Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. М. Пядёркин, Числа независимости случайных подграфов некоторого дистанционного графа, *Матем. заметки*, 2016, том 99, выпуск 2, 288–297

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10762>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 15:23:48

Числа независимости случайных подграфов некоторого дистанционного графа

М. М. Пядёркин

В данной работе рассматривается так называемый дистанционный граф $G(n, 3, 1)$, вершины которого можно отождествить с подмножествами размера 3 множества $\{1, 2, \dots, n\}$, а ребро между двумя вершинами проводится в том случае, если соответствующие подмножества пересекаются ровно по одному элементу.

Мы изучим некоторые свойства случайных подграфов графа $G(n, 3, 1)$ в модели Эрдеша–Реньи, в которой каждое ребро включается в подграф с некоторой фиксированной вероятностью p и независимо от остальных ребер. В работе найдена асимптотика числа независимости случайного подграфа $G(n, 3, 1)$.

Библиография: 24 названия.

DOI: 10.4213/mzm10762

1. Введение и формулировки результатов

Основным объектом изучения данной статьи являются так называемые *дистанционные графы*. А именно, пусть r и s – два натуральных числа, причем $s < r$. Определим дистанционный граф $G(n, r, s) = (V(n, r), E(n, r, s))$, где

$$V(n, r) = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \{0, 1\}, x_1 + x_2 + \dots + x_n = r\},$$
$$E(n, r, s) = \{\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} : (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = s\},$$

а $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ обозначает обычное евклидово скалярное произведение. Другими словами, вершины графа можно отождествить с r -элементными подмножествами множества $\{1, 2, \dots, n\}$, а ребро проводится между двумя вершинами в том случае, если соответствующие множества пересекаются ровно по s элементам. Графы $G(n, r, s)$ играют важную роль в комбинаторной геометрии и теории кодирования (см. [1]–[17]).

Нас будет интересовать конкретный граф с $r = 3$ и $s = 1$. Граф $G(n, 3, 1)$ был впервые изучен в работе [15] Надя, где он был использован для построения конструктивных оценок числа Рамсея (см. также [14]), а некоторые свойства графа $G(n, 3, 1)$ удивительным образом помогают при отыскании хроматического числа пространства $\mathbb{R}^n$ (см. [6]).

Настоящая работа выполнена при финансовой поддержке гранта Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 15-01-03530).

В настоящей работе мы изучим некоторые свойства *случайных подграфов* графа $G(n, 3, 1)$ в модели Эрдеша–Реньи (ср. [18]–[20]). А именно, пусть $p \in [0, 1]$, тогда случайный подграф $G_p(n, 3, 1)$ имеет то же множество вершин $V(n, 3)$, а каждое ребро графа $G(n, 3, 1)$ включается в подграф с вероятностью p независимо от остальных ребер, т.е. $G_p(n, 3, 1)$ – случайный элемент со значениями в множестве всех остовных подграфов $G = (V(n, 3), E)$ графа $G(n, 3, 1)$ и с биномиальным распределением:

$$P(G_p(n, 3, 1) = G) = p^{|E|}(1 - p)^{|E(n, 3, 1)| - |E|}.$$

Напомним, что *числом независимости* $\alpha(G)$ графа $G = (V, E)$ называется размер максимального множества его вершин, попарно не соединенных ребрами (такое множество само называется *независимым*):

$$\alpha(G) = \max\{|A| : \{x, y\} \notin E \text{ для всех } x, y \in A\}.$$

Нас будет интересовать число независимости случайного графа $G_p(n, 3, 1)$, где $p = 1/2$. Для этого случая в работах [21], [22] были доказаны две теоремы.

