Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. А. Бобылев, Несколько замечаний о звездных множествах, *Матем. заметки*, 1999, том 65, выпуск 4, 511–519

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1077>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 18:18:00

УДК 517

НЕСКОЛЬКО ЗАМЕЧАНИЙ О ЗВЕЗДНЫХ МНОЖЕСТВАХ

Н. А. Бобылев

В работе рассматриваются вопросы, связанные со свойствами объединений и пересечений звездных компактов в конечномерных пространствах.

Библиография: 7 названий.

1. Основные определения. Через E^N обозначим N -мерное вещественное евклидово пространство векторов $x = \{x_1, \dots, x_N\}$; через $B(r, x)$ – шар радиуса r с центром в точке x :

$$B(r, x) = \{y \in E^N : \|y - x\| \leq r\};$$

через $S(r, x)$ – сферу радиуса r с центром в точке x :

$$S(r, x) = \{y \in E^N : \|y - x\| = r\}.$$

Через $\text{conv } M$ обозначим выпуклую оболочку множества M , т.е. минимальное (по включению) выпуклое множество, содержащее M . Через $\text{card } M$ обозначим мощность множества M . В частности, если M состоит из n элементов, то $\text{card } M = n$.

Пусть $x \in E^N$ – некоторая точка. Через $d_M(x)$ обозначим расстояние точки x до множества M :

$$d_M(x) = \inf_{y \in M} \|x - y\|.$$

Непустое множество $M \subset E^N$ называется *звездным*, если существует точка $x_* \in M$, из которой “видны” в M остальные точки этого множества, т.е. для любой точки $x \in M$ отрезок $[x_*, x] = \{y \in E^N : y = (1 - \lambda)x_* + \lambda x, 0 \leq \lambda \leq 1\}$ лежит в M .

Множество всех точек звездного множества M , из которых видны остальные точки этого множества, называется *звездой* $s(M)$ множества M . Звезда звездного множества является выпуклым множеством.

Множество $\mathcal{K} \subset E^N$ называется *конусом*, если для каждой точки $x \in \mathcal{K}$ и числа $\lambda \in [0, \infty)$

$$\lambda x \in \mathcal{K}.$$

Работа выполнена в рамках Международного проекта СТИАС при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты № 98-01-00586 и № 99-01-00883.

Из этого определения следует, что конус – звездное множество $0 \in s(\mathcal{K})$. Конус $\mathcal{K}$ называется *миниэдральным*, если непустое пересечение транслятов

$$\mathcal{K}_x = \{y \in E^N : y = z + x, z \in \mathcal{K}\}$$

конуса $\mathcal{K}$ является транслятом этого конуса.

Пусть $K \subset E^N$ – произвольный компакт и $\mathcal{K} \subset E^N$ – замкнутый миниэдральный выпуклый конус. Семейство K_x ($x \in K$) лежащих в K звездных компактов назовем *$\mathcal{K}$ -правильным*, если оно обладает следующими свойствами:

- 1) каждая точка $x \in K$ принадлежит звезде $s(K_x)$ компакта K_x ;
- 2) $K_x \subset \mathcal{K}_x$ ($x \in K$);
- 3) для любых $x, y \in K$ таких, что $x \neq y$, $[x, y] \subset \mathcal{K}_x$, справедливо включение

$$l_{[x, y]} \subset K_x,$$

где $l_{[x, y]}$ – максимальный замкнутый отрезок, лежащий в K , одним из концов которого является точка x и который содержит точку y .

2. Критерии звездности. В построениях этого пункта будем использовать теорему Хелли о непустоте пересечения семейства выпуклых компактов. Приведем ее формулировку.

ТЕОРЕМА 1 (Хелли [1]). Пусть C_i ($i \in I$) – семейство непустых выпуклых компактов в E^N . Если для любых $N+1$ компактов $C_{i_1}, \dots, C_{i_{N+1}}$ этого семейства

$$\bigcap_{j=1}^{N+1} C_{i_j} \neq \emptyset,$$

то

$$\bigcap_{i \in I} C_i \neq \emptyset.$$

Доказательство теоремы Хелли, а также ее многочисленные обобщения и применения содержатся в монографии [2].

