Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Г. Гуревич, В. В. Кучеренко, Э. Рамирес де Арейано,
О задаче с косой производной в теории гальваномангнитных
эффектов, *Матем. заметки*, 1999, том 65, выпуск 4, 520–
532

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1078>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 18:12:08

УДК 517.956.223

О ЗАДАЧЕ С КОСОЙ ПРОИЗВОДНОЙ В ТЕОРИИ ГАЛЬВАНОМАГНИТНЫХ ЭФФЕКТОВ

Ю.Г. Гуревич, В.В. Кучеренко, Э. Рамирес де Арейано

В работе построена асимптотика решения уравнения Лапласа в “длинном” прямоугольнике, когда на его “длинных сторонах” задана косая производная, а на его “коротких сторонах” данные Дирихле. По асимптотике вычислена интегральная характеристика – магнетосопротивление. Получены новые формулы для магнетосопротивления в слабых магнитных полях.

Библиография: 10 названий.

1. Постановка задачи и основные результаты. Краевая задача с косой производной естественно возникает в проблемах переноса в анизотропной среде. Эти задачи описываются одинаковыми уравнениями, и в качестве примера мы рассмотрим задачу о переносе заряда в анизотропной среде, где анизотропия обусловлена магнитным полем (гиротропия), и вычислим асимптотику по малой анизотропии, т.е. по малому магнитному полю.

Итак, рассмотрим металлический образец в форме параллелепипеда $V = \{x, y, z : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq c, 0 \leq z \leq b\}$ в однородном магнитном поле B параллельном оси y . Пусть на поверхности параллелепипеда на плоскостях перпендикулярных осям z и y нормальные токи J_z, J_y равны 0, а на двух торцах перпендикулярных оси x заданы потенциалы $\varphi_0(z), \varphi_1(z)$:

$$J_z|_{z=0,b} = 0, \quad J_y|_{y=0,c} = 0, \quad \varphi|_{x=0} = \varphi_0(z), \quad \varphi|_{x=a} = \varphi_1(z). \quad (1)$$

Как известно, при изотропном законе дисперсии электронов [1] вектор тока J в металлах в магнитном поле параллельном оси y выражается через электрическое поле E и тензор проводимости $\|\sigma_{ik}\|$ по формулам

$$J_x = \sigma_{xx}(B)E_x - \sigma_{xz}(B)E_z, \quad J_z = \sigma_{zz}(B)E_z + \sigma_{zx}(B)E_x, \quad J_y = \sigma_{yy}(B)E_y; \quad (2)$$

здесь $B \stackrel{\text{def}}{=} \omega_H \tau$, ω_H – циклотронная частота, τ – время релаксации,

$$\sigma_{xx} = \sigma_{zz} = \frac{\sigma_0}{1 + B^2}, \quad \sigma_{yy} = \sigma_0, \quad \sigma_{xz} = \sigma_{zx} = \frac{\sigma_0 B}{1 + B^2}. \quad (3)$$

Работа второго автора выполнена при финансовой поддержке фонда CONACYT and CINVESTAV under Catedra Patrimonial. Авторы благодарят фонд CONACYT за частичную финансовую поддержку.

Из условия $\operatorname{div} J = 0$ в силу формул (2), (3) получим, что

$$\frac{\sigma_0}{1+B^2} \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) + \sigma_0 \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\sigma_0 B}{1+B^2} \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) = 0.$$

Положим $E = -\operatorname{grad} \varphi$. Тогда

$$\frac{\sigma_0}{1+B^2} \Delta_{xz} \varphi + \sigma_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0. \quad (4)$$

Очевидно, из условия $J_y|_{y=0,c} = 0$ следует, что электрическое поле E_y можно считать равным 0, значит потенциал φ можно считать не зависящим от y , т.е. $\varphi = \varphi(x, z)$. Итак, из уравнения (4) и краевых условий (1) для потенциала $\varphi(x, z)$ получим следующую задачу в прямоугольнике $\mathcal{D} = \{x, z : 0 \leq x \leq a, 0 \leq z \leq b\}$:

$$\begin{aligned} \Delta \varphi &= 0, \quad \varphi|_{x=0} = \varphi_0(z), \quad \varphi|_{x=a} = \varphi_1(z), \\ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \Big|_{z=0,a} &= 0, \quad \text{где } \alpha \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sigma_{zx}}{\sigma_{zz}} = B, \quad \varphi \in W_2^1(\mathcal{D}), \quad \varphi_\gamma \in W_2^1[0, b], \quad \gamma = 0, 1. \end{aligned} \quad (5)$$

Используя формулы (2), (3), выразим магнетопроводимость параллелепипеда V в направлении x в магнитном поле через потенциал φ . Поскольку $\operatorname{div} J = 0$ и нормальные токи на плоскостях параллельных оси x равны 0, средний ток по сечению перпендикулярному оси x не зависит от выбора сечения. Введем обозначения

$$\langle J_x \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{b} \int_0^b J_x(x, z) dz, \quad \overline{\varphi}_\gamma \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{b} \int_0^b \varphi_\gamma(z) dz \quad (6)$$

и определим проводимость $\rho(B)$ по формуле

$$\rho(B) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\langle J_x \rangle}{\sigma_0(\overline{\varphi}_0 - \overline{\varphi}_1)/a} = \frac{a}{\overline{\varphi}_0 - \overline{\varphi}_1} \frac{1}{1+B^2} \left(-\frac{1}{b} \int_0^b \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, z) dz + \frac{\alpha}{b} (\varphi(x, b) - \varphi(x, 0)) \right). \quad (7)$$

Магнетосопротивление $R(B) \stackrel{\text{def}}{=} 1/\rho(B)$. Зависимость $R(B)$ от магнитного поля называется *эффектом магнетосопротивления* [2] и является частным случаем гальваномагнитных эффектов.

