Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Л. Камынин, О корректной разрешимости обратной задачи определения правой части в вырождающемся параболическом уравнении с условием интегрального наблюдения, *Матем. заметки*, 2015, том 98, выпуск 5, 710–724

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10778>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 17:35:09

О корректной разрешимости обратной задачи определения правой части в вырождающемся параболическом уравнении с условием интегрального наблюдения

В. Л. Камынин

Получены теоремы существования, единственности и устойчивости относительно возмущения входных данных решения обратной задачи для вырождающегося параболического уравнения на плоскости при условии интегрального наблюдения. Рассмотрены случаи ограниченных и неограниченных коэффициентов. Получены оценки решения с константами, явно выписываемыми через входные данные задачи.

Библиография: 20 названий.

DOI: 10.4213/mzm10778

1. Введение. Постановка обратной задачи. В настоящей работе изучаются вопросы существования, единственности и устойчивости относительно возмущения входных данных решения $\{u(t, x), p(t)\}$ обратной задачи для вырождающегося параболического уравнения

$$u_t - a(t, x)[u_{xx} + b(t, x)u_x + d(t, x)u] = a(t, x)[p(t)g(t, x) + h(t, x)], \quad (t, x) \in Q, \quad (1.1)$$

с начальными и граничными условиями

$$u(0, x) = u_0(x), \quad x \in [0, l], \quad u(t, 0) = u(t, l) = 0, \quad t \in [0, T], \quad (1.2)$$

и дополнительным условием интегрального наблюдения

$$\int_0^l u(t, x)\omega(x) dx = \varphi(t), \quad t \in [0, T]; \quad (1.3)$$

здесь $Q = [0, T] \times [0, l]$, T, l – некоторые числа.

Особенностью данной постановки является то, что функция $a(t, x)$ предполагается лишь неотрицательной, т.е. уравнение (1.1) не является равномерно параболическим, а допускает вырождение.

В работе установлены достаточные условия, при которых задача (1.1)–(1.3) является корректно разрешимой (доказаны теоремы существования, единственности обобщенного решения и его устойчивости относительно изменения входных данных). Отдельно рассмотрен случай, допускающий неограниченность коэффициента $a(t, x)$.

В обоих случаях получены оценки решения и оценки устойчивости решения в соответствующих нормах, причем константы в этих оценках явно выписываются через входные данные задачи, что весьма важно для приложений, в том числе и для численных расчетов.

Следует отметить, что наше исследование опирается на результаты по разрешимости соответствующей прямой задачи, полученные в [1].

Для невырожденных параболических уравнений аналогичная обратная задача с дополнительным условием (1.3) изучалась многими авторами, в том числе и в многомерном случае: см. например, [2]–[8] и др.

Обратные задачи для параболических уравнений, допускающих вырождения, в различных постановках, отличных от настоящей работы, рассматривались в [9]–[15] и др. Заметим, что обратные задачи для вырождающихся параболических уравнений важны для приложений, в частности, они возникают при изучении моделей ценообразования опционов на финансовых рынках (см., например, [16]–[18] и др.).

Используемые в работе пространства Лебега и Соболева с соответствующими нормами будем понимать в общепринятом смысле (см., например, [1]), а все равенства и неравенства – выполненными почти всюду. Определим пространство Гёльдера $C^{0,1}(Q)$ как пространство непрерывных в Q функций $u(t, x)$ с конечной нормой

$$|u|_{C^{0,1}(Q)} = \sup_{(t,x) \in Q} |u(t, x)| + \sup_{\substack{(t_1, x_1), (t_2, x_2) \in Q \\ (t_1, x_1) \neq (t_2, x_2)}} \frac{|u(t_1, x_1) - u(t_2, x_2)|}{|x_1 - x_2| + |t_1 - t_2|^{1/2}}.$$

Положим $Q(0, \tau) = [0, \tau] \times [0, l]$, $0 < \tau \leq T$; $Q(0, T) \equiv Q$.

Нам также понадобится известное неравенство Пуанкаре–Стеклова, которое при $n = 1$ имеет вид

$$\|z\|_{L_2([0,l])}^2 \leq \frac{l^2}{2} \|z_x\|_{L_2([0,l])}^2 \quad \text{для всех } z \in \mathring{W}_2^1([0, l]). \quad (1.4)$$

Относительно исходных данных обратной задачи (1.1)–(1.3) будем предполагать, что входящие в них функции измеримы и удовлетворяют следующим условиям:

$$0 \leq a(t, x) \leq a_1, \quad (t, x) \in Q, \quad \frac{1}{a(t, x)} \in L_q(Q), \quad q > 1, \quad \left\| \frac{1}{a} \right\|_{L_q(Q)} \leq K_a, \quad (A)$$

$$b(t, x), d(t, x) \in L_\infty(Q), \quad \|b\|_{L_\infty(Q)} \leq K_b, \quad -d_1 \leq d(t, x) \leq d_2, \quad (B)$$

$$g(t, x), h(t, x) \in L_\infty(Q), \quad \|g\|_{L_\infty(Q)} \leq K_g, \quad \|h\|_{L_\infty(Q)} \leq K_h, \quad (C)$$

$$u_0(x) \in C^{0,1}([0, l]), \quad u_0(0) = u_0(l) = 0,$$

$$|u_0(x)| \leq M_0, \quad x \in [0, l], \quad |u_0(x) - u_0(y)| \leq L_0|x - y|, \quad x, y \in [0, l], \quad (D)$$

$$\varphi(t), \varphi'(t) \in L_\infty([0, T]), \quad |\varphi'(t)| \leq K_\varphi^*, \quad t \in [0, T], \quad (E)$$

$$\omega(x) \in L_\infty([0, l]), \quad (a\omega)_x \in L_\infty(Q), \quad \|\omega\|_{L_\infty([0,l])} \leq K_\omega, \quad \|(a\omega)_x\|_{L_\infty(Q)} \leq K_\omega^*, \quad (F)$$

$$a(t, x)\omega(x)|_{x=0,l} = 0, \quad \left| \int_0^l a(t, x)g(t, x)\omega(x) dx \right| \geq g_0 > 0, \quad (G)$$

$$\varphi(0) = \int_0^l u_0(x)\omega(x) dx. \quad (H)$$

Здесь $a_1, K_a, K_g, K_\omega, K_\omega^*, g_0 = \text{const} > 0$, $K_b, d_1, d_2, K_h, M_0, L_0, K_\varphi^* = \text{const} \geq 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Очевидно, условиям (A), (C), (F), (G) удовлетворяют, например, следующие функции:

$$a(t, x) = x^{\kappa_1} (l - x)^{\kappa_2} \hat{a}(t, x), \quad \omega(x) = x^{1-\kappa_1} (l - x)^{1-\kappa_2} \hat{\omega}(x),$$

где $0 < \kappa_1, \kappa_2 < 1$, $\hat{a}(t, x)$ ограничена и имеет ограниченную в Q производную по x , $\hat{a}(t, x) \geq \Lambda_0 > 0$ в Q , $\hat{\omega}(x)$ положительная и ограниченная на $[0, l]$ функция с ограниченной на $[0, l]$ производной, $g(t, x)$ ограниченная и положительная в Q функция.

