вид

$$\frac{dz}{d\tilde{r}} = \frac{\tilde{r}(r - \tilde{a})^2 + \tilde{a}(\tilde{r} - r)^2}{\tilde{r}(\tilde{r} - \tilde{a})^2} > 0.$$

Прямыми вычислениями устанавливаются неравенства

$$1 + \left(\frac{dz}{dr} \right)^2 \Big|_{\tilde{a} \leq r \leq \tilde{r}} \leq 2, \quad \frac{dz}{d\tilde{r}} \Big|_{\tilde{a} \leq r \leq \tilde{r}} \geq \frac{\tilde{a}}{\tilde{r} + \tilde{a}}.$$

Таким образом,

$$I \leq 2 \int_{\tilde{\rho}}^R \left(\int_{\tilde{a}}^{\tilde{r}} \left(|\nabla \varphi|^2 r^{n-2} \frac{dz}{d\tilde{r}} \tilde{r} \max_{\tilde{r}, \tilde{\rho} \leq \tilde{r} \leq R} \left\{ \frac{1}{\tilde{\rho}} H\left(\frac{\tilde{r}}{\tilde{\rho}}\right) \tilde{r}^{n-2} \left(\frac{\tilde{a}}{\tilde{r} + \tilde{a}} \right)^{-1} \int_{\tilde{a}}^{\tilde{r}} \frac{dt}{t^{n-2}} \right\} \right) dr \right) d\tilde{r}.$$

Функция $H(t)$ выбрана так, что

$$2 \max_{\tilde{r}, \tilde{\rho} \leq \tilde{r} \leq R} \left\{ \frac{1}{\tilde{\rho}} H\left(\frac{\tilde{r}}{\tilde{\rho}}\right) \tilde{r}^{n-2} \left(\frac{\tilde{a}}{\tilde{r} + \tilde{a}} \right)^{-1} \int_{\tilde{a}}^{\tilde{r}} \frac{dt}{t^{n-2}} \right\} \leq 1$$

для всех $\tilde{\rho}$ и R . Учитывая это при переходе от $(\tilde{r}, r)$ к (z, r) и увеличивая область интегрирования, получим

$$I \leq \int_{\tilde{\rho}}^{R(\theta)} \left(\int_{\tilde{a}}^{\tilde{r}} \left(|\nabla \varphi|^2 r^{n-2} \frac{dz}{d\tilde{r}} \right) dr \right) d\tilde{r} \leq \int_0^\infty \left(\int_0^{R(\theta)} |\nabla \varphi|^2 r^{n-2} dr \right) dz.$$

После интегрирования по полярным углам и суммирования по i получаем (12), что и требовалось.

3. Теорема усреднения. Если семейство мелкомасштабных множеств $\Gamma_\varepsilon \subset \partial D$ порождено невырожденным однородным множеством $V(\omega)$, то асимптотика решений u_ε задачи (1) может быть описана более подробно, чем в теореме 1. Напомним, что мы рассматриваем в качестве области D единичный куб, $\Gamma_\varepsilon = (\partial D \setminus Q) \cup (Q \cap \varepsilon V(\omega))$ и Q – одна из граней куба.

ТЕОРЕМА 2. Если $V(\omega)$ – невырожденное замкнутое множество с показателем $\delta > 0$ в определении 4, то почти наверное $\{\Gamma_\varepsilon\}$ – самоподобное семейство с показателем $s = 1 + \delta/(2 + \delta)$ и для последовательности решений u_ε задачи (1) справедливы утверждения теоремы 1. При этом предельная функция u^* единственна и неслучайна. Граничная функция $C(x)$ не зависит от выбора подпоследовательности, обращается в 0 на $\partial D \setminus Q$, а на Q равна положительной константе.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала докажем самоподобие семейства $\{\Gamma_\varepsilon\}$. Пусть φ – гладкая функция в $\overline{D}$ с носителем в $\overline{D} \setminus \Gamma_\varepsilon$. Положим $s = 1 + \delta/(2 + \delta)$, $\alpha = 2/s$, $\beta = 2/(2 - s)$, так что $1/\alpha + 1/\beta = 1$. В силу неравенства Гёльдера имеем

$$\int_Q |\varphi|^s dx \leq \left(\int_Q h(T_{x/\varepsilon}\omega) |\varphi|^2 dx \right)^{1/\alpha} \left(\int_Q h^{-\beta/\alpha}(T_{x/\varepsilon}\omega) dx \right)^{1/\beta}, \quad (15)$$