В предположении, что магнитное поле слабое, т.е. $|\alpha| < 1$ и параметр $\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} b/a \ll 1$, мы в п. 2 в формуле (31) покажем, что

$$\rho(B) = 1 + k_1 \alpha + k_2(\varepsilon) \alpha^2 + O(\alpha^3 + \alpha e^{-\pi/\varepsilon}). \quad (8)$$

Полученная в работе аналитическая функция $\rho(B)$ может быть использована для восстановления потенциалов φ_γ .

Отметим, что в случае $\varphi_\gamma \equiv \overline{\varphi}_\gamma$, $\gamma = 0, 1$, справедливо выражение

$$\rho(B) = 1 - \frac{8\alpha^2}{\pi^3} \varepsilon \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^3} + O(\alpha^4 + \alpha^2 e^{-\pi/\varepsilon}). \quad (9)$$

Формула (8) была неизвестна, более того, в монографиях ошибочно обосновывалось [3, с. 15], что в металле с изотропным законом дисперсии электронов $\rho(B) = 1 + O(\alpha^4)$.

Для вычисления магнетопроводимости $\rho(B)$ мы в п. 2 сначала построим асимптотику задачи (5) по малому параметру $\varepsilon = b/a$, равномерную для значений α в промежутке $\{\alpha : |\alpha| \leq q < 1\}$. Затем вычислим величину $\rho(B)$ по асимптотике с точностью $O(\alpha^2 e^{-\pi/\varepsilon})$ и далее, используя малость значения α , получим формулы (8), (9).

Для вычисления асимптотики по параметру ε перейдем в (5) к безразмерным координатам $\xi = x/a$, $\eta = z/b$. В новых координатах на квадрате $\mathcal{D}' = \{\xi, \eta : 0 \leq \xi \leq 1, 0 \leq \eta \leq 1\}$ получим задачу

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} = 0 \quad \text{в } \mathcal{D}', \quad \varphi|_{\xi=0} = \varphi_0, \quad \varphi|_{\xi=1} = \varphi_1, \\ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} + \varepsilon \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right) \Big|_{\eta=0,1} = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

В случае $|\alpha| \leq q < 1$ асимптотику задачи (10) при $\varepsilon \rightarrow 0$ будем искать в виде суммы регулярной части φ_{reg} и двух погранслоевых функций $\Pi_0(\eta, \xi/\varepsilon)$, $\Pi_1(\eta, (1-\xi)/\varepsilon)$. Регулярная часть φ_{reg} имеет вид

$$\varphi_{\text{reg}} = \bar{\varphi}_0 + (\bar{\varphi}_1 - \bar{\varphi}_0)\xi + (C_1(\alpha, \varepsilon)\xi + C_0(\alpha, \varepsilon)) - ((\bar{\varphi}_1 - \bar{\varphi}_0) + C_1(\alpha, \varepsilon))\alpha\varepsilon\left(\eta - \frac{1}{2}\right) \quad (11)$$

и удовлетворяет задаче

$$\Delta \varphi_{\text{reg}} = 0, \quad \left(\frac{\partial \varphi_{\text{reg}}}{\partial \eta} + \varepsilon \alpha \frac{\partial \varphi_{\text{reg}}}{\partial \xi} \right) \Big|_{\eta=0,1} = 0$$

с некоторыми данными Дирихле при $\xi = 0$, $\xi = 1$. Дополнительный линейный член $(C_1\xi + C_0) - C_1\alpha\varepsilon(\eta - 1/2)$ в формуле (11) обеспечивает то, что погранслоевые функции удовлетворяют следующим условиям Дирихле на торцах $\xi = 0$, $\xi = 1$:

$$\begin{aligned} \Pi_0(\eta, 0) + C_0(\alpha, \varepsilon) - ((\bar{\varphi}_1 - \bar{\varphi}_0) + C_1(\alpha, \varepsilon))\varepsilon\alpha\left(\eta - \frac{1}{2}\right) - (\varphi_0 - \bar{\varphi}_0) &= 0, \\ \Pi_1(\eta, 0) + (C_0(\alpha, \varepsilon) + C_1(\alpha, \varepsilon)) - ((\bar{\varphi}_1 - \bar{\varphi}_0) + C_1(\alpha, \varepsilon))\varepsilon\alpha\left(\eta - \frac{1}{2}\right) - (\varphi_1 - \bar{\varphi}_1) &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Погранслоевые функции Π_0 , Π_1 являются точным решением следующей задачи в полуполосе $\{\xi, \eta : 0 \leq \eta \leq 1, 0 \leq \xi \leq +\infty\}$ и $\{\xi, \eta : 0 \leq \eta \leq 1, -\infty < \xi \leq 1\}$ соответственно:

$$\frac{\partial^2 \Pi_\gamma}{\partial \eta^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \Pi_\gamma}{\partial \xi^2} = 0, \quad \left(\frac{\partial \Pi_\gamma}{\partial \eta} + \varepsilon \alpha \frac{\partial \Pi_\gamma}{\partial \xi} \right) \Big|_{\eta=0,1} = 0, \quad (13)$$

удовлетворяют данным Дирихле (12) и экспоненциально затухают при $\xi \rightarrow +\infty$ (соответственно $\xi \rightarrow -\infty$).