В дальнейшем будем использовать обозначения

$$K_b^* = a_1 K_b K_\omega, \quad K_d = \max\{d_1, d_2\}, \quad K_d^* = a_1 K_d K_\omega, \quad q^* = \frac{2q}{1+q}, \quad (1.5)$$

$$G(t) = \int_0^l a(t, x) g(t, x) \omega(x) dx, \quad H(t) = \int_0^l a(t, x) h(t, x) \omega(x) dx. \quad (1.6)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Обобщенным решением задачи (1.1)–(1.3) будем называть пару функций

$$\{u(t, x), p(t)\}, \quad u(t, x) \in W_s^{1,2}(Q) \cap C^{0,1}(Q), \quad s > 1, \quad p(t) \in L_\infty([0, T]),$$

такую, что эта пара удовлетворяет уравнению (1.1) почти всюду в Q , а функция $u(t, x)$ удовлетворяет условиям (1.2), (1.3) в обычном смысле.

2. Оценки решения прямой задачи. Предположим, что $p(t) \in L_\infty([0, T])$ – известная функция,

$$\|p\|_{L_\infty([0, T])} \leq N_p, \quad (2.1)$$

и рассмотрим прямую задачу (1.1), (1.2) с данной $p(t)$ в правой части уравнения (1.1). Для удобства введем обозначение

$$f(t, x) = p(t)g(t, x) + h(t, x). \quad (2.2)$$

Из результатов работы [1] вытекает, что обобщенное решение $u(t, x)$ задачи (1.1), (1.2) существует и единственно, причем $u(t, x) \in W_{q^*}^{1,2}(Q)$, где $q^* > 1$ определена в (1.5). Выведем оценки для этого решения, которые нам понадобятся в дальнейшем при исследовании обратной задачи. Воспользуемся идеей из работы [1].

Домножим уравнение (1.1) на $e^{-\lambda t}$ ($\lambda = \text{const} > 0$ будет выбрана ниже), разделим получившееся соотношение на $\sqrt{a(t, x)}$ и возведем результат в квадрат. В результате получим

$$e^{-2\lambda t} \frac{1}{a} u_t^2 - 2e^{-2\lambda t} u_t u_{xx} + a e^{-2\lambda t} u_{xx}^2 = e^{-2\lambda t} a (b u_x + d u + f)^2. \quad (2.3)$$

Проинтегрируем соотношение (2.3) по прямоугольнику $Q(0, \tau)$, $0 < \tau \leq T$. В результате приходим к неравенству

$$\begin{aligned} & \int_{Q(0, \tau)} e^{-2\lambda t} \frac{u_t^2}{a(t, x)} dx dt + \int_{Q(0, \tau)} e^{-2\lambda t} a(t, x) u_{xx}^2 dx dt - 2 \int_{Q(0, \tau)} e^{-2\lambda t} u_{xx} u_t dx dt \\ & \leq 3 \int_{Q(0, \tau)} e^{-2\lambda t} a(t, x) b^2(t, x) u_x^2 dx dt + 3 \int_{Q(0, \tau)} e^{-2\lambda t} a(t, x) d^2(t, x) u^2 dx dt \\ & \quad + 3 \int_{Q(0, \tau)} e^{-2\lambda t} a(t, x) f^2(t, x) dx dt. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Преобразуем третье слагаемое в левой части (2.4) путем интегрирования по частям с учетом (1.2):

$$\begin{aligned} -2 \int_{Q(0,\tau)} e^{-2\lambda t} u_{xx} u_t dx dt &= \int_{Q(0,\tau)} e^{-2\lambda t} \frac{d}{dt} (u_x^2) dx dt \\ &= e^{-2\lambda \tau} \int_0^l u_x^2(\tau, x) dx - \int_0^l u_0'^2(x) dx + 2\lambda \int_{Q(0,\tau)} e^{-2\lambda t} u_x^2 u_t dx dt. \end{aligned}$$

Тогда из (2.4) с учетом условий (A), (B) и неравенства (1.4) получим

$$\begin{aligned} e^{-2\lambda \tau} \|u_x(\tau, \cdot)\|_{L_2([0,l])}^2 + 2\lambda \int_{Q(0,\tau)} e^{-2\lambda t} u_x^2 dx dt + \int_{Q(0,\tau)} e^{-2\lambda t} \frac{u_t^2}{a(t,x)} dx dt \\ + \int_{Q(0,\tau)} e^{-2\lambda t} (t,x) u_{xx}^2 dx dt \\ \leq \|u_0'\|_{L_2([0,l])}^2 + 3a_1 \left(K_b^2 + K_d^2 \frac{l^2}{2} \right) \int_{Q(0,\tau)} e^{-2\lambda t} u_x^2 dx dt \\ + 3 \int_{Q(0,\tau)} e^{-2\lambda t} a(t,x) f^2(t,x) dx dt. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Положим

$$\lambda = \frac{3a_1}{2} \left(K_b^2 + K_d^2 \frac{l^2}{2} \right) \equiv \lambda^*. \quad (2.6)$$

Тогда из (2.5) вытекает оценка

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq t \leq \tau} \|u_x(t, \cdot)\|_{L_2([0,l])}^2 + \int_{Q(0,\tau)} \frac{1}{a(t,x)} u_t^2 dx dt + \int_{Q(0,\tau)} a(t,x) u_{xx}^2 dx dt \\ \leq e^{2\lambda^* T} \left[\|u_0'\|_{L_2([0,l])}^2 + 3 \int_{Q(0,\tau)} a(t,x) f^2(t,x) dx dt \right], \quad \tau \in (0, T]. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Из (2.7) в силу условий (A), (D) и определения q^* в (1.5) после применения неравенства Гёльдера получаем, что

$$\begin{aligned} \|u_{xx}\|_{L_{q^*}(Q)}^2 &\equiv \left[\int_Q \left(\frac{1}{\sqrt{a(t,x)}} \cdot \sqrt{a(t,x)} |u_{xx}| \right)^{q^*} dx dt \right]^{2/q^*} \\ &\leq \left[\int_Q \left(\frac{1}{a(t,x)} \right)^q dx dt \right]^{1/q} \cdot \int_Q a(t,x) u_{xx}^2 dx dt \\ &\leq e^{2\lambda^* T} K_a \left[\|u_0'\|_{L_2([0,l])}^2 + 3 \int_Q a(t,x) f^2(t,x) dx dt \right], \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} \|u_t\|_{L_{q^*}(Q)}^2 &\equiv \left[\int_Q \left(\sqrt{a(t,x)} \frac{|u_t|}{\sqrt{a(t,x)}} \right)^{q^*} dx dt \right]^{2/q^*} \\ &\leq \left[\int_Q a^q(t,x) dx dt \right]^{1/q} \cdot \int_Q \frac{u_t^2}{a(t,x)} dx dt \\ &\leq e^{2\lambda^* T} a_1 (lT)^{1/q} \left[\|u_0'\|_{L_2([0,l])}^2 + 3 \int_Q a(t,x) f^2(t,x) dx dt \right]. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Кроме того, из принципа максимума (см., например, [19; раздел 3]) вытекает оценка

$$|u(t, x)| \leq M \equiv (M_0 + a_1 K_f T) e^{a_1 d_2 T}, \quad (t, x) \in Q, \quad (2.10)$$

где

$$K_f = K_g N_p + K_h, \quad (2.11)$$

а из результатов работы [1] – оценка

$$|u|_{C^{0,1}(Q)} \leq K_1, \quad (2.12)$$

где $K_1 = \text{const} > 0$ зависит от l, T , констант из условий (A)–(D) и N_p из (2.1).