где Q – та грань куба D , в которой содержится множество $\partial D \setminus \Gamma_\varepsilon$, а $h(\omega)$ – весовая функция из определения невырожденности 4.

В неравенстве (12) произведем масштабное преобразование переменных $(x, z) \mapsto (x/\varepsilon, z/\varepsilon)$. Тогда первый сомножитель в правой части (15) оценивается интегралом по кубу D :

$$\int_Q h(T_{x/\varepsilon}\omega) \varphi^2(x, 0) dx \leq \varepsilon \int_D |\nabla \varphi|^2 dx dz.$$

Второй же сомножитель вследствие теоремы Биркгофа почти наверное имеет конечный предел равный $\langle h^{-(1+\delta)} \rangle^{1/\beta}$, так как $\beta/\alpha = 1 + \delta$. Таким образом, из (15) вытекает неравенство (2). Это означает, что с вероятностью 1 семейство $\{\Gamma_\varepsilon\}$ самоподобно и для решений u_ε справедливы утверждения теоремы 1.

Граничная функция $C(x)$ является предельной для последовательности решений w_ε вспомогательной задачи (8). В условиях теоремы 2 на $\partial D \setminus Q$ $w_\varepsilon = 0$, поэтому на всех гранях куба D , кроме Q , $C(x) \equiv 0$ независимо от выбора подпоследовательности $\varepsilon_k \rightarrow 0$. Осталось показать, что на Q граничная функция $C(x)$ определяется единственным образом и равна положительной неслучайной константе.

Наряду с (8) рассмотрим следующую вспомогательную задачу в $\mathbb{R}_+^n = \mathbb{R}^{n-1} \times [0, +\infty)$:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial^2 W}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} &= 0 \quad \text{в } \mathbb{R}_+^n, \\ W &= 0 \quad \text{на } V(\omega), \\ \frac{\partial W}{\partial z} &= -1 \quad \text{на } \mathbb{R}^{n-1} \setminus V(\omega). \end{aligned} \quad (16)$$

Уравнения (16) соответствуют вспомогательной задаче (8) и формально получены из нее заменой $(x, z) \mapsto (x/\varepsilon, z/\varepsilon)$. Более существенным отличием является неограниченность области $\mathbb{R}_+^n$. Опишем функциональное пространство, в котором мы будем искать решения (16).

Пусть $\mathbf{S}$ – линейное пространство функций $W: \Omega \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, реализации $W(T_x \omega, z)$ которых суть гладкие функции в $\mathbb{R}_+^n$, равномерно по $\omega \in \Omega$ ограниченные вместе с производными и имеющие носитель в $\mathbb{R}_+^n \setminus V(\omega)$, ограниченный в направлении z . На $\mathbf{S}$ определен оператор, соответствующий задаче (16). Решение этой задачи будем искать на замыкании $\mathbf{S}$ в подходящей норме.

Для невырожденных областей $V(\omega)$ функции из $\mathbf{S}$ обладают следующими свойствами.

ЛЕММА 1. *Для любой функции $W \in \mathbf{S}$ выполнены неравенства*

$$\langle W^2(\omega, 0)h(\omega) \rangle \leq \int_0^\infty \langle |\nabla W(T_x \omega, z)|^2 \rangle dz, \quad (17)$$

$$\langle |W(\omega, 0)|^t \rangle^{1/t} \leq C(t) \langle W^2(\omega, 0)h(\omega) \rangle^{1/2}, \quad (18)$$

где $h(\omega)$ – весовая функция из определения невырожденности 4, t – постоянное число, $1 \leq t \leq s = 1 + \delta/(2 + \delta)$, а $C(t)$ – положительная константа, $C(1) = \langle h^{-1} \rangle^{1/2}$.

