Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Владимиров, Замечания о минорантах лапласиана на геометрическом графе, *Матем. заметки*, 2015, том 98, выпуск 3, 467–469

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10760>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 11:55:36

Замечания о минорантах лапласиана на геометрическом графе

А. А. Владимиров

1. *Геометрическим графом* мы далее будем называть совокупность Γ из множества $\bigcup_{i=1}^n \{i\} \times [0, \ell_i]$ и конечного (возможно, пустого) списка “склеивающих” точки указанного множества равенств вида $(i, x_i) = (j, x_j)$, где $i, j \in 1, \dots, n$, $x_i \in \{0, \ell_i\}$ и $x_j \in \{0, \ell_j\}$. Без существенного ограничения общности рассмотрения мы также будем предполагать выполненным равенство $\sum_{i=1}^n \ell_i = 1$.

Для любой (частично определенной) функции $y: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ через y_i далее будем обозначать соответствующие отображения $y_i: [0, \ell_i] \rightarrow \mathbb{R}$ вида $y_i(x) \equiv y(i, x)$.

Под суммируемой функцией, определенной почти всюду на Γ , естественным образом понимается частичное отображение $y: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющее соотношениям $y_i \in L_1[0, \ell_i]$. Интегралом такой функции считается при этом величина

$$\int_{\Gamma} y dx \equiv \sum_{i=1}^n \int_0^{\ell_i} y_i dx.$$

Под $W_2^1(\Gamma)$ далее будем понимать пространство непрерывных функций $y: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющих соотношениям $y_i \in W_2^1[0, \ell_i]$. Норма функции $y \in W_2^1(\Gamma)$ определяется при этом равенством

$$\|y\|_{W_2^1(\Gamma)}^2 = \sum_{i=1}^n \int_0^{\ell_i} (|y'_i|^2 + |y_i|^2) dx.$$

В случае, когда $\mathbf{b}$ есть некоторый список вершин графа Γ , через $W_2^1(\Gamma, \mathbf{b})$ будем обозначать подпространство в $W_2^1(\Gamma)$, выделенное условием $y|_{\mathbf{b}} = 0$.

Под $W_2^{-1}(\Gamma, \mathbf{b})$ далее будем понимать пополнение пространства $L_2(\Gamma)$ по норме

$$\|y\|_{W_2^{-1}(\Gamma, \mathbf{b})} \equiv \sup_{\|z\|_{W_2^1(\Gamma, \mathbf{b})}=1} \int_{\Gamma} yz dx.$$

Через $\langle y, z \rangle$, где $y = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \in W_2^{-1}(\Gamma, \mathbf{b})$, $y_n \in L_2(\Gamma)$ и $z \in W_2^1(\Gamma, \mathbf{b})$, при этом будет обозначаться предел последовательности интегралов $\int_{\Gamma} y_n z dx$.

2. Рассмотрим семейство $P(\Gamma, \mathbf{b})$ непрерывных функций $y: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющих условию $y|_{\mathbf{b}} = 0$ и таких, что каждая из функций $y_i \in C[0, \ell_i]$ кусочно-линейна. Имеет место следующий простой факт.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.1. *Множество $P(\Gamma, \mathbf{b})$ плотно в пространстве $W_2^1(\Gamma, \mathbf{b})$.*

Обозначим для произвольно фиксированной функции $y \in P(\Gamma, \mathbf{b})$ через $\{\zeta_k\}_{k=0}^m$ упорядоченный по возрастанию набор ее значений в точках ее излома (включая в число таковых вершины графа Γ). Независимо от выбора индекса $k \in 1, \dots, m$ полный прообраз интервала $\Lambda_k \equiv (\zeta_{k-1}, \zeta_k)$ допускает представление

$$y^{-1}(\Lambda_k) = \bigsqcup_{l=1}^{s_k} \{i_{k,l}\} \times (\alpha_{k,l}, \beta_{k,l}),$$