3. Разрешимость обратной задачи. В данном пункте будем предполагать, что относительно входных данных обратной задачи (1.1)–(1.3) выполнены условия (A)–(H), $q^* > 1$ определена в (1.5). Выведем операторное уравнение для неизвестного коэффициента $p(t)$.

Пусть $p(t)$ – произвольная функция из $L_\infty([0, T])$, а $u(t, x)$ – обобщенное решение прямой задачи (1.1), (1.2) с выбранной $p(t)$ в правой части (1.1). В силу [1] такое решение существует и единственно, причем $u(t, x) \in W_{q^*}^{1,2}(Q)$. Умножим уравнение (1.1) на $\omega(x)$ и проинтегрируем по отрезку $[0, l]$. Принимая во внимание условие (1.3) и обозначения (1.6), после интегрирования по частям с учетом условий (F), (G) приходим к соотношению

$$p(t) = \frac{1}{G(t)} \left[\int_0^l ((a\omega)_x - ab\omega) u_x dx - \int_0^l ad\omega u dx + \varphi'(t) - H(t) \right]. \quad (3.1)$$

Введем оператор $\mathcal{A}: L_\infty([0, T]) \rightarrow L_\infty([0, T])$ по формуле

$$\mathcal{A}(p) = \frac{1}{G(t)} \left[\int_0^l ((a\omega)_x - ab\omega) u_x dx - \int_0^l ad\omega u dx \right], \quad (3.2)$$

где $u(t, x)$ – решение задачи (1.1), (1.2) с заданной $p(t)$ в правой части уравнения (1.1).

Тогда соотношение (3.1) запишется в виде

$$p(t) = \mathcal{A}(p)(t) + \frac{\varphi'(t)}{G(t)} - \frac{H(t)}{G(t)}. \quad (3.3)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. В силу условий (A)–(F) оператор $\mathcal{A}$ действительно действует из $L_\infty([0, T])$ в $L_\infty([0, T])$.

ЛЕММА 3.1. Пусть выполнены условия (A)–(H). Тогда для того, чтобы пара $\{u(t, x), p(t)\}$ была обобщенным решением задачи (1.1)–(1.3), необходимо и достаточно, чтобы эта пара удовлетворяла соотношениям (1.1), (1.2), (3.3).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость доказана выше при выводе соотношения (3.1).

Докажем достаточность. Пусть $p^*(t) \in L_\infty([0, T])$ является решением уравнения (3.3). Рассмотрим функцию $u^*(t, x)$ как единственное обобщенное решение прямой задачи (1.1), (1.2) с выбранной функцией $p(t) = p^*(t)$ в правой части уравнения (1.1). Положим

$$\varphi^*(t) = \int_0^l u^*(t, x) \omega(x) dx. \quad (3.4)$$

Тогда $\varphi^*(t) \in W_{q^*}^1([0, T])$. Повторяя рассуждения, приведенные выше при выводе (3.1) (в этих рассуждениях достаточно, чтобы $\varphi^*(t) \in W_{q^*}^1([0, T])$), приходим к соотношению

$$p^*(t) = \frac{1}{G(t)} \left[\int_0^l ((a\omega)_x - ab\omega) u_x^* dx - \int_0^l ad\omega u^* dx + \varphi^{*'}(t) - H(t) \right]. \quad (3.5)$$

Поскольку $p^*(t)$ – решение уравнения (3.3), в силу определения оператора $\mathcal{A}$ в (3.2), справедливо также соотношение

$$p^*(t) = \frac{1}{G(t)} \left[\int_0^l ((a\omega)_x - ab\omega) u_x^* dx - \int_0^l ad\omega u^* dx + \varphi'(t) - H(t) \right]. \quad (3.6)$$

Из (3.5), (3.6) вытекает, что $\varphi'(t) = \varphi^{*'}(t)$ на $[0, T]$. Кроме того, в силу определения $\varphi^*(t)$ в (3.4) и условия согласования (H)

$$\varphi^*(0) = \int_0^l u_0(x)\omega(x) dx = \varphi(0).$$

Поскольку $\varphi(t)$ и $\varphi^*(t)$ являются абсолютно непрерывными функциями, в силу формулы Ньютона–Лейбница имеем отсюда, что $\varphi(t) \equiv \varphi^*(t)$ на $[0, T]$. Следовательно, пара $\{u^*(t, x), p(t)\}$ является обобщенным решением обратной задачи (1.1)–(1.3). Лемма 3.1 доказана.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть выполнены условия (A)–(H), q^* определена в (1.5). Положим

$$\beta = \sqrt{3a_1} \frac{lK_g}{g_0} e^{\lambda^* T} \left(K_\omega^* + K_b^* + K_d^* \frac{l}{\sqrt{2}} \right), \quad \gamma = 4\beta^2, \quad (3.7)$$

где λ^* определена соотношением (2.6). Тогда существует и единственно обобщенное решение $\{\hat{u}(t, x), \hat{p}(t)\}$ обратной задачи (1.1)–(1.3), причем $\hat{u}(t, x) \in W_{q^*}^{1,2}(Q)$, и справедливы оценки

$$\|\hat{p}\|_{L_\infty([0, T])} \leq \frac{2e^{\gamma T/2}}{g_0} \left\{ e^{\lambda^* T} l^{1/2} \left(K_\omega^* + K_b^* + K_d^* \frac{l}{\sqrt{2}} \right) (\|u'_0\|_{L_2([0, l])}^2 + 3lTa_1K_h^2)^{1/2} + K_\varphi^* + a_1K_hK_\omega l \right\}, \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} & \sup_{0 \leq t \leq T} \|\hat{u}_x(t, \cdot)\|_{L_2([0, l])}^2 + \|\hat{u}_{xx}\|_{L_{q^*}(Q)}^2 + \|\hat{u}_t\|_{L_{q^*}(Q)}^2 \\ & \leq e^{2\lambda^* T} (1 + K_a + a_1(lT)^{1/q}) [\|u'_0\|_{L_2([0, l])}^2 + 6lTa_1(K_g^2 \|\hat{p}\|_{L_\infty([0, T])}^2 + K_h^2)], \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\|\hat{u}\|_{L_\infty(Q)} \leq [M_0 + a_1(K_g \|\hat{p}\|_{L_\infty([0, T])} + K_h)T] e^{a_1 d_2 T}, \quad (3.10)$$

$$\|\hat{u}\|_{C^{0,1}(Q)} \leq K_2, \quad (3.11)$$

где $K_2 = \text{const} > 0$ зависит от l, T и констант из условий (A)–(G).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $p^{(1)}(t), p^{(2)}(t) \in L_\infty([0, T])$, а $u^{(1)}(t, x)$ и $u^{(2)}(t, x)$ – решения прямой задачи (1.1), (1.2) с $p^{(1)}(t)$ и $p^{(2)}(t)$ в правой части (1.1), соответственно.

