Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. А. Бандалиев, Письмо в редакцию, *Матем. заметки*, 2016, том 99, выпуск 2, 319–320

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10769>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 12:49:16

Письмо в редакцию

Р. А. Бандалиев

В моей работе [1] имеется некоторая устранимая погрешность, исправлению которой посвящена настоящая заметка.

В отмеченной работе имеется следующая теорема, являющаяся аналогом обобщенного неравенства Минковского в пространстве Лебега со смешанной нормой и с переменным показателем суммируемости.

ТЕОРЕМА 1 [1]. Пусть $1 \leq \underline{p} \leq p(x) \leq \underline{q} \leq q(y) \leq \bar{q} < \infty$, $p(x) \in C(\Omega_1)$. Тогда имеет место неравенство

$$\| \|f\|_{p,\Omega_1} \|_{q,\Omega_2} \leq \left(\frac{\bar{p}}{\underline{q}} + \frac{\bar{q} - \underline{p}}{\bar{q}} \right)^{2/\underline{p}} \| \|f\|_{q,\Omega_2} \|_{p,\Omega_1},$$
$$\underline{p} = \operatorname{ess\,inf}_{x \in \Omega_1} p(x), \quad \bar{p} = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega_1} p(x), \quad \underline{q} = \operatorname{ess\,inf}_{x \in \Omega_2} q(x), \quad \bar{q} = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega_2} q(x),$$

$f: \Omega_1 \times \Omega_2 \mapsto \mathbb{R}$ – произвольная измеримая функция и $C(\Omega_1)$ – пространство непрерывных функций на Ω_1 .

Норма, определенная величиной $\| \|f\|_{p,\Omega_1} \|_{q,\Omega_2}$, приведена в работе [1]. Отмечу, что приведенное в этой работе доказательство теоремы 1 полностью верно в случае, когда $p(x) = p = \operatorname{const}$ при условии $1 \leq p \leq q(y) \leq \bar{q} < \infty$. Все замечания относятся к случаю $p(x) \neq \operatorname{const}$. Дело в том, что в этом случае классическая схема доказательства не применима. Поэтому пришлось обратиться к общей теории банаховых функциональных пространств. Но только в недавней монографии [2] стало известно, что пространство Лебега с переменным показателем является банаховым функциональным пространством. Далее, оказалось, что имеется работа [3], опубликованная в 1995 г., в которой доказан аналог обобщенного неравенства Минковского для общих банаховых функциональных пространств. Для определенности приведем эту теорему.

Пусть X и Y – банаховы функциональные пространства на Ω_1 и Ω_2 соответственно. Предположим, что $L_0(\Omega_1 \times \Omega_2)$ – множество всех измеримых по Лебегу функций. Через $X[Y]$ и $Y[X]$ обозначим пространства со смешанной нормой и содержащие все функции $g \in L_0(\Omega_1 \times \Omega_2)$ такие, что $\|g(x, \cdot)\|_Y \in X$ и $\|g(\cdot, y)\|_X \in Y$. Нормы в этих пространствах определяются как

$$\|g\|_{X[Y]} = \| \|g(x, \cdot)\|_Y \|_X, \quad \|g\|_{Y[X]} = \| \|g(\cdot, y)\|_X \|_Y.$$

ТЕОРЕМА 2 [3], [4]. Пусть X и Y – банаховы функциональные пространства со свойством Фату и $f(x, y)$ – произвольная измеримая по Лебегу функция. Тогда для справедливости обобщенного неравенства Минковского

$$\|f\|_{X[Y]} \leq M \|f\|_{Y[X]},$$

необходимо и достаточно, чтобы существовало $1 \leq p \leq \infty$ такое, что X является p -выпуклым и Y является p -вогнутым.

Работа выполнена при поддержке Фонда развития науки при Президенте Азербайджанской Республики (грант № EIF-2013-9(15)-46/10/1) и гранта Президиума Национальной Академии наук Азербайджана за 2015 г.

DOI: 10.4213/mzm10769

Известно, что пространства $X[Y]$ и $Y[X]$ со смешанной нормой являются банаховыми функциональными пространствами на $\Omega_1 \times \Omega_2$ (см. [5]). Из теоремы 2 следует, что на геометрию банаховых функциональных пространств X и Y наложены условия p -выпуклости и p -вогнутости этих пространств (см. [3]). В частности, взяв $X = L_{q(y)}(\Omega_2)$, $Y = L_{p(x)}(\Omega_1)$ и $p = \bar{p}$ при условии $1 \leq p(x) \leq \bar{p} \leq q(y) \leq \bar{q} < \infty$, мы получим утверждение теоремы 1. Следует отметить, что условие $p(x) \leq \bar{p}$ выражает $\bar{p}$ -вогнутость пространства $L_{p(x)}(\Omega_1)$, а условие $\bar{p} \leq q(y)$ выражает $\bar{p}$ -выпуклость пространства $L_{q(y)}(\Omega_2)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Отмечу, что в прошлом году стало известно, что при доказательстве теоремы 2 допущена устранимая неточность. Об этом автор работы [3] был осведомлен, и с его стороны в прошлом году отмеченная неточность была устранена, и соответствующая статья размещена на сайте автора (см. [4]).

Таким образом, подводя итоги, можно сказать, что автор работы [1] претендует только на новое доказательство теоремы 1 в случае $p(x) = p = \text{const}$ и при условии $1 \leq p \leq q(y) \leq \bar{q} < \infty$. В случае, когда $p(x) \neq \text{const}$, ссылаясь на теорему 2, получим утверждение теоремы 1.

В заключение автор выражает глубокую благодарность всем коллегам, которые обратили его внимание на неточность в доказательстве теоремы 1.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Р. А. Бандалиев, *Матем. заметки*, **84:3** (2008), 323–333. [2] L. Diening, P. Harjulehto, P. Hästö, M. Růžička, *Lebesgue and Sobolev Spaces with Variable Exponents*, Lecture Notes in Math., **2017**, Springer-Verlag, Berlin, 2011. [3] A. Schep, *Operator Theory in Function Spaces and Banach Lattices*, Oper. Theory Adv. Appl., **75**, Birkhäuser, Basel, 1995, 299–308. [4] A. R. Schep, *Minkowski's Integral Inequality for Function Norms*, Corrected version of the published version, 2014, <http://people.math.sc.edu/schep/minkowski-corrected.pdf>. [5] J. Lindenstrauss, L. Tzafriri, *Classical Banach Spaces. II. Function Spaces*, Ergeb. Math. Grenzgeb., **97**, Springer-Verlag, Berlin, 1979.

Р. А. Бандалиев

Институт математики и механики

НАН Азербайджана, г. Баку

E-mail: bandaliyevr@gmail.com

Поступило

27.04.2015