Рассмотрим некоторый компакт $K \subset E^N$.

ЛЕММА 1. Пусть для некоторого $\mathcal{K}$ -правильного семейства звездных компактов K_x ($x \in K$)

$$\bigcap_{x \in K} \text{conv } K_x \neq \emptyset.$$

Тогда

$$\bigcap_{x \in K} K_x \neq \emptyset.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное, т.е.

$$\bigcap_{x \in K} K_x = \emptyset.$$

Пусть

$$y_0 \in \bigcap_{x \in K} \operatorname{conv} K_x.$$

Тогда найдется точка $x_0 \in K$, для которой $y_0 \notin K_{x_0}$. Рассмотрим на отрезке $[x_0, y_0]$ непрерывную функцию $d_K(\cdot)$ и через a обозначим максимум этой функции на $[x_0, y_0]$. Очевидно, $a > 0$. Обозначим через x_1 какую-нибудь из точек отрезка $[x_0, y_0]$, для которой $d_K(x_1) = a$, а через $A \subset K$ множество тех $y \in K$, для которых $\|x_1 - y\| = a$. Проведем через каждую точку $y \in A$ гиперплоскость H_y ортогональную вектору $y - x_1$ и покажем, что для некоторого $y_1 \in A$ точки x_1 и y_0 лежат в одном из полупространств, на которые гиперплоскость H_{y_1} делит E^N .

Для этого рассмотрим сферу $S(a, x_1)$. Согласно определению точки x_1 и числа a

$$\operatorname{int} B(a, x_1) \cap K = \emptyset, \quad S(a, x_1) \cap K = A.$$

Далее, рассмотрим гиперплоскость H , проходящую через точку x_1 и ортогональную вектору $x_0 - y_0$. Пусть Π_0 и Π_1 – полупространства, на которые разбивает E^N гиперплоскость H , причем $x_0 \in \Pi_0$, $y_0 \in \Pi_1$. Если

$$S(a, x_1) \cap \Pi_0 \cap K \neq \emptyset,$$

то в качестве y_1 можно взять любую точку последнего пересечения. Если же

$$S(a, x_1) \cap \Pi_0 \cap K = \emptyset,$$

то в качестве y_1 можно взять любую точку множества A . Действительно, если это не так, то при малых $\varepsilon > 0$ для точек $x_\varepsilon = x_1 + \varepsilon(x_0 - y_0)$ выполнено неравенство

$$d_K(x_\varepsilon) > \|x_1 - y_1\| = a,$$

что противоречит выбору точки x_1 .

Итак, пусть $y_1 \in A$ – такая точка множества A , для которой гиперплоскость H_{y_1} , проходящая через y_1 и ортогональная вектору $y_1 - x_1$, разбивает E^N на полупространства Π_0 и Π_1 , причем $x_1, y_0 \in \Pi_0$. Рассмотрим множество K_{y_1} . Оно целиком лежит в замыкании полупространства Π_1 . Действительно, если некоторая точка $y_2 \in K_{y_1}$ лежит в Π_0 , то в силу звездности множества K_{y_1} и включения $y_1 \in s(K_{y_1})$ отрезок $[y_1, y_2]$ лежит в K_{y_1} и, следовательно, лежит в K . Но тогда для некоторой точки $y_3 \in [y_1, y_2]$

$$\|x_1 - y_3\| < \|x_1 - y_1\| = a.$$

Поэтому $d_K(x_1) < a$, что противоречит определению точки x_1 .

Итак, $K_{y_1} \subset \Pi_1$. Но тогда $\operatorname{conv} K_{y_1} \subset \Pi_1$ и, следовательно, $y_0 \in \operatorname{conv} K_{y_1}$. Мы пришли к противоречию. Лемма доказана.