в котором каждый из интервалов $(\alpha_{k,l}, \beta_{k,l})$ линейно отображается соответствующей функцией $y_{i_{k,l}}$ на интервал Λ_k . Тем самым, равноизмеримая с y неубывающая функция $Y \in$

$L_1[0, 1]$ непрерывна и кусочно-линейна, а также удовлетворяет соотношениям

$$\inf s_k^2 \times \int_0^1 |Y'|^2 dx = \inf s_k^2 \times \sum_{k=1}^m \frac{(\zeta_k - \zeta_{k-1})^2}{\sum_{l=1}^{s_k} (\beta_{k,l} - \alpha_{k,l})} \leq \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^{s_k} \frac{(\zeta_k - \zeta_{k-1})^2}{\beta_{k,l} - \alpha_{k,l}} = \int_{\Gamma} |y'|^2 dx.$$

При этом в случае выполнения условия

$$\text{“каждое ребро графа } \Gamma \text{ может быть включено в бесповторную цепь ребер, связывающую некоторые вершины из списка } \mathfrak{b} \text{”} \quad (1)$$

(ср. [1; теорема 1]) заведомо справедлива оценка $\inf s_k \geq 2$.

3. Далее всегда будет предполагаться, что граф Γ связан, а список $\mathfrak{b}$ непуст. Следуя методологии работ [2], [3], свяжем с формальной граничной задачей

$$\begin{cases} -y'' = \lambda r y, \\ y|_{\mathfrak{b}} = 0, \end{cases}$$

где $r \in W_2^{-1}(\Gamma)$ – некоторая неотрицательная обобщенная функция, линейный операторный пучок $L: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{B}(W_2^1(\Gamma, \mathfrak{b}), W_2^{-1}(\Gamma, \mathfrak{b}))$ вида

$$\langle L(\lambda)y, y \rangle \equiv \int_{\Gamma} |y'|^2 dx - \lambda \langle r, y^2 \rangle.$$

Целью настоящего пункта является нахождение априорной миноранты наименьшего собственного значения пучка L в случае $r = 1 + m\rho$, где $m \geq 0$ – фиксированная постоянная, а $\rho \in W_2^{-1}(\Gamma)$ – произвольная неотрицательная обобщенная функция со свойством $\langle \rho, 1 \rangle = 1$.

Согласно результатам предыдущего пункта независимо от выбора функции $y \in P(\Gamma, \mathfrak{b})$ справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \langle L(\lambda)y, y \rangle &\geq \int_{\Gamma} [|y'|^2 - \lambda y^2] dx - \lambda m \cdot \sup_{x \in \Gamma} y^2(x) \\ &\geq \int_0^1 [\theta^2 |Y'|^2 - \lambda Y^2] dx - \lambda m \cdot \sup\{Y^2(0), Y^2(1)\}, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\theta = 1$ в общем случае и $\theta = 2$ в случае выполнения условия (1). С учетом утверждения 2.1 и заведомого существования точки $a \in [0, 1]$ со свойством $Y(a) = 0$, это означает (ср. [4], [5]) неотрицательность оператора $L(\lambda)$ в случае, когда величина $\lambda \in \mathbb{R}$ минорирует наименьшие собственные значения всех граничных задач вида

$$\begin{cases} -\theta^2 y'' = \lambda(1 + m\delta_0)y, \\ y'(0) = y(a) = 0, \quad a \in (0, 1], \end{cases} \quad \begin{cases} -\theta^2 y'' = \lambda(1 + m\delta_1)y, \\ y(a) = y'(1) = 0, \quad a \in [0, 1). \end{cases}$$