ТЕОРЕМА 1. *С асимптотической вероятностью 1 справедливо неравенство*

$$\alpha(G_{1/2}(n, 3, 1)) \leq 4(1 + o(1))n \log_2 n.$$

ТЕОРЕМА 2. *С асимптотической вероятностью 1 справедливо неравенство*

$$\alpha(G_{1/2}(n, 3, 1)) \geq 2(1 + o(1))n \log_2 n.$$

Основным результатом настоящей работы является

ТЕОРЕМА 3. *Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда с асимптотической вероятностью 1 справедливо неравенство*

$$\alpha(G_{1/2}(n, 3, 1)) \leq (2 + \varepsilon)n \log_2 n.$$

В сочетании с теоремой 2 это позволяет утверждать, что найдена асимптотика числа независимости графа $G_{1/2}(n, 3, 1)$ или, еще точнее, доказан закон больших чисел для случайной величины $\alpha(G_{1/2}(n, 3, 1))$.

Опишем дальнейшую структуру статьи. В следующем разделе будут приведены все необходимые конструкции и сформулированы все вспомогательные утверждения, а в конце раздела будет изложено доказательство теоремы 3. В последнем же разделе будет доказано каждое из вспомогательных утверждений.

2. Доказательство теоремы 3

2.1. Определения и формулировки вспомогательных утверждений. Для удобства введем дополнительные обозначения: пусть

$$d = \lfloor (\log_2 n)^{2/5} \rfloor \quad \text{и} \quad m = \lfloor (\log_2 n)^{4/5} \rfloor.$$

Также, если A – некоторое множество вершин графа $G(n, 3, 1)$, а i и j – два элемента из множества $\{1, 2, \dots, n\}$, то обозначим $A(i, j)$ множество вершин-троек из A , содержащих элементы i и j .

Будем говорить, что множество A является *плотной конструкцией*, если существуют такие $d + 1$ элементов $u, v_1, v_2, \dots, v_d$, что выполнены следующие условия:

- 1) $|A(u, v_i)| = m$, $i = 1, 2, \dots, d$;
- 2) $A = \bigcup_{i=1}^d A(u, v_i)$, т.е. каждая тройка множества A содержит элемент u и какой-либо из элементов v_i ;
- 3) $A(u, v_i) \cap A(u, v_j) = \emptyset$ при $i \neq j$, т.е. в множестве A не содержится троек вида (u, v_i, v_j) .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *С асимптотической вероятностью 1 никакая плотная конструкция не является независимым множеством в графе $G_{1/2}(n, 3, 1)$.*

Пусть A – некоторое множество вершин. По множеству A построим вспомогательный граф $R(A)$: вершинами этого графа будут элементы $\{1, 2, \dots, n\}$, а ребро между двумя элементами i и j проведем в том случае, если $|A(i, j)| > d + m$. Рассмотрим тройки из множества A , содержащие некоторый элемент i . Данные тройки естественным образом разбиваются на четыре класса.

К первому классу отнесем те тройки, которые содержат внутри себя хотя бы два ребра графа $R(A)$, т.е. такие тройки (i, j, k) , что среди трех пар элементов (i, j) , (i, k) и (j, k) найдутся хотя бы две, образующие в графе $R(A)$ ребро. Этот класс троек мы будем обозначать $Y_i(A)$.

Второй класс $X_i(A)$ будет состоять из тех троек (i, j, k) , которые содержат внутри себя ровно одно ребро графа $R(A)$, при этом не инцидентное элементу i , т.е. ребро (j, k) .

К третьему классу $W_i(A)$ отнесем те тройки, которые содержат внутри себя ровно одно ребро графа $R(A)$, но инцидентное вершине i (т.е. либо ребро (i, j) , либо ребро (i, k)).

Четвертый класс $Z_i(A)$ состоит из всех остальных троек, содержащих элемент i : тех, которые внутри себя не содержат ни одного ребра графа $R(A)$.