Доказательство леммы 1 будет дано ниже. Отметим, что вследствие инвариантности вероятностной меры μ относительно сдвигов T_x выражение в правой части (17) не зависит от x . Это выражение обладает свойствами квадрата нормы, и замыкание пространства $\mathbf{S}$ по этой норме мы обозначим через $\overline{\mathbf{S}}$. Неравенство (18) показывает, что для функций $W \in \overline{\mathbf{S}}$ корректно определен след $W(\omega, 0)$ и оператор следа непрерывно действует из $\overline{\mathbf{S}}$ в $L_s(\partial\Omega)$.

Решением вспомогательной задачи (16) мы назовем реализацию $W(T_x \omega, z)$ функции $W \in \overline{\mathbf{S}}$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\int_0^\infty \langle \nabla W(T_x \omega, z) \nabla W'(T_x \omega, z) \rangle dz = \langle W'(T_x \omega, 0) \rangle \quad (19)$$

для любой функции $W' \in \overline{\mathbf{S}}$. Это тождество получается, если формально умножить уравнение Лапласа в (16) на $W'(T_x \omega, z)$, проинтегрировать полученное равенство по $\Omega \times [0, \infty)$ и перебросить производные с W на W' в соответствии с правилами интегрирования по частям.

Из леммы 1 следует, что билинейная форма и линейный функционал в (19) удовлетворяют условиям леммы Лакса–Мильграма. Таким образом, обобщенное решение $W \in \overline{\mathbf{S}}$ задачи (16) существует и единственно. Кроме того, при $W = W'$ из (19) получается оценка

$$\langle W(\omega, 0) \rangle \leq \langle h^{-1} \rangle. \quad (20)$$

Реализации $W(T_x \omega, z)$ обобщенного решения удовлетворяют уравнениям (16) не только в смысле (19), но и локально как функции из $W_{\text{loc}}^{1,2}(\mathbb{R}_+^n)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Для почти всех $\omega \in \Omega$ реализации $W(T_x\omega, z)$ решения задачи (16) принадлежат $W_{\text{loc}}^{1,2}(\mathbb{R}_+^n)$ и удовлетворяют интегральному тождеству

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} \nabla W(T_x\omega, z) \nabla \psi(x, z) dx dz = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \psi(x, 0) dx \quad (21)$$

для любой гладкой функции $\psi(x, z)$ с компактным носителем в $\mathbb{R}_+^n \setminus V(\omega)$.

Доказательство похожего утверждения, примененного в более общих ситуациях, можно найти в [1], и мы его не приводим. В рассматриваемом случае можно показать, что с вероятностью 1 (почти наверное) функции $W(T_x\omega, z)$ бесконечно дифференцируемы в $\mathbb{R}_+^n \setminus V(\omega)$ и удовлетворяют в обычном смысле как уравнению Лапласа, так и условию Неймана в (16).

Нам потребуется тождество (21) в несколько измененном виде:

$$\varepsilon \int_{\mathbb{R}_+^n} \nabla W\left(T_{x/\varepsilon}\omega, \frac{z}{\varepsilon}\right) \nabla v(x, z) dx dz = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} v(x, 0) dx. \quad (22)$$

Здесь $v(x, z)$ – гладкая функция с носителем в $\mathbb{R}_+^n \setminus \varepsilon V(\omega)$. Тождество (22) получено из (21) масштабным преобразованием координат.