Таким образом, функция

$$\varphi_{\text{as}} \stackrel{\text{def}}{=} \varphi_{\text{reg}} + \Pi_0\left(\eta, \frac{\xi}{\varepsilon}\right) + \Pi_1\left(\eta, \frac{1-\xi}{\varepsilon}\right) \quad (14)$$

в квадрате $\mathcal{D}'$ удовлетворяет задаче (10) с новыми данными Дирихле

$$\varphi_{\text{as}}|_{\xi=\gamma} = \varphi_{\gamma} + O(e^{-\pi/\varepsilon}), \quad \gamma = 0, 1. \quad (15)$$

В случае $\varphi_{\gamma} \equiv \overline{\varphi}_{\gamma}$ в формуле (15) погрешность равна $\alpha^2 \varepsilon O(e^{-\pi/\varepsilon})$. Погрешности (15) будут обоснованы ниже. В теореме 1, построив точное решение задачи (10), мы доказали, что функцию φ_{as} можно использовать для вычисления проводимости в магнитном поле с точностью, указанной в формулах (8), (9).

Вопрос о магнетопроводимости в конечном образце при постоянных $\varphi_{\gamma} \equiv \overline{\varphi}_{\gamma}$ ставился в работах [4]–[6]. Применяемая в работе [6] регулярная теория возмущений по малому полю в задаче (5) приводит к трудно обозримому результату [7]. Используя предложенный Кучеренко метод погранслоя, нам удалось получить новую, ранее неизвестную формулу (8), описывающую влияние непостоянных данных Дирихле и геометрии образца на магнетосопротивление. Отметим, что при $\varphi_{\gamma} \equiv \overline{\varphi}_{\gamma}$ формула (9) (правда с ошибочным коэффициентом при α^2) была получена в [5] методами теории функций комплексного переменного. Для непостоянных данных Дирихле φ_{γ} методами теории функций комплексного переменного получаются уже практически необозримые результаты.

2. Погранслоевые функции и формула для $\rho(B)$. Погранслоевые функции Π_0 , Π_1 будем искать в виде рядов

$$\begin{aligned} \Pi_0\left(\eta, \frac{\xi}{\varepsilon}\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n u_n^0(\eta, \alpha) e^{-\lambda_n \xi/\varepsilon}, \\ \Pi_1\left(\eta, \frac{1-\xi}{\varepsilon}\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n u_n^1(\eta, \alpha) e^{-\lambda_n(1-\xi)/\varepsilon}, \end{aligned} \quad \lambda_n > 0. \quad (16)$$

Из задачи (13) следует, что функции $u_n^{\gamma}(\eta, \alpha)$, $\gamma = 0, 1$, должны удовлетворять краевой задаче

$$\frac{d^2}{d\eta^2} u_n^{\gamma} + \lambda_n^2 u_n^{\gamma} = 0, \quad \left(\frac{du_n^{\gamma}}{d\eta} - (-1)^{\gamma} \alpha u_n^{\gamma} \right) \Big|_{\eta=0,1} = 0. \quad (17)$$

Очевидно, что $u_n^1(\eta, \alpha) = u_n^0(\eta, -\alpha)$.

Будем искать решение задачи (17) в виде $u_n^0 = C_+ e^{i\lambda_n \eta} + C_- e^{-i\lambda_n \eta}$. Подставляя это выражение в краевые условия, найдем, что $e^{2i\lambda_n} = 1$, т.е. $\lambda_n = \pi n$, $n \geq 1$, и соответственно

$$u_n^0(\eta, \alpha) = \sqrt{2}(\cos \pi n \eta + \alpha \sin \pi n \eta). \quad (18)$$

Определим коэффициенты A_n, B_n в (16) из краевых условий (12):

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sqrt{2}(\cos \pi n \eta + \alpha \sin \pi n \eta) &= -C_0 + ((\overline{\varphi}_1 - \overline{\varphi}_0) + C_1) \varepsilon \alpha \left(\eta - \frac{1}{2} \right) + (\varphi_0 - \overline{\varphi}_0), \\ \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sqrt{2}(\cos \pi n \eta - \alpha \sin \pi n \eta) &= -(C_0 + C_1) + ((\overline{\varphi}_1 - \overline{\varphi}_0) + C_1) \varepsilon \alpha \left(\eta - \frac{1}{2} \right) \\ &\quad + (\varphi_1 - \overline{\varphi}_1). \end{aligned} \quad (19)$$

Покажем, что при $|\alpha| \leq q < 1$ для некоторых функций $C_0(\alpha, \varepsilon), C_1(\alpha, \varepsilon)$ уравнения (19) относительно A_n, B_n разрешимы и коэффициенты A_n, B_n удовлетворяют оценкам

$$|A_n| \leq \frac{a_n}{n\pi}, \quad |B_n| \leq \frac{b_n}{n\pi}, \quad \text{где} \quad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2 < \infty. \quad (20)$$

Оценки (20) обеспечивают принадлежность погранслоевых функций Π_γ пространству $W_2^1(\mathcal{D}')$, т.е. для Π_γ ограничен интеграл энергии (см. доказательство теоремы 1):

$$\iint_{\mathcal{D}'} \left(\left| \frac{\partial \Pi_\gamma}{\partial \eta} \right|^2 + \left| \frac{\partial \Pi_\gamma}{\partial \xi} \right|^2 \right) d\eta d\xi < \infty.$$

Отметим, что при $|\alpha| > 1$ уравнения (19) разрешимы при любых C_0, C_1 , однако в общей ситуации функции имеют неограниченную энергию. Используя погранслоевые функции при $|\alpha| > 1$ для краевых условий $\varphi_0 = \varphi_1 = 1$, например, можно построить решение задачи (10), не принадлежащее $W_2^1(\mathcal{D}')$, в то время как задача (10) имеет очевидное решение $\varphi = 1 \in W_2^1(\mathcal{D}')$.