Введем также обозначения для размеров множеств:

$$x_i(A) = |X_i(A)|, \quad y_i(A) = |Y_i(A)|, \quad z_i(A) = |Z_i(A)|, \quad w_i(A) = |W_i(A)|,$$

$$\bar{x}(A) = \sum_{i=1}^n x_i(A), \quad \bar{y}(A) = \sum_{i=1}^n y_i(A), \quad \bar{z}(A) = \sum_{i=1}^n z_i(A), \quad \bar{w}(A) = \sum_{i=1}^n w_i(A).$$

Скажем, что множество вершин A содержит плотную конструкцию, если найдется подмножество $B \subseteq A$, являющееся плотной конструкцией. Суть введенных обозначений проясняется в следующих предложениях.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Если множество A не содержит плотной конструкции, то его размер равен*

$$\bar{x}(A) + \frac{\bar{z}(A)}{3} + o(n \log_2 n).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Число ребер внутри множества A , которое не содержит плотной конструкции, не меньше*

$$\frac{(\bar{x}(A) + \bar{z}(A))^2}{2n} + o((\bar{x}(A) + \bar{z}(A)) \log_2 n).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть даны четыре набора чисел x_i, y_i, z_i и $w_i, i = 1, 2, \dots, n$. Положим

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^n x_i, \quad \bar{y} = \sum_{i=1}^n y_i, \quad \bar{z} = \sum_{i=1}^n z_i, \quad \bar{w} = \sum_{i=1}^n w_i.$$

Тогда число способов выбрать множество A , которое не содержит плотной конструкции и для которого $x_i(A) = x_i, y_i(A) = y_i, z_i(A) = z_i$ и $w_i(A) = w_i$, не превосходит

$$2^{(1+o(1))(\bar{x}+\bar{z}) \log_2 n + o(n \log_2^2 n)}.$$

Отметим, что оценка, полученная с помощью классической теоремы Турана в работах [21], [22] (см. также [23], [24]), утверждает, что в любом множестве вершин графа $G(n, 3, 1)$, имеющем мощность k , найдется хотя бы $(1 + o(1))k^2/(2n)$ ребер. Более того, легко доказать, что эту оценку принципиально улучшить нельзя. Однако для множеств A , не содержащих плотной конструкции, предложение 2 дает приближение $k \approx \bar{x}(A) + \bar{z}(A)/3$, а стало быть, оценка числа ребер из предложения 3 примерно равна величине $(k + (2/3)\bar{z}(A))^2/(2n)$, которая, несомненно, больше величины $k^2/(2n)$ при больших $\bar{z}(A)$.

2.2. Доказательство теоремы. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Нам необходимо доказать стремление к нулю вероятности существования независимого множества $A \subset V(n, 3)$ размера больше $(2 + \varepsilon)n \log_2 n$. Очевидно,

$$\begin{aligned} P[\alpha(G_{1/2}(n, 3, 1)) \geq (2 + \varepsilon)n \log_2 n] \\ \leq P[\exists A, |A| > (2 + \varepsilon)n \log_2 n : A \text{ независимо в } G_{1/2}(n, 3, 1)]. \end{aligned}$$

Данную вероятность можно разбить на два слагаемых:

$$\begin{aligned} P[\exists A, |A| > (2 + \varepsilon)n \log_2 n, A \text{ содержит плотную конструкцию} : A \text{ независимо}] \\ + P[\exists A, |A| > (2 + \varepsilon)n \log_2 n, A \text{ не содержит плотной конструкции} : \\ A \text{ независимо}]. \end{aligned}$$

Первое слагаемое стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$ в силу предложения 1, а значит, мы можем перейти к оценке второго слагаемого. Согласно предложению 2 из того, что A не содержит плотной конструкции и $|A| > (2 + \varepsilon)n \log_2 n$, следует, что

$$\bar{x}(A) + \frac{\bar{z}(A)}{3} > \left(2 + \frac{\varepsilon}{2}\right)n \log_2 n$$

при достаточно большом n . Так как $\bar{z}(A) \geq 0$, то отсюда следует, что

$$\bar{x}(A) + \bar{z}(A) \geq \bar{x}(A) + \frac{\bar{z}(A)}{3} > \left(2 + \frac{\varepsilon}{2}\right)n \log_2 n,$$