Положим $v(t, x) = u^{(1)}(t, x) - u^{(2)}(t, x)$, $r(t) = p^{(1)}(t) - p^{(2)}(t)$. Тогда пара $\{v(t, x), r(t)\}$ удовлетворяет соотношениям

$$v_t - a(t, x)[v_{xx} + b(t, x)v_x + d(t, x)v] = a(t, x)r(t)g(t, x), \quad (3.12)$$

$$v(0, x) = v(t, 0) = v(t, l) = 0. \quad (3.13)$$

Покажем, что оператор $\mathcal{A}$ является сжимающим в $L_\infty([0, T])$, если норму в этом пространстве выбрать специальным образом. В силу (3.2) имеем

$$\mathcal{A}(p^{(1)})(t) - \mathcal{A}(p^{(2)})(t) = \frac{1}{G(t)} \left[\int_0^l ((a\omega)_x - ab\omega)v_x dx - \int_0^l ad\omega v dx \right],$$

откуда с учетом неравенства (1.4) и обозначений (1.5)

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}(p^{(1)})(t) - \mathcal{A}(p^{(2)})(t)| &\leq \frac{l^{1/2}}{g_0} (K_\omega^* + K_b^*) \|v_x(t, \cdot)\|_{L_2([0, l])} + \frac{l^{1/2}}{g_0} K_d^* \|v(t, \cdot)\|_{L_2([0, l])} \\ &\leq \frac{l^{1/2}}{g_0} \left(K_\omega^* + K_b^* + K_d^* \frac{l}{\sqrt{2}} \right) \|v_x(t, \cdot)\|_{L_2([0, l])}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

В силу (2.7), примененного к функции $v(t, x)$ (в данном случае $f(t, x) = r(t)g(t, x)$), имеем

$$\begin{aligned} \|v_x(t, \cdot)\|_{L_2([0, l])}^2 &\leq 3e^{2\lambda^* T} \int_0^t r^2(\tau) \left(\int_0^l a(\tau, x)g^2(\tau, x) dx \right) d\tau \\ &\leq 3le^{2\lambda^* T} a_1 K_g^2 \int_0^t r^2(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Подставляя (3.15) в (3.14), с учетом обозначения (3.7) получим неравенство

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}(p^{(1)})(t) - \mathcal{A}(p^{(2)})(t)|^2 &\leq \frac{3l^2 a_1 K_g^2}{g_0^2} e^{2\lambda^* T} \left(K_\omega^* + K_b^* + K_d^* \frac{l}{\sqrt{2}} \right)^2 \int_0^t r^2(\tau) d\tau \\ &\equiv \beta^2 \int_0^t r^2(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Пусть γ определена в (3.7). Умножая неравенство (3.16) на $e^{-\gamma t}$, приходим к оценке

$$e^{-\gamma t} |\mathcal{A}(p^{(1)})(t) - \mathcal{A}(p^{(2)})(t)|^2 \leq \beta^2 e^{-\gamma t} \int_0^t r^2(\tau) d\tau. \quad (3.17)$$

Обозначим

$$J(t) = \int_0^t r^2(\tau) d\tau, \quad P(t) = e^{-\gamma t} J(t).$$

Пусть $\hat{t} \in [0, T]$ — точка максимума функции $P(t)$ на отрезке $[0, T]$. Тогда, как нетрудно проверить, в этой точке

$$J(\hat{t}) \leq \frac{1}{\gamma} J'(\hat{t}) \equiv \frac{1}{\gamma} r^2(\hat{t}),$$

а следовательно, из (3.17) вытекает оценка

$$e^{-\gamma t/2} |\mathcal{A}(p^{(1)})(t) - \mathcal{A}(p^{(2)})(t)| \leq \frac{\beta}{\sqrt{\gamma}} r(\hat{t}) e^{-\gamma \hat{t}/2}. \quad (3.18)$$

Введем в пространстве $L_\infty([0, T])$ норму

$$\|z\|_\gamma = \|e^{-\gamma t/2} z\|_{L_\infty([0, T])}, \quad z \in L_\infty([0, T]).$$

Тогда из (3.18) с учетом определения γ в (3.7) вытекает неравенство

$$\|\mathcal{A}(p^{(1)})(t) - \mathcal{A}(p^{(2)})(t)\|_\gamma \leq \frac{1}{2} \|r\|_\gamma \equiv \frac{1}{2} \|p^{(1)} - p^{(2)}\|_\gamma, \quad (3.19)$$

т.е. оператор $\mathcal{A}$ является сжимающим оператором в $L_\infty([0, T])$ с выбранной нормой $\|\cdot\|_\gamma$.

Следовательно, с учетом леммы 3.1 в прямоугольнике Q существует и единственно обобщенное решение $\{\hat{u}(t, x), \hat{p}(t)\}$ обратной задачи (1.1)–(1.3).

Обозначим через $z_0(t, x)$ решение прямой задачи для уравнения

$$u_t - a(t, x)[u_{xx} + b(t, x)u_x + d(t, x)u] = a(t, x)h(t, x) \quad (3.20)$$

с краевыми условиями (1.2). Заметим, что уравнение (3.20) совпадает с уравнением (1.1), в котором $p(t) \equiv 0$. Но тогда для $z_0(t, x)$ справедлива оценка (2.7) с $f(t, x) = h(t, x)$, а следовательно,

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|z_{0x}(t, \cdot)\|_{L_2([0, l])}^2 \leq e^{2\lambda^* T} [\|u'_0\|_{L_2([0, l])}^2 + 3lTa_1K_h^2]. \quad (3.21)$$

Пусть $p(t) \equiv 0$ – нулевое приближение решения уравнения (3.3) при применении метода итераций. Тогда

$$\mathcal{A}(0)(t) = \frac{1}{G(t)} \left[\int_0^l ((a\omega)_x - ab\omega) z_{0x} dx - \int_0^l ad\omega z_0 dx \right],$$

откуда в силу условий (A), (B), (F), (G), неравенства (1.4) и обозначений (1.5)

$$|\mathcal{A}(0)(t)| \leq \frac{l^{1/2}}{g_0} \left(K_\omega^* + K_b^* + K_d^* \frac{l}{\sqrt{2}} \right) \|z_{0x}(t, \cdot)\|_{L_2([0, l])}. \quad (3.22)$$

Пусть $p_1(t)$ – первое приближение решения уравнения (3.3) при применении метода итераций. Тогда в силу известной оценки ошибки n -го приближения решения при применении метода итераций (см., например, [20; с. 43]), с учетом (3.19) имеем

$$\|p_1(t) - \hat{p}(t)\|_\gamma \leq \left\| \mathcal{A}(0)(t) + \frac{\varphi'(t)}{G(t)} - \frac{H(t)}{G(t)} \right\|_\gamma,$$

откуда, воспользовавшись (3.22) и (3.21), получаем

$$\begin{aligned} \|\hat{p}(t)\|_\gamma &\leq 2 \left\| \mathcal{A}(0)(t) + \frac{\varphi'(t)}{G(t)} - \frac{H(t)}{G(t)} \right\|_\gamma \\ &\leq \frac{2}{g_0} \left\{ l^{1/2} e^{\lambda^* T} \left(K_\omega^* + K_b^* + K_d^* \frac{l}{\sqrt{2}} \right) (\|u'_0\|_{L_2([0, l])}^2 + 3lTa_1K_h^2)^{1/2} \right. \\ &\quad \left. + K_\varphi^* + la_1K_hK_\omega \right\}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

При выводе (3.23) мы также воспользовались условиями (C), (E).

Из (3.23), очевидно, вытекает оценка (3.8). Оценка (3.9) – есть следствие оценок (2.7)–(2.9) при $f(t, x) = \hat{p}(t)g(t, x) + h(t, x)$. Наконец, оценка (3.10) следует из принципа максимума (см., [19; раздел 3]), а оценка (3.11) – из [1]. Теорема 3.1 доказана.