Пусть $\theta \in C^\infty(\overline{D})$ – гладкая функция в кубе D с носителем, содержащимся в $D \cup Q$ (т.е. $\theta \equiv 0$ на всех гранях куба, кроме Q). В тождество (22) подставим $v = \theta(x, z)w_\varepsilon(x, z)$, где w_ε – решение задачи (8), а в тождестве (9) положим $v = \theta(x, z)W(T_{x/\varepsilon}\omega, z/\varepsilon)$. Вычитая одно полученное равенство из другого, имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon \int_D \left(w_\varepsilon(x, z) \nabla W\left(T_{x/\varepsilon}\omega, \frac{z}{\varepsilon}\right) - W\left(T_{x/\varepsilon}\omega, \frac{z}{\varepsilon}\right) \nabla w_\varepsilon(x, z) \right) \theta(x, z) dx dz \\ = \int_Q \left(w_\varepsilon(x, 0) - W\left(T_{x/\varepsilon}\omega, \frac{z}{\varepsilon}\right) \right) \theta(x, 0) dx. \end{aligned}$$

Перейдем к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$. Левая часть стремится к 0 аналогично левой части равенства (11) в доказательстве теоремы 1. В правой части функции $W(T_{x/\varepsilon}\omega, 0)$ слабо сходятся к $\langle W(\omega, 0) \rangle$ в $L_s(Q)$ вследствие эргодичности, а функции $w_\varepsilon(x, 0)$ сходятся к $C(x)$ по некоторой подпоследовательности $\varepsilon_k \rightarrow 0$ по теореме 1. Так как $\theta(x, z)$ – произвольная функция, на Q выполнено $C(x) \equiv \langle W(\cdot, 0) \rangle$ независимо от выбора подпоследовательности. Следовательно, вся последовательность $w_\varepsilon(x, 0)$ на Q сходится к этому неслучайному пределу. Полагая в тождестве (19) $W' = W$, получим, что $\langle W(\cdot, 0) \rangle \geq 0$. Равенство имеет место в вырожденном случае, когда линейный функционал в правой части (19) равен 0 для всех $W' \in \overline{\mathcal{S}}$, т.е. когда множество $V(\omega)$ для почти всех ω совпадает с $\mathbb{R}^{n-1}$. Для $C(x)$ справедлива также оценка сверху (20).

Таким образом, для завершения доказательства теоремы 2 осталось обосновать лемму 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1. Пусть B и B_1 — шары в $\mathbb{R}^{n-1}$ с общим центром и радиусами R и $R(1+r)$, $r > 0$, соответственно. Построим гладкую срезающую функцию $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$ с носителем в B_1 такую, что $\psi \equiv 1$ на B , $|\psi| \leq 1$, $|\nabla \psi| \leq 2/(rR)$. В неравенстве (12) положим $\varphi(x, z) = \psi(x)W(T_x\omega, z)$, $W \in \mathcal{S}$. Получим

$$\int_{B_1} h(T_x\omega) \psi^2(x) W^2(T_x\omega, 0) dx \leq \int_0^\infty \int_{B_1} |\nabla(\psi(x)W(T_x\omega, z))|^2 dx dz,$$

откуда следует оценка

$$\begin{aligned} & \int_B h(T_x\omega) W^2(T_x\omega, 0) dx \\ & \leq \int_0^\infty \int_{B_1} \left((1+m) |\nabla W(T_x\omega, z)|^2 + \left(\frac{2}{rR} \right)^2 \left(1 + \frac{1}{m} \right) W^2(T_x\omega, z) \right) dx dz. \end{aligned}$$

Мы воспользовались очевидным неравенством $(a+b)^2 \leq (1+m)a^2 + (1+1/m)b^2$ для произвольного $m > 0$ и свойствами срезающей функции ψ . Поделим обе части неравенства на объем шара B и перейдем к пределу при $R \rightarrow \infty$. По эргодической теореме эти пределы существуют почти наверное. Получим

$$\langle h(\cdot) W^2(\cdot, 0) \rangle \leq (1+m)(1+r)^{n-1} \int_0^\infty \langle |\nabla W(T_x \cdot, z)|^2 \rangle dz.$$