Из леммы 1 вытекает

ТЕОРЕМА 2 (критерий звездности). Пусть для некоторого K -правильного семейства звездных компактов

$$\bigcap_{x \in K} \operatorname{conv} K_x \neq \emptyset.$$

Тогда компакт K является звездным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 1

$$\bigcap_{x \in K} K_x \neq \emptyset.$$

Пусть x_* – произвольная точка последнего пересечения. Согласно свойству 1), которым обладает семейство K_x ($x \in K$), любая точка $x_0 \in K$ лежит в звезде $s(K_{x_0})$ звездного компакта $K_{x_0} \subset K$. Поскольку $x_* \in K_{x_0}$, то по определению множества $s(K_{x_0})$ отрезок $[x_0, x_*]$ лежит в K_{x_0} и, следовательно, в K . Теорема доказана.

Из теоремы 2 вытекает следующий критерий звездности, принадлежащий М. А. Красносельскому.

ТЕОРЕМА 3 (М. А. Красносельский [3]). Пусть для любых $N+1$ точек $x_1, \dots, x_{N+1}$ компакта $K \subset E^N$ существует точка $x_* \in K$, из которой видны точки x_i ($i = 1, \dots, N+1$). Тогда компакт K является звездным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для каждого $x \in K$ положим

$$K_x = \{y \in K : [x, y] \subset K\}.$$

Очевидно, каждый компакт K_x является звездным. Из определения семейства K_x ($x \in K$) следует, что оно является E^N -правильным.

По условию теоремы каждые $N+1$ компактов $K_{x_1}, \dots, K_{x_{N+1}}$ семейства K_x ($x \in K$) имеют непустое пересечение. Но тогда и выпуклые оболочки $\operatorname{conv} K_{x_1}, \dots, \operatorname{conv} K_{x_{N+1}}$ этих компактов имеют непустое пересечение. Следовательно, по теореме Хелли

$$\bigcap_{x \in K} \operatorname{conv} K_x \neq \emptyset.$$

Остается сослаться на теорему 2. Теорема доказана.

3. Условие конуса. Пусть $\mathcal{K} \subset E^N$ – выпуклый замкнутый миниэдральный конус. Будем говорить, что звездный компакт K удовлетворяет $\mathcal{K}$ -условию, если существует точка $x_* \in s(K)$ такая, что для любой точки $x \in K$

$$x - x_* \in \mathcal{K}.$$

Звездный компакт K удовлетворяет $\mathcal{K}$ -условию тогда и только тогда, когда для некоторой точки $x_* \in s(K)$ транслят

$$\mathcal{K}(x_*) = \{y \in E^N : y = x + x_*, x \in K\}$$

конуса $\mathcal{K}$ содержит K . $\mathcal{K}$ -условие характеризует расположение звездного компакта K в E^N . Лемма 1, установленная в предыдущем пункте, дает критерий $\mathcal{K}$ -условия для компакта K .

ТЕОРЕМА 4. Пусть для каждой $N + 1$ точек $x_1, \dots, x_{N+1} \in K$ существует такая точка x_0 , из которой видны эти точки в множестве $K \cap \mathcal{H}(x_0)$. Тогда компакт K удовлетворяет $\mathcal{H}$ -условию.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для каждой точки $x \in K$ через K_x обозначим множество всех таких $y \in K$, которые видны из x в $K \cap (-\mathcal{H}(x))$. Семейство компактов K_x является K -правильным. По условию теоремы каждые $N + 1$ компактов $K_{x_1}, \dots, K_{x_{N+1}}$ имеют непустое пересечение. Таким образом,

$$\bigcap_{i=1}^{N+1} \text{conv } K_{x_i} \neq \emptyset$$

и по теореме Хелли

$$\bigcap_{x \in K} \text{conv } K_x \neq \emptyset.$$

Значит, в силу леммы 1

$$\bigcap_{x \in K} K_x \neq \emptyset.$$

Пусть

$$x_* \in \bigcap_{x \in K} K_x.$$

Тогда по теореме 2 $x_* \in s(K)$ и $K \subset \mathcal{H}(x_*)$. Теорема доказана.