4. Устойчивость решения обратной задачи. В данном пункте получим оценки устойчивости решения обратной задачи (1.1)–(1.3) относительно изменения функций $g(t, x)$, $h(t, x)$, $\varphi(t)$, $u_0(x)$ с константами, которые явно выписываются через входные данные задачи. Справедлива

ТЕОРЕМА 4.1. *Рассмотрим в Q две обратные задачи:*

$$u_t - a(t, x)[u_{xx} + b(t, x)u_x + d(t, x)u] = a(t, x)[p(t)g^{(j)}(t, x) + h^{(j)}(t, x)], \quad (4.1)$$

$$u(0, x) = u_0^{(j)}(x), \quad u(t, 0) = u(t, l) = 0, \quad (4.2)$$

$$\int_0^l u(t, x)\omega(x) dx = \varphi^{(j)}(t), \quad (4.3)$$

$j = 1, 2$. Предположим, что для этих задач выполнены условия (A)–(H). Пусть $\{u^{(j)}(t, x), p^{(j)}(t)\}$ – соответствующие решения этих задач. (Они существуют и единственны в силу теоремы 3.1). Тогда имеют место следующие оценки:

$$\begin{aligned} & \|p^{(1)} - p^{(2)}\|_{L_\infty([0, T])} \\ & \leq \frac{2e^{\gamma T/2}}{g_0} \left\{ e^{\lambda^* T} l^{1/2} \left(K_\omega^* + K_b^* + K_d^* \frac{l}{\sqrt{2}} \right) \right. \\ & \quad \times \left(\|u_{0x}^{(1)} - u_{0x}^{(2)}\|_{L_2([0, l])}^2 + 6lTa_1 \|p^{(2)}\|_{L_\infty([0, T])}^2 \|g^{(1)} - g^{(2)}\|_{L_\infty(Q)}^2 \right. \\ & \quad \left. + 6lTa_1 \|h^{(1)} - h^{(2)}\|_{L_\infty(Q)}^2 \right)^{1/2} \\ & \quad + \|\varphi_t^{(1)} - \varphi_t^{(2)}\|_{L_\infty([0, T])} + la_1 K_\omega (\|p^{(2)}\|_{L_\infty([0, T])} \|g^{(1)} - g^{(2)}\|_{L_\infty(Q)} \\ & \quad \left. + \|h^{(1)} - h^{(2)}\|_{L_\infty(Q)}) \right\}, \quad (4.4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sup_{0 \leq t \leq T} \|u_x^{(1)}(t, \cdot) - u_x^{(2)}(t, \cdot)\|_{L_2([0, l])}^2 + \|u_{xx}^{(1)} - u_{xx}^{(2)}\|_{L_{q^*}(Q)}^2 + \|u_t^{(1)} - u_t^{(2)}\|_{L_{q^*}(Q)}^2 \\ & \leq e^{2\lambda^* T} [1 + K_a + a_1(lT)^{1/q}] \\ & \quad \times \left\{ \|u_{0x}^{(1)} - u_{0x}^{(2)}\|_{L_2([0, l])}^2 + 9lTa_1 [K_g^2 \|p^{(1)} - p^{(2)}\|_{L_\infty([0, T])}^2 \right. \\ & \quad \left. + \|p^{(2)}\|_{L_\infty([0, T])}^2 \|g^{(1)} - g^{(2)}\|_{L_\infty(Q)}^2 + \|h^{(1)} - h^{(2)}\|_{L_\infty(Q)}^2] \right\}, \quad (4.5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \|u^{(1)} - u^{(2)}\|_{L_\infty(Q)} \\ & \leq [\|u_0^{(1)} - u_0^{(2)}\|_{L_\infty(Q)} + a_1 K_g T \|p^{(1)} - p^{(2)}\|_{L_\infty([0, T])} \\ & \quad + a_1 T \|p^{(2)}\|_{L_\infty([0, T])} \|g^{(1)} - g^{(2)}\|_{L_\infty(Q)} + a_1 T \|h^{(1)} - h^{(2)}\|_{L_\infty(Q)}] e^{a_1 d_2 T}. \quad (4.6) \end{aligned}$$

В оценках (4.4)–(4.6) норма $\|p^{(2)}\|_{L_\infty([0, T])}$ удовлетворяет оценке (3.8), а константа λ^* определена в (2.6).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$\begin{aligned} v^*(t, x) &= u^{(1)}(t, x) - u^{(2)}(t, x), & \delta^*(t) &= p^{(1)}(t) - p^{(2)}(t), \\ v_0(x) &= u_0^{(1)}(x) - u_0^{(2)}(x), & \psi(t) &= \varphi^{(1)}(t) - \varphi^{(2)}(t), \\ \rho(t, x) &= g^{(1)}(t, x) - g^{(2)}(t, x), & \sigma(t, x) &= h^{(1)}(t, x) - h^{(2)}(t, x), \end{aligned}$$

$$G^{(j)}(t) = \int_0^l a(t, x) g^{(j)}(t, x) \omega(x) dx, \quad j = 1, 2.$$

Тогда пара $\{v^*(t, x), \delta^*(t)\}$ удовлетворяет соотношениям

$$\begin{aligned} v_t - a(t, x)[v_{xx} + b(t, x)v_x + d(t, x)v] \\ = a(t, x)[\delta(t)g^{(1)}(t, x) + p^{(2)}(t)\rho(t, x) + \sigma(t, x)], \quad (t, x) \in Q, \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$v(0, x) = v_0(x), \quad x \in [0, l], \quad v(t, 0) = v(t, l) = 0, \quad t \in [0, T], \quad (4.8)$$

$$\int_0^l v(t, x) \omega(x) dx = \psi(t), \quad t \in [0, T]. \quad (4.9)$$

Повторяя выкладки, проведенные при выводе (3.1), получим равенство

$$\begin{aligned} \delta^*(t) = \frac{1}{G^{(1)}(t)} \left[\int_0^l ((a\omega)_x - ab\omega)v_x^* dx - \int_0^l ad\omega v^* dx + \psi'(t) \right. \\ \left. - p^{(2)}(t) \int_0^l a\rho\omega dx - \int_0^l a\sigma\omega dx \right]. \end{aligned} \quad (4.10)$$

По аналогии с (3.2) введем оператор $\mathcal{B}: L_\infty([0, T]) \rightarrow L_\infty([0, T])$ по формуле

$$\mathcal{B}(\delta)(t) = \frac{1}{G^{(1)}(t)} \left[\int_0^l ((a\omega)_x - ab\omega)v_x dx - \int_0^l ad\omega v dx \right], \quad (4.11)$$

где $v(t, x)$ – решение прямой задачи (4.7), (4.8) с выбранной функцией $\delta(t)$ в правой части (4.7).

Тогда из (4.10) следует, что $\delta^*(t)$ – решение операторного уравнения

$$\delta(t) = \mathcal{B}(\delta)(t) + \frac{1}{G^{(1)}(t)} \left[\psi'(t) - p^{(2)}(t) \int_0^l a\rho\omega dx - \int_0^l a\sigma\omega dx \right]. \quad (4.12)$$

Пусть $\delta^{(1)}(t), \delta^{(2)}(t) \in L_\infty([0, T])$. Повторяя рассуждения, проведенные в теореме 3.1 при выводе оценки (3.19), получим, что справедлива аналогичная оценка

$$\|\mathcal{B}(\delta^{(1)})(t) - \mathcal{B}(\delta^{(2)})(t)\|_\gamma \leq \frac{1}{2} \|\delta^{(1)}(t) - \delta^{(2)}(t)\|_\gamma, \quad (4.13)$$

где γ определена в (3.7). Таким образом, оператор $\mathcal{B}$ является сжимающим оператором в пространстве $L_\infty([0, T])$ с нормой $\|\cdot\|_\gamma$.