а стало быть, искомая вероятность не превосходит

$$\begin{aligned} P\left[\exists A, A \text{ не содержит плотной конструкции, } \bar{x}(A) + \bar{z}(A) > \left(2 + \frac{\varepsilon}{2}\right)n \log_2 n : \right. \\ \left. A \text{ независимо в } G_{1/2}(n, 3, 1)\right]. \end{aligned}$$

Пусть теперь заданы числа x_i, y_i, z_i и $w_i, i = 1, 2, \dots, n$, и пусть $\bar{x} = \sum_{i=1}^n x_i$, а $\bar{z} = \sum_{i=1}^n z_i$. Тогда ввиду предложений 3 и 4 получаем, что

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \left[\exists A, A \text{ не содержит плотной конструкции, } \bar{x}(A) + \bar{z}(A) > \left(2 + \frac{\varepsilon}{2}\right) n \log_2 n, \right. \\ & \quad \left. x_i(A) = x_i, y_i(A) = y_i, z_i(A) = z_i, w_i(A) = w_i : A \text{ независимо в } G_{1/2}(n, 3, 1) \right] \\ & \leq 2^{(1+o(1))(\bar{x}+\bar{z}) \log_2 n + o(n \log_2^2 n)} 2^{-(1+o(1))(\bar{x}+\bar{z})^2/(2n) + o((\bar{x}+\bar{z}) \log_2 n)} \\ & = 2^{(1+o(1))(\bar{x}+\bar{z})(\log_2 n - (\bar{x}+\bar{z})/(2n)) + o(n \log_2^2 n)} \\ & \leq 2^{(1+o(1))(\bar{x}+\bar{z})(\log_2 n - (1+\varepsilon/4) \log_2 n) + o(n \log_2^2 n)} \leq 2^{-(\varepsilon/4+o(1))n \log_2^2 n}. \end{aligned}$$

Так как каждое из чисел x_i не превосходит общего числа вершин в графе $G(n, 3, 1)$ (которое есть $C_n^3 \leq n^3$), то число способов выбрать набор чисел $\{x_i\}$ не превосходит $\prod_{i=1}^n n^3 = n^{3n} = 2^{o(n \log_2^2 n)}$. Аналогичным образом оценивая число способов зафиксировать числа y_i, z_i и w_i , получаем, что

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \left[\exists A, A \text{ не содержит плотной конструкции, } \bar{x}(A) + \bar{z}(A) > \left(2 + \frac{\varepsilon}{2}\right) n \log_2 n : \right. \\ & \quad \left. A \text{ независимо в } G_{1/2}(n, 3, 1) \right] \\ & < 2^{o(n \log_2^2 n)} 2^{-(\varepsilon/4+o(1))n \log_2^2 n} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

что и завершает доказательство теоремы.

3. Доказательство вспомогательных утверждений

3.1. Доказательство предложения 1. Пусть A – плотная конструкция, образованная элементами $u, v_1, v_2, \dots, v_d$. Обозначим для удобства $A_i = A(u, v_i)$. Для доказательства предложения нам необходимо оценить число ребер графа $G(n, 3, 1)$ в множестве A ; для этого рассмотрим некоторую тройку $(u, v_i, w) \in A_i$. Отметим, что она соединена ребром с любой тройкой из множества A_j , за исключением единственной тройки (u, v_j, w) , которой может и не быть в множестве A_j . Поэтому каждая вершина множества A_i соединена ребром как минимум с $\sum_{j \neq i} (|A_j| - 1) = (d-1)(m-1)$ вершинами множества A и, стало быть, общее число ребер в множестве A не меньше

$$\frac{dm(d-1)(m-1)}{2} = (1+o(1)) \frac{(dm)^2}{2} = (1+o(1)) \frac{(\log_2 n)^{12/5}}{2},$$

так как $dm = (1+o(1))(\log_2 n)^{6/5}$.