Отметим, что в области $|\alpha| > 1$ справедливо

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $|\alpha| > 2$. Тогда для $f \in W_2^1[0, 1]$ существует функция $d(1/\alpha) + k(1/\alpha)\eta$, где d, k аналитичны в области $\{\alpha : |\alpha| > 2\}$, $d(0) = f(0)$, $k(0) = f(1) - f(0)$, такая, что для функции $g(\eta, \alpha) \stackrel{\text{def}}{=} f(\eta) - (d(1/\alpha) + k(1/\alpha)\eta)$ справедливо разложение

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n \left(\frac{\cos \pi n \eta}{\alpha} + \sin \pi n \eta \right) = g(\eta, \alpha),$$

$$|M_n| \leq \frac{a_n(\alpha)}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \leq C \left(\frac{1}{\alpha} \right) \|f\|_{W_2^1}^2.$$

Для вычисления коэффициентов A_n, B_n разложения (19) при $|\alpha| \leq q < 1$ введем в гильбертовом пространстве ℓ_2 изометрический оператор D с матрицей $\|D_{nm}\|$, где

$$D_{nm} \stackrel{\text{def}}{=} 2 \int_0^1 \cos \pi m \eta \sin \pi n \eta d\eta.$$

Справедлива

ЛЕММА 1. Оператор D удовлетворяет соотношениям

$$D^* D = E, \quad D D^* = E - P, \quad \|D^*\| = \|D\| = 1,$$

где

$$P X = I(X, I), \quad I \in \ell_2, \quad I_{2k} = 0, \quad I_{2k+1} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi(2k+1)}, \quad k = 0, 1, \dots$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} |Y_n|^2 < +\infty$ и

$$f(\eta) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2} Y_n \cos \pi n \eta \in L_2[0, 1]. \quad (21)$$

Функции $1, \sqrt{2} \cos \pi n \eta$, $n = 1, 2, \dots$, и функции $\sqrt{2} \sin \pi m \eta$, $m = 1, 2, \dots$, образуют полные ортонормированные системы на $L_2[0, 1]$. Значит,

$$f(\eta) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2} X_n \sin \pi n \eta, \quad X_n = \sqrt{2} \int_0^1 f(\eta) \sin \pi n \eta \, d\eta$$

и, очевидно, справедливо равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} |X_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |Y_n|^2 = \int_0^1 |f(\eta)|^2 \, d\eta. \quad (22)$$

Из определения D_{nm} следует, что $X = DY$, а из (22) — $(X, X) = (DY, DY) = (Y, Y)$. Очевидно также, что $(DY^1, DY^2) = (Y^1, Y^2)$. Следовательно, D — изометрический оператор и $D^*D = E$.

Далее, поскольку функции вида (21) ортогональны 1, их разложение по $\sin \pi n \eta$, т.е. функция $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2} X_n \sin \pi n \eta$, $X \stackrel{\text{def}}{=} DY$, также ортогонально 1. Пусть $I \in \ell_2$ и его компоненты равны разложению 1 в ряд по $\sqrt{2} \sin \pi n \eta$ на отрезке $[0, 1]$. Очевидно,

$$\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2} X_n \sin \pi n \eta \, d\eta = 0$$

для $X = DY$, значит $(X, I) = 0$, т.е. $D\ell_2 \perp I$. С другой стороны, для любого $X \perp I$ соответствующая функция $g = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2} X_n \sin \pi n \eta$ ортогональна 1 на $[0, 1]$, значит разлагается по $\sqrt{2} \cos \pi n \eta$, $n = 1, 2, \dots$. Пусть $Y_g \in \ell_2$ — вектор из коэффициентов Фурье функции g по $\sqrt{2} \cos \pi n \eta$, $n = 1, 2, \dots$. Очевидно, $DY_g = X$. Значит, $R(D) \oplus \{I\} = \ell_2$, $D^*I = 0$ и ядро оператора D^* одномерно.

Далее, в силу изометричности D имеем $(DY, Z) = (Y, D^*Z) = (DY, DD^*Z)$. Отсюда следует, что $(E - P)Z = DD^*Z$. Оценки норм $\|D\|$, $\|DD^*\|$ следуют из изометричности операторов D и D^* на $R(D)$. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Вектор D^*X можно получить путем разложения функции

$$f(\eta) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n \sqrt{2} \sin \pi n \eta$$

по системе $\sqrt{2} \cos \pi m \eta$, $m = 1, 2, \dots$.

Используя оператор D , задачу о вычислении коэффициентов A_n разложения

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sqrt{2} (\cos \pi n \eta + \alpha \sin \pi n \eta) = f(\eta) \quad (23)$$

можно записать в операторной форме:

$$DA + \alpha A = F, \quad A, F \in \ell_2, \quad \text{где} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2} F_n \sin \pi n \eta = f(\eta). \quad (24)$$

ЛЕММА 2. 1) Оператор $D + \alpha E$ при $|\alpha| < 1$ имеет

- а) нулевое ядро;
- б) одномерное коядро;
- в) замкнутую область значений.