Пусть $w_0(t, x)$ – решение прямой задачи (4.7), (4.8) с $\delta(t) \equiv 0$ в правой части (4.7). Тогда для $w_0(t, x)$ справедлива оценка (2.7) с $f(t, x) = p^{(2)}(t)\rho(t, x) + \sigma(t, x)$, т.е.

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq t \leq T} \|w_{0x}(t, \cdot)\|_{L_2([0, l])}^2 \\ \leq e^{2\lambda^* T} [v_0'^2 \|_{L_2([0, l])}^2 + 6lTa_1 (\|p^{(2)}\|_{L_\infty([0, T])}^2 \|\rho\|_{L_\infty(Q)}^2 + \|\sigma\|_{L_\infty(Q)}^2)]. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Пусть $\delta(t) \equiv 0$ – нулевое приближение решения уравнения (4.12) при применении метода итераций. Тогда (см. (3.22))

$$|\mathcal{B}(0)(t)| \leq \frac{l^{1/2}}{g_0} \left(K_\omega^* + K_b^* + K_d^* \frac{l}{\sqrt{2}} \right) \|w_{0x}(t, \cdot)\|_{L_2([0, l])}. \quad (4.15)$$

Пусть $\delta_1(t)$ – первое приближение решения уравнения (4.12) при применении метода итераций. Тогда по аналогии с выводом оценки (3.23) в теореме 3.1 в силу (4.15) и (4.14) имеем

$$\begin{aligned} \|\delta^*\|_\gamma &\leq 2 \left\| \mathcal{B}(0) + \frac{\psi'}{G^{(1)}} - \frac{p^{(2)}}{G^{(1)}} \int_0^l a \rho \omega dx - \frac{1}{G^{(1)}} \int_0^l a \sigma \omega dx \right\|_\gamma \\ &\leq \frac{2}{g_0} \left\{ e^{\lambda^* T} l^{1/2} \left(K_\omega^* + K_b^* + K_d^* \frac{l}{\sqrt{2}} \right) \right. \\ &\quad \times \left[\|v'_0\|_{L_2([0,l])}^2 + 6lTa_1 (\|p^{(2)}\|_{L_\infty([0,T])}^2 \|\rho\|_{L_\infty(Q)}^2 + \|\sigma\|_{L_\infty(Q)}^2) \right]^{1/2} \\ &\quad \left. + \|\psi'\|_{L_\infty([0,T])} + la_1 K_\omega [\|p^{(2)}\|_{L_\infty([0,T])} \|\rho\|_{L_\infty(Q)} + \|\sigma\|_{L_\infty(Q)}] \right\}. \end{aligned}$$

Из этой оценки, очевидно, вытекает (4.4). Поскольку $v^*(t, x)$ удовлетворяет соотношениям (4.7), (4.8), оценка (4.5) вытекает из оценок (2.7)–(2.9) при

$$f(t, x) = \delta^*(t)g^{(1)}(t, x) + p^{(2)}(t)\rho(t, x) + \sigma(t, x)$$

с учетом условий (A)–(D). Наконец, оценка (4.6) следует из принципа максимума ([19; раздел 3]). Теорема 4.1 доказана.

5. Случай неограниченных коэффициентов. Условие (A) можно ослабить и допустить неограниченность коэффициента $a(t, x)$. Именно, в данном пункте будем предполагать, что вместо условия (A) выполнено условие

$$\begin{aligned} a(t, x) \geq 0, \quad (t, x) \in Q, \quad a(t, x), \quad \frac{1}{a(t, x)} \in L_q(Q), \quad q > 1, \quad \|a\|_{L_q(Q)} \leq a_2, \\ \left\| \frac{1}{a} \right\|_{L_q(Q)} \leq K_a, \quad a(t, x)g(t, x), a(t, x)h(t, x), a(t, x)\omega(x) \in L_\infty(Q), \\ \|ag\|_{L_\infty(Q)} \leq K_g^*, \quad \|ah\|_{L_\infty(Q)} \leq K_h^*; \end{aligned} \quad (A')$$

здесь $a_2, K_g^* = \text{const} > 0, K_h^* = \text{const} \geq 0$.

Для упрощения формулировок и выкладок будем считать, что в уравнении (1.1) $b(t, x) = d(t, x) \equiv 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1. Очевидно, условиям (A'), (C), (F), (G) удовлетворяют, например, следующие функции:

$$\begin{aligned} a(t, x) &= x^\kappa (l-x)^{-\nu} \hat{a}(t, x), \quad \omega(x) = x^{1-\kappa} (l-x)^{1+\nu} \hat{\omega}(x), \\ g(t, x) &= (l-x)^\nu \hat{g}(t, x), \quad h(t, x) = (l-x)^\nu \hat{h}(t, x), \end{aligned}$$

где $0 < \kappa, \nu < 1$, $\hat{a}(t, x)$ ограничена и имеет ограниченную в Q производную по x , $\hat{a}(t, x) \geq \Lambda_0 > 0$ в Q , $\hat{\omega}(x)$ положительная и ограниченная на $[0, l]$ функция с ограниченной на $[0, l]$ производной, $\hat{g}(t, x)$ ограниченная и положительная в Q функция, $\hat{h}(t, x)$ ограниченная в Q функция.

В данном пункте решение обратной задачи (1.1)–(1.3) будет пониматься в следующем смысле.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1. Под *обобщенным решением обратной задачи* (1.1)–(1.3) будем понимать пару функций $\{u(t, x), p(t)\}$ таких, что

- 1) $u(t, x) \in W_s^{1,2}(Q)$, $s > 1$, $u(t, x)$ удовлетворяет в Q условию Липшица по x с константой Липшица, не зависящей от t , $p(t) \in L_\infty([0, T])$;
- 2) данная пара удовлетворяет уравнению (1.1) почти всюду в Q ;
- 3) граничные условия принимаются поточечно вдоль оси x для почти всех $t \in [0, T]$, начальное условие принимается в среднем, т.е.

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \int_0^l |u(t, x) - u_0(x)| dx = 0;$$

- 4) равенство (1.3) удовлетворяется в каждой точке $t \in [0, T]$.

Заметим, что в силу [1] для всех $p(t) \in L_\infty([0, T])$ решение прямой задачи (1.1), (1.2) существует и единственно, причем $u(t, x) \in W_{q^*}^{1,2}(Q)$, где $q^* > 1$ определена в (1.5).