Оценим теперь число способов выбрать множество A . Для этого необходимо выбрать $d+1$ элемент $u, v_1, v_2, \dots, v_d$ (это можно сделать C_n^{d+1} способами), а затем выбрать множества A_i , каждое из которых может быть выбрано не более чем C_n^m способами. Следовательно, общее число способов не превосходит

$$C_n^{d+1} (C_n^m)^d \leq n^{d+1} n^{md} = 2^{\log_2 n (d+1+md)} = 2^{(1+o(1))md \log_2 n} = 2^{(1+o(1))(\log_2 n)^{11/5}}.$$

Таким образом, вероятность существования независимой плотной конструкции не превосходит

$$2^{(1+o(1))(\log_2 n)^{11/5}} 2^{-(1+o(1))(\log_2 n)^{12/5}/2} = 2^{(1+o(1))((\log_2 n)^{11/5} - (1/2)(\log_2 n)^{12/5})} \rightarrow 0,$$

что и завершает доказательство предложения 1.

3.2. Доказательство предложения 2. Для доказательства нам потребуется три простых леммы.

ЛЕММА 1. *Если в графе $R(A)$ степень какого-либо элемента больше d , то множество A содержит плотную конструкцию.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть степень элемента u в графе $R(A)$ больше d . Это означает, что найдутся такие элементы $v_1, v_2, \dots, v_d$, что $|A(u, v_i)| > d + m$. Для каждого множества $A(u, v_i)$ рассмотрим подмножество

$$B_i = A(u, v_i) \setminus \bigcup_{j \neq i} A(u, v_j).$$

Отметим, что так как множества $A(u, v_i)$ и $A(u, v_j)$ при $j \neq i$ могут пересекаться лишь по одной тройке (u, v_i, v_j) , то размер каждого множества B_i не меньше $|A(u, v_i)| - d > d + m - d = m$. Это значит, что в каждом множестве B_i можно выделить подмножество C_i , имеющее размер ровно m . Рассмотрим множество $C = \bigcup_{i=1}^d C_i$, являющееся, конечно, подмножеством A . Нетрудно заметить, что оно удовлетворяет определению плотной конструкции: множества $C_i = C(u, v_i)$ имеют размер m и не пересекаются между собой.

ЛЕММА 2. *Если A не содержит плотной конструкции, то $|Y_i(A)| \leq 2d^2$ для любого элемента i . Как следствие, $\bar{y}(A) = o(n \log_2 n)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как A не содержит плотной конструкции, то по лемме 1 в графе $R(A)$ степень каждого элемента не больше d . Напомним, что множество $Y_i(A)$ состоит из тех троек (i, j, k) , внутри которых содержится хотя бы два ребра графа $R(A)$.

Множество $Y_i(A)$ в свою очередь может быть естественным образом разбито на два класса: к первому классу отнесем те тройки, в которых элементы i и j соединены ребром в графе $R(A)$ и элементы i и k соединены ребром (а элементы j и k могут быть как соединены, так и не соединены). Число таких троек не превосходит квадрата степени элемента i в графе $R(A)$, т.е. d^2 .

Ко второму классу отнесем остальные тройки, которые содержат ребро (i, j) и ребро (j, k) . Элемент j при этом является смежным с i в графе $R(A)$, а таких элементов не больше d . Элемент k является смежным с j , а так как степень элемента j также не превосходит d , то число троек из второго класса не превосходит d^2 .

Стало быть, число троек в множестве $Y_i(A)$ не превосходит $2d^2$. Суммируя по всем возможным i , получаем, что

$$\bar{y}(A) = \sum_{i=1}^n y_i(A) \leq 2nd^2 \leq 2n(\log_2 n)^{4/5} = o(n \log_2 n).$$