2) Вектор

$$A \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \alpha^m (D^*)^{m+1} F \quad (25)$$

удовлетворяет уравнению

$$DA + \alpha A = (E - P)F + \alpha PA. \quad (26)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим уравнение

$$A + \alpha D^* A = D^* F. \quad (27)$$

При $|\alpha| < 1$ в силу оценки $\|D^*\| = 1$ это уравнение разрешимо, и его решение определяется рядом (25). Далее подействуем на (27) обратным оператором D . Поскольку в силу леммы 1 $DD^* = E - P$, из (27) следует (26). Итак, уравнение (24) разрешимо для правых частей вида

$$F - PF + \alpha P(E + \alpha D^*)^{-1} D^* F, \quad F \in \ell_2. \quad (28)$$

Поскольку оператор P вполне непрерывен, из теорем Фредгольма следует замкнутость линейного множества функций вида (28) при $|\alpha| < 1$. Нетрудно показать, что ортогональное дополнение к множеству (28) одномерно и является нуль-вектором оператора $D^* + \alpha E$, $|\alpha| < 1$.

Очевидно, что если уравнение $(D + \alpha E)Z = 0$ имеет нетривиальное решение, то оно является нетривиальным решением уравнения $Z + \alpha D^* Z = 0$, что при $|\alpha| < 1$ невозможно. Значит, уравнение (24) не имеет ядра. Лемма доказана.

Применим лемму 2 к вычислению коэффициентов A_n, B_n в разложении (19). Обозначим через F^s вектор из коэффициентов Фурье функции $\eta - 1/2$ по системе $\sqrt{2} \sin \pi n \eta$, $n = 1, 2, \dots$, и соответственно через F^γ , $\gamma = 0, 1$, вектор из коэффициентов Фурье функции $\varphi_\gamma - \bar{\varphi}_\gamma$ по этой же системе. Далее обозначим через $A^s(\alpha), A^\gamma(\alpha)$ векторы, полученные по формуле (25) для правых частей F^s, F^γ . Поскольку функции $\eta - 1/2, \varphi_\gamma - \bar{\varphi}_\gamma$ ортогональны 1 на $[0, 1]$, из соотношения (26) вытекает, что уравнения (19) относительно A, B разрешимы при условии, что

$$\begin{aligned} -C_0 &= (\bar{\varphi}_1 - \bar{\varphi}_0 + C_1) \varepsilon \alpha^2 (A^s(\alpha), I) + \alpha (A^0(\alpha), I), \\ -(C_0 + C_1) &= -(\bar{\varphi}_1 - \bar{\varphi}_0 + C_1) \varepsilon \alpha^2 (A^s(-\alpha), I) - \alpha (A^1(-\alpha), I). \end{aligned} \quad (29)$$

Из (29) для C_1 получим выражение

$$C_1 = \frac{(\bar{\varphi}_1 - \bar{\varphi}_0) \varepsilon \alpha^2 ((A^s(\alpha), I) + \alpha (A^s(-\alpha), I)) + \alpha (A^0(\alpha), I) + \alpha (A^1(-\alpha), I)}{1 - \varepsilon \alpha^2 ((A^s(\alpha), I) + (A^s(-\alpha), I))}. \quad (30)$$

Выражение для C_1 , очевидно, имеет смысл при достаточно малом значении $\varepsilon\alpha^2$. Выражение для C_2 несущественно, и мы его не приводим. Введем коэффициенты k_1, k_2 :

$$\begin{aligned} k_1 &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{(D^*F^0, I) + (D^*F^1, I)}{\bar{\varphi}_1 - \bar{\varphi}_0}, \\ k_2(\varepsilon) &\stackrel{\text{def}}{=} -\varepsilon \frac{8}{\pi^3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^3} + \frac{((D^*)^2F^0, I) - ((D^*)^2F^1, I)}{\bar{\varphi}_1 - \bar{\varphi}_0}. \end{aligned} \quad (31)$$

ТЕОРЕМА 1. 1) Пусть $\varphi_0, \varphi_1 \in W_2^1[0, b]$. Тогда при $|\alpha| \leq q < 1$ и достаточно малом значении ε ($\varepsilon \leq \varepsilon_0(q)$) справедлива формула

$$\rho(B) = 1 + \frac{C_1(\alpha, \varepsilon)}{\bar{\varphi}_1 - \bar{\varphi}_0} + O(\alpha e^{-\pi/\varepsilon}).$$

2) При малых значениях α справедлива формула

$$\rho(B) = 1 + k_1\alpha + k_2\alpha^2 + O(\alpha^3 + \alpha e^{-\pi/\varepsilon}), \quad (32)$$