4. Теорема Хелли для звездных компактов. Непустой компакт в E^N называется *гомологической клеткой*, если он гомологически тривиален во всех размерностях (см., например, [4]). Для гомологических клеток справедлива вторая теорема Хелли.

ТЕОРЕМА 5 (Хелли [5]). Пусть K_i ($i \in I$) – семейство гомологических клеток в E^N . Пусть для каждого подмножества K_i ($i \in I_0$) этого семейства с $\text{card } I_0 \leq N + 1$ пересечение

$$\bigcap_{i \in I_0} K_i$$

является гомологической клеткой. Тогда

$$\bigcap_{i \in I} K_i$$

является гомологической клеткой.

Комбинаторное доказательство теоремы Хелли содержится в монографии П. С. Александрова и Х. Хопфа [6].

Важный класс гомологических клеток составляют звездные компакты. Применение теоремы 5 к семейству звездных компактов в E^N приводит к следующему результату.

ТЕОРЕМА 6. Пусть K_i ($i \in I$) – семейство звездных компактов в E^N и для каждого подмножества K_i ($i \in I_0$) этого семейства с $\text{card } I_0 \leq N+1$ пересечение

$$\bigcap_{i \in I_0} K_i$$

непусто и звездно. Тогда

$$\bigcap_{i \in I} K_i \neq \emptyset.$$

Теорема 6 хорошо известна и содержится, например, в качестве упражнения в книге [7]. В условиях этой теоремы пересечение всего семейства звездных компактов будет не только не пустым, но и являться гомологической клеткой. Это замечание допускает важное уточнение.

ТЕОРЕМА 7. Пусть K_i ($i \in I$) – семейство звездных компактов в E^N и для каждого подмножества K_i ($i \in I_0$) этого семейства с $\text{card } I_0 \leq N+1$ пересечение

$$\bigcap_{i \in I_0} K_i$$

непусто и звездно. Тогда пересечение

$$\bigcap_{i \in I} K_i$$

непусто и звездно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$K_* = \bigcap_{i \in I} K_i.$$

В силу теоремы 6 $K_* \neq \emptyset$. Покажем, что K_* звездно.

Пусть $x_1, \dots, x_{N+1} \in K_*$ – некоторые точки. Для каждого $i \in I$ через M_i обозначим совокупность всех точек $x \in K_i$, из которых видны в K_i точки $x_1, \dots, x_{N+1}$. Множество M_i непусто, так как $s(K) \subset M_i$.

Зафиксируем некоторое натуральное $k \leq N+1$ и рассмотрим произвольные множества $M_{i_1}, \dots, M_{i_k}$. Положим

$$M_{i_1 \dots i_k} = \bigcap_{j=1}^k M_{i_j}.$$

Покажем, что множество $M_{i_1 \dots i_k}$ непусто и звездно.

Рассмотрим множество

$$K_{i_1 \dots i_k} = \bigcap_{j=1}^k K_{i_j}.$$

По условию теоремы множество $K_{i_1 \dots i_k}$ непусто и звездно. Пусть $x_0 \in s(K_{i_1 \dots i_k})$. Так как $x_j \in K_{i_1 \dots i_k}$ ($j = 1, \dots, N+1$), каждая точка x_j видна в множестве $K_{i_1 \dots i_k}$ из точки x_0 . Поэтому $x_0 \in M_{i_1 \dots i_k}$ и, следовательно, $M_{i_1 \dots i_k} \neq \emptyset$. Покажем, что множество $M_{i_1 \dots i_k}$ звездно и

$$s(K_{i_1 \dots i_k}) \subset s(M_{i_1 \dots i_k}).$$

Пусть $x \in s(K_{i_1 \dots i_k})$, $y \in M_{i_1 \dots i_k}$. Рассмотрим произвольную точку x_j ($j = 1, \dots, N + 1$). Так как $K_{i_1 \dots i_k}$ – звездное множество, $[y, x_j] \subset K_{i_1 \dots i_k}$, $x \in s(K_{i_1 \dots i_k})$, то треугольник с вершинами x, y, x_j лежит в $K_{i_1 \dots i_k}$. Но тогда точка x_j видна в множестве $K_{i_1 \dots i_k}$ из каждой точки отрезка $[x, y]$. Таким образом, все точки $x_1, \dots, x_{N+1}$ видны из любой точки отрезка $[x, y]$. Поэтому