Отсюда, устремляя параметры m и r к 0, получим (17). Оценка (18) получается в результате применения неравенства Гёльдера:

$$\langle |W(\cdot, 0)|^t \rangle = \langle |W(\cdot, 0)|^t h^{t/2}(\cdot) h^{-t/2}(\cdot) \rangle \leq \langle W^2(\cdot, 0) h(\cdot) \rangle^{t/2} \langle h^{-t/(2-t)}(\cdot) \rangle^{(2-t)/2}.$$

Поскольку $t/(2-t) \leq 1 + \delta$, второй сомножитель правой части неравенства конечен согласно (13). Лемма 1 доказана.

Теперь доказательство теоремы 2 завершено полностью.

Авторы очень признательны профессору В. А. Кондратьеву за предоставленное доказательство предложения 1 о сильной компактности последовательности гармонических функций.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А. Усреднение дифференциальных операторов. М.: Физматлит, 1993.
- [2] Марченко В. А., Хруслов Е. Я. Краевые задачи в областях с мелкозернистой границей. Киев: Наукова думка, 1974.
- [3] Санчес-Паленсия Э. Неоднородные среды и теория колебаний. М.: Мир, 1984.
- [4] Беляев А. Г. Усреднение третьей краевой задачи для уравнения Пуассона в области с быстро осциллирующей границей // Вестн. МГУ. Сер. I. Матем., мех. 1988. № 6. С. 63–66.
- [5] Беляев А. Г. О сингулярных возмущениях краевых задач. Дисс. ... к.ф.-м.н. М.: МГУ, 1990.
- [6] Bouchitte G., Lidouh A., Michel J. C., Suquet P. Might Boundary Homogenization Help to Understand Friction? SMR 719/9. Trieste: Internat. Centre for Theoretical Physics, 1993.
- [7] Bouchitte G., Lidouh A., Suquet P. Homogénéisation de frontière pour la modélisation du contact entre un corps déformable non-linéaire et un corps rigide // C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I. Math. 1991. V. 313. P. 967–972.
- [8] Беляев А. Г., Михеев А. Г., Шамаев А. С. Дифракция плоской волны на быстро осциллирующей поверхности // ЖВМиМФ. 1992. Т. 32. № 8. С. 1258–1272.
- [9] Мовчан А. Б., Назаров С. А. Влияние малых неровностей поверхности на напряженное состояние тела и энергетический баланс при росте трещины // ПММ. 1991. Т. 55. № 5. С. 819–828.
- [10] Oleinik O. A., Shamaev A. S., Yosifian G. A. Mathematical Problems in Elasticity and Homogenization. Amsterdam: North-Holland, 1992.
- [11] Пятницкий А. Л., Чечкин Г. А. О задаче Неймана в областях с быстрым нарастанием осцилляции границы // УМН. 1996. Т. 51. № 5. С. 166–167.
- [12] Sanchez-Palencia E. Homogenization Techniques for Composite Media. Berlin–New York: Springer, 1987.
- [13] Sanchez-Palencia E., Suquet P. Friction and homogenization of a boundary // Free Boundary Problems: Theory and Applications / ed. A. Fasano, M. Primicerio. London: Pitman, 1983. P. 561–571.
- [14] Chechkin G. A., Friedman A., Piatnitski A. L. The Boundary Value Problem in Domains with Very Rapidly Oscillating Boundary. INRIA Rapport de Recherche № 3062 (Décembre 1996). Sophia Antipolis: Unité de Recherche, Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique, 1996.
- [15] Belyaev A. G., Chechkin G. A., Piatnitski A. L. Asymptotic Behavior of Solutions for Boundary Value Problems in a Perforated Domain with Oscillating Boundary. Publications du Laboratoire d'Analyse. № R98000 (July 1998). Paris: Université P. et M. Curie, CNRS, 1998.
- [16] Беляев А. Г., Пятницкий А. Л., Чечкин Г. А. Асимптотическое поведение решения краевой задачи в перфорированной области с осциллирующей границей // Сиб. матем. ж. 1998. Т. 39. № 4. С. 730–754.
- [17] Butazzo G., Dal Maso G., Mosco U. Asymptotic Behavior for Dirichlet Problems in Domains Bounded by Thin Layers. Preprint di Matematica № 2. Pisa: Scuola Norm. Sup., 1987.
- [18] Чечкин Г. А. Усреднение краевых задач с сингулярным возмущением граничных условий // Матем. сб. 1993. Т. 184. № 6. С. 99–150.
- [19] Чечкин Г. А. Окраевых задачах для эллиптического уравнения второго порядка с осциллирующими граничными условиями // Неклассические дифференциальные уравнения в частных производных. Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1988. С. 95–104.
- [20] Чечкин Г. А. Об асимптотических свойствах частично закрепленной мембраны // УМН. 1989. Т. 44. № 4. С. 227.
- [21] Олейник О. А., Чечкин Г. А. Окраевых задачах для эллиптических уравнений с быстро меняющимся типом граничных условий // УМН. 1993. Т. 48. № 6. С. 163–164.