которая при $\varphi_\gamma \equiv \bar{\varphi}_\gamma$, $\gamma = 0, 1$, переходит в формулу (9).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. I. Построение точного решения задачи (10). Предполагая, что истинные значения данных Дирихле в задаче (10) равны

$$\varphi|_{\xi=0} = f_0, \quad \varphi|_{\xi=1} = f_1, \quad (33)$$

мы выведем операторное уравнение для функций φ_0, φ_1 , при которых введенная в формуле (14) функция φ_{as} будет точным решением задачи (10) с данными Дирихле (33). С этой целью введем оператор $U(\alpha)$, с помощью которого значения погранслоевых функций $P_0(\eta, 1/\varepsilon), P_1(\eta, 1/\varepsilon)$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} P_0\left(\eta, \frac{1}{\varepsilon}\right) &= e^{-\pi/\varepsilon} U(\alpha) \left((\varphi_0 - \bar{\varphi}_0) + \varepsilon\alpha(\bar{\varphi}_1 - \bar{\varphi}_0 + C_1) \left(\eta - \frac{1}{2} \right) \right), \\ P_1\left(\eta, \frac{1}{\varepsilon}\right) &= e^{-\pi/\varepsilon} U(-\alpha) \left((\varphi_1 - \bar{\varphi}_1) + \varepsilon\alpha(\bar{\varphi}_1 - \bar{\varphi}_0 + C_1) \left(\eta - \frac{1}{2} \right) \right). \end{aligned}$$

Ниже в части III мы докажем, что при $|\alpha| \leq q < 1, 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0(q)$ оператор $U(\alpha)$ является ограниченным в $W_2^1[0, 1]$ с равномерно ограниченной нормой по параметрам α, ε .

Далее пусть P_1 – проектор в $L_2[0, 1]$ на 1:

$$P_1 f = \int_0^1 (\eta) d\eta.$$

Используя операторы $U(\alpha), P_1$, значения функции $\varphi_{\text{as}}|_{\xi=\gamma}$, $\gamma = 0, 1$, можно представить в виде

$$\begin{aligned} \varphi_{\text{as}}|_{\xi=\gamma} &= \left\{ (\varphi_\gamma - \bar{\varphi}_\gamma) + e^{-\pi/\varepsilon} (E - P_1) U((-1)^\gamma \alpha) \left((\varphi_{1-\gamma} - \bar{\varphi}_{1-\gamma}) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \varepsilon\alpha(\bar{\varphi}_1 - \bar{\varphi}_0 + C_1) \left(\eta - \frac{1}{2} \right) \right) \right\} \\ &\quad + \left\{ (-1)^\gamma \alpha \left(T((-1)^\gamma \alpha) \left((\varphi_\gamma - \bar{\varphi}_\gamma) + \varepsilon\alpha(\bar{\varphi}_1 - \bar{\varphi}_0 + C_1) \left(\eta - \frac{1}{2} \right) \right), I \right) \right. \\ &\quad \left. + e^{-\pi/\varepsilon} P_1 U((-1)^\gamma \alpha) \left((\varphi_{1-\gamma} - \bar{\varphi}_{1-\gamma}) + \varepsilon\alpha(\bar{\varphi}_1 - \bar{\varphi}_0 + C_1) \left(\eta - \frac{1}{2} \right) \right) \right. \\ &\quad \left. - (C_0(\alpha, \varepsilon) + \gamma C_1(\alpha, \varepsilon)) \right\} + \bar{\varphi}_\gamma. \end{aligned} \quad (34)$$

Здесь через $T(\alpha)g$ обозначен следующий вектор из ℓ_2 :

$$T(\alpha)g \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \alpha^m (D^*)^{m+1} F_g,$$

где F_g – вектор из коэффициентов Фурье функции g по системе $\sqrt{2} \sin \pi n \eta$, $n = 1, 2, \dots$.

Приравняв 0 константы во вторых фигурных скобках в формуле (34), мы получим новые уравнения для $C_0(\alpha, \varepsilon)$, $C_1(\alpha, \varepsilon)$, которые отличаются от уравнений (29) на величину порядка $\alpha e^{-\pi/\varepsilon}$ за счет оператора $U(\alpha)$. Очевидно, $C_0(\alpha, \varepsilon)$, $C_1(\alpha, \varepsilon)$ можно представить в виде

$$C_\gamma(\alpha, \varepsilon) = (M_\gamma, \varphi_1) + (L_\gamma, \varphi_0) + N_\gamma, \quad (35)$$

где $M_\gamma(\alpha, \varepsilon)$, $L_\gamma(\alpha, \varepsilon)$ – равномерно по параметрам α, ε в области $|\alpha| \leq q < 1$, $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0(q)$ ограниченные функции в пространстве $L_2[0, 1]$, а N_γ – равномерно ограниченные константы. Обозначим через $C_\gamma^{\text{as}}(\alpha, \varepsilon)$ решения уравнений (29). Тогда в силу сказанного выше

$$|C_\gamma^{\text{as}}(\alpha, \varepsilon) - C_\gamma(\alpha, \varepsilon)| \leq \text{const } \alpha e^{-\pi/\varepsilon}, \quad |\alpha| \leq q < 1, \quad 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0(q). \quad (36)$$

Далее определим $\overline{\varphi}_\gamma$ равенствами

$$\overline{\varphi}_\gamma = \overline{f}_\gamma. \quad (37)$$

Выражения в первых фигурных скобках в формуле (34) находятся в подпространствах ортогональных 1 в $L_2[0, 1]$ (а значит, и в $W_2^1[0, 1]$). Приравняем функции в первых фигурных скобках в выражении (34) соответственно $f_\gamma - \overline{f}_\gamma$, $\gamma = 0, 1$. В итоге с учетом выражений (35), (36) получим систему уравнений

$$\begin{aligned} & (\varphi_\gamma - \overline{\varphi}_\gamma) + e^{-\pi/\varepsilon} (E - P_1) U((-1)^\gamma \alpha) \left((\varphi_{1-\gamma} - \overline{\varphi}_{1-\gamma}) \right. \\ & \quad \left. + \varepsilon \alpha ((M_1, \varphi_1 - \overline{\varphi}_1) + (L_1, \varphi_0 - \overline{\varphi}_0)) \left(\eta - \frac{1}{2} \right) \right) \\ & = (f_\gamma - \overline{f}_\gamma) - e^{-\pi/\varepsilon} \left((E - P_1) U((-1)^\gamma \alpha) (\varepsilon \alpha \overline{f}_1 - \overline{f}_0 \right. \\ & \quad \left. + N_1 + (M_1, \overline{f}_1) + (L_1, \overline{f}_0)) \left(\eta - \frac{1}{2} \right) \right), \quad \gamma = 0, 1. \end{aligned} \quad (38)$$