Как и выше, воспользуемся обозначением (2.2) и выведем ряд оценок для решения $u(t, x)$ прямой задачи (1.1), (1.2). Для этого разделим уравнение (1.1) на $\sqrt{a(t, x)}$, возведем результат в квадрат и проинтегрируем по $Q(0, \tau)$, $\tau \in [0, T]$. Проведя выкладки по аналогии с п. 2, получим следующие аналоги оценок (2.7)–(2.9):

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq t \leq \tau} \|u_x(t, \cdot)\|_{L_2([0, l])}^2 + \int_{Q(0, \tau)} \frac{1}{a(t, x)} u_t^2 dx dt + \int_{Q(0, \tau)} a(t, x) u_{xx}^2 dx dt \\ \leq \|u'_0\|_{L_2([0, l])}^2 + \int_{Q(0, \tau)} a(t, x) f^2(t, x) dx dt, \end{aligned} \quad (5.1)$$

$$\|u_{xx}\|_{L_{q^*}(Q)}^2 \leq K_a \left[\|u'_0\|_{L_2([0, l])}^2 + \int_Q a(t, x) f^2(t, x) dx dt \right], \quad (5.2)$$

$$\|u_t\|_{L_{q^*}(Q)}^2 \leq a_2 \left[\|u'_0\|_{L_2([0, l])}^2 + \int_Q a(t, x) f^2(t, x) dx dt \right]. \quad (5.3)$$

Кроме того, из принципа максимума (см. [19; раздел 3]) вытекает оценка

$$|u(t, x)| \leq M_0 + (K_g^* N_p + K_h^*) T, \quad (5.4)$$

а из результатов работы [1] – оценка

$$|u(t, x) - u(t, y)| \leq L_1 |x - y|, \quad (t, x), (t, y) \in Q, \quad (5.5)$$

где $L_1 = \text{const} \geq 0$ зависит от l , T , констант из условий (A), (C), (D) и N_p из (2.1).

Как и п. 3 перейдем к операторному уравнению относительно $p(t)$.

Введем оператор $\mathcal{A}_1: L_\infty([0, T]) \rightarrow L_\infty([0, T])$ по формуле

$$\mathcal{A}_1(p) = \frac{1}{G(t)} \int_0^l (a\omega)_x u_x dx, \quad (5.6)$$

где $u(t, x)$ – решение задачи (1.1), (1.2) с заданной $p(t) \in L_\infty([0, T])$ в правой части уравнения (1.1).

По аналогии с уравнением (3.3) рассмотрим уравнение

$$p(t) = \mathcal{A}_1(p)(t) + \frac{\varphi'(t)}{G(t)} - \frac{H(t)}{G(t)}. \quad (5.7)$$

Аналогично лемме 3.1 доказывается

ЛЕММА 5.1. Пусть выполнены условия (A'), (C)–(H). Тогда для того, чтобы пара $\{u(t, x), p(t)\}$ была обобщенным решением задачи (1.1)–(1.3) (в смысле определения 5.1), необходимо и достаточно, чтобы эта пара удовлетворяла соотношениям (1.1), (1.2), (5.7).

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть выполнены условия (A'), (C)–(H), q^* определена в (1.5). Положим

$$\beta^2 = \frac{l^2 K_\omega^{*2}}{g_0^2} K_g K_g^*, \quad \gamma = 4\beta^2. \quad (5.8)$$

Тогда существует и единственно обобщенное решение $\{\hat{u}(t, x), \hat{p}(t)\}$ обратной задачи (1.1)–(1.3), причем $\hat{u}(t, x) \in W_{q^*}^{1,2}(Q)$, и для него справедливы оценки

$$\|\hat{p}\|_{L_\infty([0,T])} \leq \frac{2e^{\gamma T/2}}{g_0} [l^{1/2} K_\omega^* (\|u'_0\|_{L_2([0,l])}^2 + lTK_h K_h^*)^{1/2} + K_\varphi^* + lK_\omega K_h^*], \quad (5.9)$$

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq t \leq T} \|\hat{u}_x(t, \cdot)\|_{L_2([0,l])}^2 + \|\hat{u}_{xx}\|_{L_{q^*}(Q)}^2 + \|\hat{u}_t\|_{L_{q^*}(Q)}^2 \\ \leq (1 + K_a + a_2) [\|u'_0\|_{L_2([0,l])}^2 + 2lT(K_g K_g^* \|\hat{p}\|_{L_\infty([0,T])}^2 + K_h K_h^*)], \end{aligned} \quad (5.10)$$

$$\|\hat{u}\|_{L_\infty(Q)} \leq M_0 + (K_g^* \|\hat{p}\|_{L_\infty([0,T])} + K_h^*)T, \quad (5.11)$$

$$|\hat{u}(t, x) - \hat{u}(t, y)| \leq L_2 |x - y|, \quad (t, x), (t, y) \in Q, \quad (5.12)$$

где $L_2 = \text{const} \geq 0$ зависит от l, T и констант из условий (A'), (C)–(G).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и при доказательстве теоремы 3.1, рассмотрим функции

$$\begin{aligned} p^{(1)}(t), \quad p^{(2)}(t), \quad u^{(1)}(t, x), \quad u^{(2)}(t, x), \\ v(t, x) \equiv u^{(1)}(t, x) - u^{(2)}(t, x), \quad r(t) \equiv p^{(1)}(t) - p^{(2)}(t). \end{aligned}$$

Тогда пара $\{v(t, x), r(t)\}$ удовлетворяет соотношению (3.12) (где $b(t, x) = d(t, x) \equiv 0$) и краевым условиям (3.13). В силу (5.6) имеем

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}_1(p^{(1)})(t) - \mathcal{A}_1(p^{(2)})(t)|^2 &= \left| \frac{1}{G(t)} \int_0^l (a\omega)_x v_x dx \right|^2 \\ &\leq \frac{l}{g_0^2} K_\omega^{*2} \left(\int_0^l |v_x| dx \right)^2 \leq \frac{l}{g_0^2} K_\omega^{*2} \|v_x(t, \cdot)\|_{L_2([0,l])}^2. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Применяя для оценки $\|v_x(t, \cdot)\|_{L_2([0,l])}^2$ в (5.13) неравенство (5.1) с учетом условия (3.13) и того, что в данном случае $f(t, x) = r(t)g(t, x)$ (см. (3.12)), приходим к неравенству

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}_1(p^{(1)})(t) - \mathcal{A}_1(p^{(2)})(t)|^2 &\leq \frac{l}{g_0^2} K_\omega^{*2} \int_{Q(0,t)} a(\tau, x) r^2(\tau) g^2(\tau, x) dx d\tau \\ &\leq \frac{l^2}{g_0^2} K_\omega^{*2} K_g K_g^* \int_0^t r^2(\tau) d\tau \equiv \beta^2 \int_0^t r^2(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (5.14)$$

В последнем равенстве мы воспользовались определением β^2 в (5.8).

Из (5.14) по аналогии с доказательством теоремы 3.1 получаем соотношение

$$\|\mathcal{A}_1(p^{(1)})(t) - \mathcal{A}_1(p^{(2)})(t)\|_\gamma \leq \frac{1}{2} \|r\|_\gamma, \quad (5.15)$$

где γ определена в (5.8). Из (5.15), как и в случае теоремы 3.1, вытекает существование и единственность решения $\{\hat{u}(t, x), \hat{p}(t)\}$ обратной задачи (1.1)–(1.3).

Повторяя далее рассуждения из доказательства теоремы 3.1, приходим к оценкам (5.9)–(5.12). Теорема 5.1 доказана.