$$[x, y] \subset M_{i_1 \dots i_k}$$

и, следовательно, $M_{i_1 \dots i_k}$ – звездное множество, причем $s(K_{i_1 \dots i_k}) \subset s(M_{i_1 \dots i_k})$. В силу теоремы 6

$$M_* = \bigcap_{i \in I} M_i \neq \emptyset.$$

Пусть $x_* \in M_*$. Так как $M_* \subset K_*$, то $x_* \in K_*$. По определению множеств M_i ($i \in I$) из точки x_* видны в множестве K_* все точки $x_1, \dots, x_{N+1}$. Тогда в силу теоремы 2 множество K_* звездно. Теорема доказана.

5. Двойственная теорема. Теоремы Хелли 1 и 5 и родственные им утверждения являются инструментами исследования пересечений семейств множеств. В связи с этими утверждениями представляют интерес двойственные утверждения о свойствах объединений семейств множеств. В этом пункте приводится теорема, являющаяся двойственной к теореме 7.

ТЕОРЕМА 8. Пусть K_i ($i \in I$) – семейство звездных компактов в E^N и $\text{card } I \geq N + 1$. Пусть для каждого $k \leq N + 1$ объединение любых k компактов этого семейства звездно. Тогда объединение K^* всех компактов семейства звездно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x_1, \dots, x_{N+1}$ – произвольные точки компакта

$$K^* = \bigcup_{i \in I} K_i.$$

Все точки $x_1, \dots, x_{N+1}$ лежат в объединении не более чем $N + 1$ компактов рассматриваемого семейства. Обозначим их через $K_{i_1}, \dots, K_{i_k}$ ($k \leq N + 1$). По условию теоремы объединение

$$\bigcup_{j=1}^l K_{i_j}$$

звездно. Поэтому найдется точка $x_* \in K^*$ такая, что отрезки $[x_*, x_1], \dots, [x_*, x_{N+1}]$ лежат в последнем объединении и, следовательно, в K . Остается сослаться на теорему Красносельского. Теорема доказана.

6. Звездность в задачах о пересечениях. Свойство звездности можно использовать в задачах о пересечениях выпуклых множеств. Приведем один результат в этом направлении.

ТЕОРЕМА 9. Пусть C_i ($i \in I$) – конечное семейство выпуклых компактов в E^N и $\text{card } I \geq N + 1$. Пусть для каждого $k \leq N + 1$ объединение любых k компактов этого семейства звездно. Тогда

$$\bigcap_{i \in I} C_i \neq \emptyset.$$

Доказательству теоремы предположим два вспомогательных утверждения.

ЛЕММА 2 (Кли [2]). Пусть $C_1, \dots, C_{N+1}$ – выпуклые компакты в E^N , объединение которых выпукло. Пусть каждые N компактов этого семейства имеют непустое пересечение. Тогда

$$\bigcap_{i=1}^{N+1} C_i \neq \emptyset.$$

ЛЕММА 3. Пусть $C_1, \dots, C_n$ – выпуклые компакты в E^N и $n \leq N+1$. Пусть для каждого $k \leq n$ объединение любых k компактов этого семейства звездно. Тогда

$$\bigcap_{i=1}^n C_i \neq \emptyset.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем индукцией по n . Для $n = 1$ утверждение леммы очевидно. Пусть утверждение леммы справедливо для любого семейства выпуклых компактов C_i ($i \in I$), если $\text{card } I \leq n$ и $n \leq N$. Докажем лемму для семейства компактов $C_1, \dots, C_{n+1}$. Положим