Оператор $U(\alpha)$ ограничен в W_2^1 , значит $(E - P_1)U(\alpha)$ – ограниченный оператор из подпространства $\widetilde{W}_2^1 \subset W_2^1$, ортогонального 1, в это же подпространство. За счет малого члена $e^{-\pi/\varepsilon}$, очевидно, система (38) разрешима в $\widetilde{W}_2^1$ и

$$\varphi_\gamma - \overline{\varphi}_\gamma = f_\gamma - \overline{f}_\gamma + O(\alpha e^{-\pi/\varepsilon}), \quad \|O(\alpha e^{-\pi/\varepsilon})\|_{W_2^1} \leq C \alpha e^{-\pi/\varepsilon}. \quad (39)$$

Итак, формулы (39), (37) определяют функции φ_γ , $\gamma = 0, 1$, при которых функция (14) будет удовлетворять задаче (10) с данными Дирихле (33).

II. *Вычисление магнетопроводимости $\rho(B)$.* Пусть функции φ_γ удовлетворяют уравнению (38). Тогда функция (14) есть точное решение задачи (10) с данными Дирихле (33). Коэффициенты C_0, C_1 функции φ_{reg} определяются формулой (35) и с точностью $O(\alpha e^{-\pi/\varepsilon})$ совпадают с коэффициентами C_0, C_1 , определяемыми формулами (29), (30). Перейдем в формуле (14) к размерным переменным x, z с помощью формул $\xi = x/a$,

$\eta = z/b$. Из выражений (16), (18) следует, что средний ток (6) на погранслоевых решениях Π_0, Π_1 равен 0:

$$-\frac{1}{b} \int_0^b \frac{\partial \Pi_\gamma}{\partial x} \left(\frac{x}{a}, \frac{z}{b} \right) dz + \frac{a}{b} \alpha \left(\Pi_\gamma \left(\frac{x}{a}, 1 \right) - \Pi_\gamma \left(\frac{x}{a}, 0 \right) \right) = 0, \quad 0 < x < a. \quad (40)$$

Из равенства (40) следует, что электропроводность определяется функцией φ_{reg} . Подставляя выражение (11) для φ_{reg} в формулу (7) и учитывая равенство (40), получим

$$\rho(B) = 1 + \frac{C_1(\alpha, \varepsilon)}{\bar{f}_1 - \bar{f}_0}.$$

Далее, используя оценку (36), заменим функцию $C_1(\alpha, \varepsilon)$ функцией $C_1^{\text{as}}(\alpha, \varepsilon)$, вычисленной по формуле (30). В результате несложных вычислений получим формулы (32), (9).

III. Оценка нормы оператора $U(\alpha)$. Ключевым моментом являются оценки (20). Для их доказательства рассмотрим коэффициенты Фурье $\tilde{A}_n$ функции $g_0(\eta) \in W_2^1[0, 1]$ по ортогональной системе $\sqrt{2} \cos \pi n \eta$. Очевидно,

$$\tilde{A}_n = \sqrt{2} \int_0^1 g_0(\eta) \cos \pi n \eta d\eta = -\sqrt{2} \int_0^1 g'_0(\eta) \frac{\sin \pi n}{\pi n} d\eta = -\frac{a_n(g'_0)}{\pi n},$$

где $a_n(g'_0)$ – коэффициенты Фурье производной g'_0 по ортогональной системе $\sqrt{2} \sin \pi n \eta$, $n = 1, 2, \dots$. Следовательно,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n(g'_0)|^2 = \int_0^1 |g'_0(\eta)|^2 d\eta. \quad (41)$$

Вектор из коэффициентов Фурье функции $g_0(\eta)$ по системе $\sqrt{2} \sin \pi n \eta$ обозначим через F^0 и введем рассмотрение функции

$$g_k(\eta) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2} (D^*)^k F_n^0 \sin \pi n \eta.$$

Предположим, что $g_k \in W_2^1[0, 1]$, $k = 0, 1, \dots$. Пусть

$$a_n(g'_k) \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{2} \int_0^1 g'_k \sin \pi n \eta d\eta.$$

Используя приведенные выше выкладки, получим

$$((D^*)^{k+1} F^0)_n = -\frac{a_n(g'_k)}{\pi n}. \quad (42)$$

Следовательно, в силу (42) имеем

$$g'_{k+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2} \pi n ((D^*)^{k+1} F^0)_n \cos \pi n \eta = - \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2} a_n(g'_k) \cos \pi n \eta. \quad (43)$$

Далее, используя ортонормированность функций $\sqrt{2} \cos \pi n \eta$ и формулу (41), найдем

$$\int_0^1 |g'_{k+1}(\eta)|^2 d\eta = \int_0^1 |g'_k(\eta)|^2 d\eta, \quad k = 0, 1, \dots \quad (44)$$