ЛЕММА 3. Набор множеств $X_i(A)$ однозначно определяет набор множеств $W_i(A)$. Кроме этого, $\bar{w}(A) = 2\bar{x}(A)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что множества $W = \bigcup_{i=1}^n W_i(A)$ и $X = \bigcup_{i=1}^n X_i(A)$ совпадают: каждое из них содержит те тройки, которые содержат внутри себя ровно одно ребро графа $R(A)$. Пусть (i, j, k) – одна из таких троек, т.е. к примеру элементы j и k и только они соединены ребром. Тогда эта тройка будет отнесена к множествам $X_i(A)$, $W_j(A)$ и $W_k(A)$. Таким образом, $\bar{w}(A) = 2\bar{x}(A)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 1. Для того чтобы оценить размер множества A , мы могли бы просто просуммировать размеры соответствующих множеств:

$$|A| = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n (x_i(A) + y_i(A) + z_i(A) + w_i(A)) = \frac{1}{3} (\bar{x}(A) + \bar{y}(A) + \bar{z}(A) + \bar{w}(A)),$$

где множитель возникает из-за того, что каждая тройка в этой сумме была посчитана три раза. Однако это выражение необходимо упростить. Используя лемму 2, мы можем утверждать, что $\bar{y}(A) = o(n \log_2 n)$, а в силу леммы 3 выполнено равенство $\bar{w}(A) = 2\bar{x}(A)$. В таком случае размер множества A есть

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} (\bar{x}(A) + \bar{y}(A) + \bar{z}(A) + \bar{w}(A)) &= \frac{1}{3} (3\bar{x}(A) + \bar{z}(A)) + o(n \log_2 n) \\ &= \bar{x}(A) + \frac{\bar{z}(A)}{3} + o(n \log_2 n). \end{aligned}$$

Тем самым, предложение 2 доказано.

3.3. Доказательство предложения 3. Для доказательства этого предложения нам также потребуется тривиальная

ЛЕММА 4. Пусть A – множество троек, каждая из которых содержит элемент i , причем для любого элемента j выполнено $|A(i, j)| \leq h$. Тогда число ребер графа $G(n, 3, 1)$ внутри множества A не меньше $|A|(|A| - 2h)/2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $(i, j, k) \in A$. Тогда если тройка (i, j', k') из множества A не соединена ребром с тройкой (i, j, k) , то она должна содержать либо элемент j , либо элемент k , т.е. число троек множества A , не соединенных с тройкой (i, j, k) , не превосходит $|A(i, j)| + |A(i, k)| \leq 2h$. Таким образом, каждая из троек множества A соединена хотя бы с $|A| - 2h$ тройками, а отсюда следует, что общее число ребер внутри множества A не меньше $|A|(|A| - 2h)/2$, где множитель $1/2$ появился потому, что каждое ребро было посчитано дважды.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 3. Приступим к оценке числа ребер внутри множества A . Для этого рассмотрим элемент i и соответствующее множество $X_i(A)$, а также произвольный элемент j . Так как тройка (i, j, k) относится в множество $X_i(A)$ лишь в том случае, если элементы j и k соединены ребром в графе $R(A)$, то число тех троек из $X_i(A)$, которые содержат элемент j , не превосходит степени элемента j в графе $R(A)$. Следовательно, число троек из $X_i(A)$, содержащих элемент j , не превосходит в силу леммы 1 числа d , а стало быть, и $d + m$.

Рассмотрим теперь множество $Z_i(A)$. Если бы существовало $d + m$ троек, содержащих и элемент i , и элемент j , то между элементами i и j было бы проведено

ребро в графе $R(A)$, а значит, никакая тройка (i, j, k) не была бы отнесена в множество $Z_i(A)$. Стало быть, множество троек из $Z_i(A)$, которые содержат элемент j , имеет размер, не превосходящий $d + m$.

Таким образом, если мы рассмотрим множество $A_i = X_i(A) \cup Z_i(A)$, то для каждого элемента j число троек в этом множестве, содержащих элемент j , не больше $2d + 2m$. Используя результат леммы 4 для $h = 2d + 2m$, получаем, что в множестве A_i есть хотя бы

$$\frac{(x_i(A) + z_i(A))(x_i(A) + z_i(A) - 2(2d + 2m))}{2}$$

ребер. Обозначая снова $\bar{x} = \bar{x}(A)$, $\bar{z} = \bar{z}(A)$ и суммируя по всем возможным i , получаем, что общее число ребер внутри множества A не меньше