- [22] Олейник О. А., Чечкин Г. А. Окраевых задачах для системы теории упругости с быстро меняющимся типом граничных условий // УМН. 1994. Т. 49. № 4. С. 114.
- [23] Чечкин Г. А. Полное асимптотическое разложение решения краевой задачи с быстро меняющимися граничными условиями в слое // УМН. 1993. Т. 48. № 4. С. 218–219.
- [24] Чечкин Г. А. О колебаниях тел с концентрированными массами, расположенными на границе // УМН. 1995. Т. 50. № 4. С. 105–106.
- [25] Чечкин Г. А. Асимптотическое разложение решения краевой задачи с быстро меняющимся типом граничных условий // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. 1996. Т. 19. С. 323–337.
- [26] Беляев А. Г., Чечкин Г. А. Усреднение смешанной краевой задачи для оператора Лапласа в случае, когда предельная задача неразрешима // Матем. сб. 1995. Т. 186. № 4. С. 47–60.
- [27] Олейник О. А., Чечкин Г. А. О поведении решений и собственных значений краевых задач с быстро меняющимися граничными условиями для системы теории упругости // Современные проблемы механики сплошной среды. Ростов-на-Дону: МП “Книга”, 1995. С. 167–172.
- [28] Chechkin G. A., Oleinik O. A. On the asymptotics of solutions and eigenvalues of the boundary value problems with rapidly alternating boundary conditions for the system of elasticity // Atti Accad. Naz. Lincei. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei (9). Mat. Appl. 1996. V. 7. № 1. P. 5–15.
- [29] Беляев А. Ю., Козлов С. М. Усреднение уравнений Стокса в случайной перфорированной области // УМН. 1993. Т. 48. № 4. С. 211–212.
- [30] Beliaev A. Yu., Kozlov S. M. Darcy equation for random porous media // Comm. Pure Appl. Math. 1996. V. 49. № 1. P. 1–34.
- [31] Чечкин Г. А., Беляев А. Ю. Случайное граничное усреднение // Международная конференция “Функциональные пространства, теория приближений, нелинейный анализ” (г. Москва, 27 апреля – 3 мая 1995 г.). Тезисы докл. М., 1995. С. 296–298.
- [32] Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975.
- [33] Ройтберг Я. А., Шефтель З. Г. Теорема о гомеоморфизмах для эллиптических систем и ее приложения // Матем. сб. 1969. Т. 78(120). № 3. С. 446–472.
- [34] Iosida K. Functional Analysis. New York: Springer, 1965.
- [35] Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Общая теория. М.: ИЛ, 1962.
- [36] Темам Р. Уравнение Навье–Стокса. Теория и численный анализ. М.: Мир, 1981.

Институт водных проблем РАН

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

E-mail: chechkin@mech.math.msu.su

Поступило

08.05.96

Исправленный вариант

30.09.98