Справедлив также аналог теоремы 4.1 об оценке устойчивости решения обратной задачи, а именно, справедлива

ТЕОРЕМА 5.2. *Рассмотрим в Q две обратные задачи (4.1)–(4.3) с функциями $b(t, x) = d(t, x) \equiv 0$ в уравнении (4.1), $j = 1, 2$. Предположим, что для этих задач выполнены условия (A'), (C)–(H). Пусть $\{u^{(j)}(t, x), p^{(j)}(t)\}$ – соответствующие решения этих задач (которые существуют и единственны в силу теоремы 5.1). Тогда справедливы оценки*

$$\begin{aligned} & \|p^{(1)} - p^{(2)}\|_{L_\infty([0, T])} \\ & \leq \frac{2e^{\gamma T/2}}{g_0} \left\{ e^{\lambda^* T} l^{1/2} K_\omega^* [\|u_{0x}^{(1)} - u_{0x}^{(2)}\|_{L_2([0, l])}^2 \right. \\ & \quad + 2a_2 \|p^{(2)}\|_{L_\infty([0, T])}^2 \|g^{(1)} - g^{(2)}\|_{L_\infty(Q)}^2 + 2a_2 \|h^{(1)} - h^{(2)}\|_{L_\infty(Q)}^2]^{1/2} \\ & \quad + \|\varphi_t^{(1)} - \varphi_t^{(2)}\|_{L_\infty([0, T])} + l K_\omega (\|p^{(2)}\|_{L_\infty([0, T])} \|a(g^{(1)} - g^{(2)})\|_{L_\infty(Q)} \\ & \quad \left. + \|a(h^{(1)} - h^{(2)})\|_{L_\infty(Q)}) \right\}, \end{aligned} \quad (5.16)$$

$$\begin{aligned} & \sup_{0 \leq t \leq T} \|u_x^{(1)}(t, \cdot) - u_x^{(2)}(t, \cdot)\|_{L_2([0, l])}^2 + \|u_{xx}^{(1)} - u_{xx}^{(2)}\|_{L_{q^*}(Q)}^2 + \|u_t^{(1)} - u_t^{(2)}\|_{L_{q^*}(Q)}^2 \\ & \leq (1 + K_a + a_2) \left\{ \|u_{0x}^{(1)} - u_{0x}^{(2)}\|_{L_2([0, l])}^2 + 3a_2 [K_g^2 \|p^{(1)} - p^{(2)}\|_{L_\infty([0, T])}^2 \right. \\ & \quad \left. + \|p^{(2)}\|_{L_\infty([0, T])}^2 \|g^{(1)} - g^{(2)}\|_{L_\infty(Q)}^2 + \|h^{(1)} - h^{(2)}\|_{L_\infty(Q)}^2] \right\}, \end{aligned} \quad (5.17)$$

$$\begin{aligned} & \|u^{(1)} - u^{(2)}\|_{L_\infty(Q)} \\ & \leq \|u_0^{(1)} - u_0^{(2)}\|_{L_\infty(Q)} + \|p^{(1)} - p^{(2)}\|_{L_\infty([0, T])} K_g^* T \\ & \quad + \|p^{(2)}\|_{L_\infty([0, T])} \|a(g^{(1)} - g^{(2)})\|_{L_\infty(Q)} T + \|a(h^{(1)} - h^{(2)})\|_{L_\infty(Q)}. \end{aligned} \quad (5.18)$$

В оценках (5.16)–(5.18) норма $\|p^{(2)}\|_{L_\infty([0, T])}$ удовлетворяет оценке (5.9).

Доказательство теоремы 5.2 аналогично доказательству теоремы 4.1.

Автор благодарит А. И. Прилепко, А. Б. Костина, Д. Г. Орловского, В. В. Соловьева за полезное обсуждение данной работы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] С. Н. Кружков, “Квазилинейные параболические уравнения и системы с двумя независимыми переменными”, Тр. сем. им. И. Г. Петровского, **5**, Изд-во Моск. ун-та, М., 1979, 217–272.
- [2] А. И. Прилепко, Д. Г. Орловский, “Об определении параметра эволюционного уравнения в обратных задачах математической физики. I”, Дифференц. уравнения, **21:1** (1985), 119–129.
- [3] А. И. Прилепко, Д. Г. Орловский, “Об определении параметра эволюционного уравнения в обратных задачах математической физики. II”, Дифференц. уравнения, **21:4** (1985), 694–700.

- [4] J. R. Cannon, Y. Lin, “Determination of a parameter $p(t)$ in some quasilinear parabolic differential equations”, *Inverse Problems*, **4**:1 (1988), 35–45.
- [5] J. R. Cannon, Y. Lin, “Determination of a parameter $p(t)$ in a Hölder classes for some semilinear parabolic equations”, *Inverse Problems*, **4**:3 (1988), 595–606.
- [6] V. L. Kamynin, “On convergence of the solutions of inverse problems for parabolic equations with weakly converging coefficients”, *Elliptic and Parabolic Problems*, Pitman Res. Notes Math. Ser., **325**, Longman Sci. Tech., Harlow, 1995, 130–151.
- [7] A. I. Prilepko, D. G. Orlovsky, I. A. Vasin, *Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics*, Monogr. Textbooks Pure Appl. Math., **231**, Marcel Dekker, New York, 2000.
- [8] В. Л. Камынин, Э. Франчини, “Об одной обратной задаче для параболического уравнения высокого порядка”, *Матем. заметки*, **64**:5 (1998), 680–691.
- [9] M. Ivancho, N. Saldina, “An inverse problem for strongly degenerate heat equation”, *J. Inverse Ill-Posed Probl.*, **14**:5 (2006), 465–480.
- [10] P. Cannarsa, J. Tort, M. Yamamoto, “Determination of source terms in a degenerate parabolic equation”, *Inverse Problems*, **26**:10 (2010), 105003.
- [11] Z.-C. Deng, L. Yang, “An inverse problem of identifying the coefficient of first-order in a degenerate parabolic equation”, *J. Comput. Appl. Math.*, **235**:15 (2011), 4404–4417.
- [12] Z.-C. Deng, K. Qian, X.-B. Rao, L. Yang, G.-W. Luo, “An inverse problem of identifying the source coefficient in a degenerate heat equation”, *Inverse Probl. Sci. Eng.*, **23**:3 (2014), 498–517.
- [13] Z. Deng, L. Yang, “An inverse problem of identifying the radiative coefficient in degenerate parabolic equation”, *Chin. Ann. Math. Ser. B*, **35**:3 (2014), 355–382.
- [14] N. Huzyk, “Inverse problem of determining the coefficients in a degenerate parabolic equation”, *Electron. J. Differential Equations*, 2014, Paper No. 172.
- [15] A. Kawamoto, “Inverse problems for linear degenerate parabolic equations by “time-like” Carleman estimate”, *J. Inverse Ill-Posed Probl.*, **23**:1 (2015), 1–21.
- [16] I. Bouchoev, V. Isakov, “Uniqueness, stability and numerical methods for the inverse problem that arises in financial markets”, *Inverse Problems*, **15**:3 (1999), R95–R116.
- [17] L. Jiang, Y. Tao, “Identifying the volatility of underlying assets from option prices”, *Inverse Problems*, **17**:1 (2001), 137–155.
- [18] L. Jiang, Q. Chen, L. Wang, J. E. Zhang, “A new well-posed algorithm to recover implied local volatility”, *Quant. Finance*, **3**:6 (2003), 451–457.
- [19] С. Н. Кружков, *Нелинейные уравнения с частными производными*, Ч. 1, Изд-во Моск. ун-та, М., 1969.
- [20] Л. А. Люстерник, В. И. Соболев, *Краткий курс функционального анализа*, Высшая школа, М., 1982.

В. Л. Камынин

Национальный исследовательский ядерный
университет “МИФИ”, г. Москва
E-mail: vlkamynin2008@yandex.ru

Поступило

13.04.2015