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2} (x_i(A) + z_i(A))^2 - 2(x_i(A) + z_i(A))(d + m) \right) \\ = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_i(A) + z_i(A))^2 - 2(\bar{x}(A) + \bar{z}(A))(d + m). \end{aligned}$$

Отметим, что $\sum_{i=1}^n (x_i(A) + z_i(A)) = \bar{x}(A) + \bar{z}(A)$, поэтому сумму квадратов в последнем выражении можно оценить снизу как

$$\sum_{i=1}^n (x_i(A) + z_i(A))^2 \geq \frac{(\bar{x}(A) + \bar{z}(A))^2}{n}.$$

Это означает, что искомое число ребер не меньше

$$\frac{(\bar{x}(A) + \bar{z}(A))^2}{2n} - 2(\bar{x}(A) + \bar{z}(A))(d + m) = \frac{(\bar{x}(A) + \bar{z}(A))^2}{2n} + o((\bar{x}(A) + \bar{z}(A)) \log_2 n).$$

3.4. Доказательство предложения 4. Для того чтобы оценить число множеств A с заданными параметрами x_i , y_i , z_i и w_i , нам необходимо оценить число графов R , а затем умножить на число способов выбрать множества X_i , Y_i , Z_i . Отметим, что множества W_i однозначно определяются множествами X_i в силу леммы 3.

Так как из леммы 1 следует, что степень любой вершины графа R не превосходит d , то число подходящих графов не превосходит

$$(C_n^d)^n \leq 2^{nd \log_2 n} = 2^{o(n \log_2^2 n)}.$$

Число способов выбрать множество X_i не больше $C_e^{x_i}$, где e – число ребер в графе R , которое в силу ограничения на степень не превосходит nd . Таким образом, число способов выбрать все множества X_i не превосходит

$$\prod_{i=1}^n C_{nd}^{x_i} \leq \prod_{i=1}^n (nd)^{x_i} = 2^{\sum_{i=1}^n x_i \log_2(nd)} = 2^{\sum_{i=1}^n x_i \log_2 n + o(\bar{x} \log_2 n)} = 2^{\bar{x} \log_2 n + o(\bar{x} \log_2 n)}.$$

Множества Z_i мы выбирать по отдельности не будем, а оценим число способов выбрать множество $Z = \bigcup_{i=1}^n Z_i$, которое имеет размер $\bar{z}/3$: искомое число способов, конечно, не превосходит $C_{n^3}^{\bar{z}/3} \leq 2^{\bar{z} \log_2 n}$.

Оценим также число способов выбрать множество $\bigcup_{i=1}^n Y_i$: его размер не превосходит $\bar{y}$; стало быть, искомое число способов не превосходит

$$C_{n^3}^{\bar{y}} \leq 2^{3\bar{y} \log_2 n} = 2^{o(n \log_2^2 n)},$$

где последнее равенство выполнено в силу леммы 2. Перемножая полученные выражения, получаем, что число способов выбрать множество A с заданными параметрами не превосходит

$$2^{o(n \log_2^2 n)} 2^{\bar{x} \log_2 n + o(\bar{x} \log_2 n)} 2^{\bar{z} \log_2 n} 2^{o(n \log_2^2 n)} = 2^{(1+o(1))(\bar{x}+\bar{z}) \log_2 n + o(n \log_2^2 n)}.$$