Через $\delta_{\zeta} \in W_2^{-1}[0, 1]$ здесь обозначена дельта-функция Дирака с сосредоточенным в точке $\zeta \in [0, 1]$ носителем. Переписывая указанные задачи в эквивалентной форме

$$\begin{cases} -\theta^2 y'' = \lambda y, \\ y'(0) + \frac{\lambda m}{\theta^2} y(0) = y(a) = 0, \quad a \in (0, 1], \end{cases} \quad \begin{cases} -\theta^2 y'' = \lambda y, \\ y(a) = y'(1) - \frac{\lambda m}{\theta^2} y(1) = 0, \quad a \in [0, 1), \end{cases}$$

легко устанавливаем, что операторы $L(\lambda)$ неотрицательны при всех $\lambda \leq \lambda_0$, где через λ_0 обозначено решение уравнения

$$\frac{\sqrt{\lambda}}{\theta} = \operatorname{arccctg}\left(\frac{m\sqrt{\lambda}}{\theta}\right). \quad (3)$$

Тем самым, имеет место следующий факт.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.1. *Наименьшее собственное значение пучка L с весом $r = 1 + t\rho$, где $t \geq 0$, а $\rho \in W_2^{-1}(\Gamma)$ неотрицательна и удовлетворяет равенству $\langle \rho, 1 \rangle = 1$, минорируется решением уравнения (3).*

Утверждение 3.1 представляет собой уточнение и обобщение установленной в [1; п. 5] для $\rho \in W_2^{-1}(\Gamma)$ некоторого специального вида оценки наименьшего собственного значения пучка L величиной $\pi^2 \theta^2 \cdot (2 + 2m)^{-2}$.

4. Аналогичные проведенным в предыдущем пункте рассуждения позволяют оценить снизу также второе собственное значение пучка L . А именно, никакое двумерное подпространство линейного множества $P(\Gamma, \mathbf{b})$ не может не содержать нетривиальной функции y со свойством $\sup_{x \in \Gamma} y(x) + \inf_{x \in \Gamma} y(x) = 0$. При этом равноизмеримая с функцией $y \in P(\Gamma, \mathbf{b})$ неубывающая функция $Y \in W_2^1[0, 1]$ удовлетворяет равенству $Y(0) + Y(1) = 0$. Вместе с соотношениями (2) и утверждением 2.1 это означает, что квадратичная форма оператора $L(\lambda)$ не может быть отрицательно определена на каком-либо двумерном подпространстве пространства $W_2^1(\Gamma, \mathbf{b})$, если справедливо неравенство $\lambda \leq \lambda_0$, где через λ_0 обозначено наименьшее собственное значение граничной задачи

$$\begin{cases} -\theta^2 y'' = \lambda(1 + m\delta_1)y, \\ y(0) + y(1) = y'(0) + y'(1) = 0. \end{cases}$$

Тем самым, справедливо следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.1. *Второе собственное значение пучка L с весом $r = 1 + t\rho$, где $t \geq 0$, а $\rho \in W_2^{-1}(\Gamma)$ неотрицательна и удовлетворяет равенству $\langle \rho, 1 \rangle = 1$, минорируется решением уравнения*

$$\frac{\sqrt{\lambda}}{[2\theta]} = \operatorname{arccctg} \left(\frac{m\sqrt{\lambda}}{[2\theta]} \right).$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. Т. Диаб, П. А. Кулешов, О. М. Пенкин, *Матем. заметки*, **96**:6 (2014), 885–895. [2] М. И. Нейман-заде, А. А. Шкаликов, *Матем. заметки*, **66**:5 (1999), 723–733. [3] А. А. Владимиров, *Матем. заметки*, **75**:6 (2004), 941–943. [4] Ю. В. Егоров, В. А. Кондратьев, *УМН*, **51**:3 (1996), 73–144. [5] E. S. Karulina, A. A. Vladimirov, *Tatra Mt. Math. Publ.*, **54** (2013), 101–118.

А. А. Владимиров

Вычислительный центр им. А. А. Дородницына

Российской академии наук, г. Москва

E-mail: vladimi@mech.math.msu.su

Поступило

15.04.2015