$$\mathcal{D}_i = \bigcap_{j \neq i} C_j, \quad i = 1, \dots, n+1.$$

По предположению индукции множества $\mathcal{D}_i$ непусты. Выберем в каждом множестве $\mathcal{D}_i$ точку x_i . Без ограничения общности можно считать, что точки x_i ($i = 1, \dots, n+1$) находятся в общем положении. Рассмотрим n -мерный симплекс

$$\Delta_n = \text{conv}\{x_1, \dots, x_{n+1}\}$$

и положим

$$M_i = \mathcal{D}_i \cap \Delta_n, \quad i = 1, \dots, n+1.$$

Так как множество M_i содержит $(n-1)$ -мерную грань $\text{conv}\{x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1}\}$, граница $\partial\Delta_n$ симплекса Δ_n содержится в объединении множеств M_i ($i = 1, \dots, n+1$):

$$\partial\Delta_n \subset \bigcup_{i=1}^{n+1} M_i.$$

Но тогда

$$\Delta_n = \bigcup_{i=1}^{n+1} M_i. \quad (1)$$

Действительно, если равенство (1) не выполнено, то граница $\partial\Delta_n$ симплекса Δ_n содержится в объединении $\mathcal{D}$ множеств $\mathcal{D}_i$ ($i = 1, \dots, n+1$):

$$\partial\Delta_n \subset \bigcup_{i=1}^{n+1} \mathcal{D}_i,$$

а некоторая точка $x_0 \in \text{int } \Delta$ не лежит в $\mathcal{D}$. По условию леммы множество $\mathcal{D}$ звездно. Пусть x_* – произвольная точка, лежащая в звезде $s(\mathcal{D})$ множества $\mathcal{D}$. Рассмотрим луч l с началом в x_* , проходящий через точку x_0 . Поскольку $\partial\Delta_n \subset \mathcal{D}$, а $x_0 \notin \mathcal{D}$, то луч l_0 с

вершиной x_0 , направление которого совпадает с направлением l , пересекает $\mathcal{D}$ в некоторой точке y_0 . Но отрезок $[x_*, y_0]$ не лежит целиком в $\mathcal{D}$, что противоречит звездности $\mathcal{D}$.

Итак, соотношение (1) установлено. Тогда в силу леммы 2

$$\bigcap_{i=1}^{n+1} C_i \neq \emptyset.$$

Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 9. Рассмотрим произвольные $N + 1$ компактов $C_{i_1}, \dots, C_{i_{N+1}}$ семейства C_i ($i \in I$). Семейство компактов C_{i_j} ($j = 1, \dots, N$) удовлетворяет условиям леммы 3 при $n = N + 1$. Поэтому

$$\bigcap_{j=1}^{N+1} C_{i_j} \neq \emptyset.$$

Тогда в силу первой теоремы Хелли

$$\bigcap_{i \in I} C_i \neq \emptyset.$$

Теорема доказана.

В заключение автор выражает благодарность С. М. Асееву за обсуждение этой работы и полезные замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Helly E. Über Mengen Konvexer Körper mit gemeinschaftlichen Punkten // Iber. Deutsch. Math. Verein. 1923. V. 32. P. 175–176.
- [2] Данпер Л., Грюнбаум Б., Кли В. Теорема Хелли и ее применения. М.: Мир, 1968.
- [3] Красносельский М. А. Об одном критерии звездности // Матем. сб. 1946. Т. 19. С. 309–310.
- [4] Зейферт Т., Трельфалль В. Топология. М.–Л.: ГОНТИ, 1938.
- [5] Helly E. Über Systeme abgeschlossener Mengen mit gemeinschaftlichen Punkten // Monatsch. Math. 1930. V. 37. P. 281–302.
- [6] Alexandroff P., Hopf H. Topologie. V. 1. Berlin, 1935.
- [7] Кириллов А. А., Гвишиани А. Д. Теоремы и задачи функционального анализа. М.: Наука, 1979.

Институт проблем управления РАН

Поступило

08.07.98

Исправленный вариант

27.01.99