Таким образом, предложение 4 доказано.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A. M. Raigorodskii, “Cliques and cycles in distance graphs and graphs of diameters”, *Contemp. Math.*, **625**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2014, 93–109.
- [2] A. M. Raigorodskii, “Coloring distance graphs and graphs of diameters”, *Thirty Essays on Geometric Graph Theory*, Springer, New York, 2013, 429–460.
- [3] А. М. Райгородский, “Проблема Борсука и хроматические числа некоторых метрических пространств”, *УМН*, **56**:1 (2001), 107–146.
- [4] А. М. Райгородский, “О хроматических числах сфер в евклидовых пространствах”, *Докл. РАН*, **432**:2 (2010), 174–177.
- [5] A. M. Raigorodskii, “On the chromatic numbers of spheres in $\mathbb{R}^n$ ”, *Combinatorica*, **32**:1 (2012), 111–123.
- [6] J. Balogh, A. Kostochka, A. Raigorodskii, “Coloring some finite sets in $\mathbb{R}^n$ ”, *Discuss. Math. Graph Theory*, **33**:1 (2013), 25–31.
- [7] J. Pach, P. K. Agarwal, *Combinatorial Geometry*, Wiley-Intersci. Ser. Discrete Math. Optim., John Wiley & Sons, New York, 1995.
- [8] L. A. Székely, “Erdős on unit distances and the Szemerédi–Trotter theorems”, *Paul Erdős and his Mathematics, II*, Bolyai Soc. Math. Stud., **11**, János Bolyai Math. Soc., Budapest, 2002, 649–666.
- [9] A. Soifer, *The Mathematical Coloring Book. Mathematics of Coloring and the Colorful Life of its Creators*, Springer, New York, 2009.
- [10] V. Klee, S. Wagon, *Old and New Unsolved Problems in Plane Geometry and Number Theory*, Dolciani Math. Exp., **11**, Math. Assoc. America, Washington, DC, 1991.
- [11] V. Boltyanski, H. Martini, P. S. Soltan, *Excursions into Combinatorial Geometry*, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 1997.
- [12] A. M. Raigorodskii, “Three lectures on the Borsuk partition problem”, *Surveys in Contemporary Mathematics*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **347**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2007, 202–248.
- [13] А. М. Райгородский, “Вокруг гипотезы Борсука”, *Геометрия и механика*, СМФН, **23**, РУДН, М., 2007, 147–164.
- [14] R. L. Graham, B. L. Rothschild, J. H. Spencer, *Ramsey Theory*, Wiley-Intersci. Ser. Discrete Math. Optim., John Wiley & Sons, New York, 1990.
- [15] Z. Nagy, “A certain constructive estimate of the Ramsey number”, *Mat. Lapok*, **23** (1974), 301–302.
- [16] Ф. Дж. Мак-Вильямс, Н. Дж. А. Слоэн, *Теория кодов, исправляющих ошибки*, Радио и связь, М., 1979.
- [17] L. Bassalygo, G. Cohen, G. Zémor, “Codes with forbidden distances”, *Discrete Math.*, **213**:1-3 (2000), 3–11.

- [18] B. Bollobás, *Random Graphs*, Cambridge Stud. Adv. Math., Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2001.
- [19] S. Janson, T. Łuczak, A. Ruciński, *Random Graphs*, Wiley-Interscience, New York, 2000.
- [20] В. Ф. Колчин, *Случайные графы*, Теория вероятностей и математическая статистика, Физматлит, М., 2000.
- [21] Л. И. Боголюбский, А. С. Гусев, М. М. Пядёркин, А. М. Райгородский, “Числа независимости и хроматические числа случайных подграфов в некоторых последовательностях графов”, *Докл. РАН*, **457**:4 (2014), 383–387.
- [22] Л. И. Боголюбский, А. С. Гусев, М. М. Пядёркин, А. М. Райгородский, “Числа независимости и хроматические числа случайных подграфов некоторых дистанционных графов”, *Матем. сб.*, **206**:10 (2015), 3–36.
- [23] Е. Е. Демёхин, А. М. Райгородский, О. И. Рубанов, “Дистанционные графы, имеющие большое хроматическое число и не содержащие клик или циклов заданного размера”, *Матем. сб.*, **204**:4 (2013), 49–78.
- [24] А. М. Райгородский, К. А. Михайлов, “О числах Рамсея для полных дистанционных графов с вершинами в $\{0, 1\}^n$ ”, *Матем. сб.*, **200**:12 (2009), 63–80.

М. М. Пядёркин

Московский государственный университет
имени М.В.Ломоносова

E-mail: meshanya@gmail.com

Поступило

03.04.2015