Поскольку $g_0 \in W_2^1$, то, используя равенства (43), (44), по индукции получим, что $g_k \in W_2^1$, $k = 0, 1, \dots$. Равенства (44) можно переписать в эквивалентной форме:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n(g'_k)|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n(g'_0)|^2, \quad k = 0, 1, \dots \quad (45)$$

Теперь воспользуемся формулой (25) для вектора $A = \{\dots A_n(\alpha) \dots\}$ из коэффициентов разложения (23) с точностью до $\alpha P A$ (см. (26)). В интересующем нас случае $g_0 = f = (\overline{\varphi}_1 - \overline{\varphi}_0 + C_1)\varepsilon\alpha(\eta - 1/2) + (\varphi_0 - \overline{\varphi}_0)$. Функции $\varphi_0 - \overline{\varphi}_0$ определяются из системы (38) и принадлежат W_2^1 ; $\overline{\varphi}_\gamma \stackrel{\text{def}}{=} \overline{f}_\gamma$.

Из (25) и соотношений (42) получим

$$A_n(\alpha) = \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{m+1} \alpha^m a_n(g_m) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{a_n(\alpha)}{\pi n}. \quad (46)$$

Теперь, используя равенство (45), оценим сумму $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n(\alpha)|^2$ при $|\alpha| \leq q < 1$. Очевидно,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n(\alpha)|^2 &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m,k=0}^{\infty} |\alpha|^{m+k} |a_n(g_m)| \cdot |a_n(g_k)| \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_{m,k=0}^{\infty} |\alpha|^{m+k} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n(g_m)|^2 + \frac{1}{2} \sum_{m,k=0}^{\infty} |\alpha|^{m+k} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n(g_k)|^2 \\ &\leq (1-q)^{-2} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n(g_0)|^2 \int_0^1 |g'_0|^2 d\eta. \end{aligned} \quad (47)$$

Из оценки (47) и формулы (46) следуют оценки (20).

Энергия погранслоевых функций конечна. Проведем рассуждения для функции Π_0 (для Π_1 аналогично). Положим

$$\Pi_0^c \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2} \frac{a_n(\alpha)}{n} \cos \pi n \eta e^{-\pi n \xi / \varepsilon}, \quad \Pi_0^s \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha \sqrt{2} \frac{a_n(\alpha)}{n} \sin \pi n \eta e^{-\pi n \xi / \varepsilon}.$$

Очевидно, $\Pi_0 = \Pi_0^c + \Pi_0^s$. Поэтому, доказав включение $\Pi_0^c, \Pi_0^s \in W_2^1(\mathcal{D}')$, автоматически получим, что $\Pi_0 \in W_2^1(\mathcal{D}')$. Нетрудно убедиться, что

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{D}'} \left(\left| \frac{\partial \Pi_0^\mu}{\partial \eta} \right|^2 + \varepsilon^2 \left| \frac{\partial \Pi_0^\mu}{\partial \xi} \right|^2 \right) d\eta d\xi &\leq \varepsilon(\alpha^2 + 1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n(\alpha)|^2}{n} \\ &\leq \varepsilon \frac{q^2 + 1}{(1-q)^2} \int_0^1 |g'_0|^2 d\eta, \quad \mu = s, c. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\iint_{\mathcal{D}'} \left(\left| \frac{\partial \Pi_0}{\partial \eta} \right|^2 + \varepsilon^2 \left| \frac{\partial \Pi_0}{\partial \xi} \right|^2 \right) d\eta d\xi \leq \varepsilon^2 \frac{4(1+q^2)}{(1-q)^2} \int_0^1 |g'_0|^2 d\eta.$$

Приступим непосредственно к оценке нормы оператора $U(\alpha)$. Из определения оператора $U(\alpha)$ следует, что

$$U(\alpha)g \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} A_n(\alpha)(\cos \pi n \eta + \alpha \sin \pi n \eta) e^{-\pi n/\varepsilon}, \quad (48)$$

где вектор из коэффициентов $\{\dots A_n(\alpha) \dots\}^T$ определяется формулой (25), в которой вектор F состоит из коэффициентов Фурье функции g по системе $\sqrt{2} \sin \pi n \eta$, $n = 1, 2, \dots$. Для функции $g \in W_2^1[0, 1]$ в силу формулы (46) и оценки (47) имеем $A_n(\alpha) = a_n(\alpha)/(n\pi)$, где

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n(\alpha)|^2 \leq (1-q)^{-2} \int_0^1 |g'(\eta)|^2 d\eta, \quad |\alpha| \leq q < 1. \quad (49)$$

Очевидно, из (48), (49) следует оценка

$$\begin{aligned} \|U(\alpha)g\|_{W_2^1}^2 &\leq 2(1+q^2) \sum_{n=1}^{\infty} |A_n(\alpha)|^2 e^{-2\pi n/\varepsilon} (1+\pi^2 n^2) \leq 4(1+q^2) e^{-2\pi/\varepsilon} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n(\alpha)|^2 \\ &\leq e^{-2\pi/\varepsilon} \frac{4(1+q^2)}{(1-q)^2} \int_0^1 |g'(\eta)|^2 d\eta, \end{aligned}$$

обеспечивающая следующую оценку для оператора $U(\alpha)$, действующего в $W_2^1[0, 1]$:

$$\|U(\alpha)\| \leq e^{-\pi/\varepsilon} \left(\frac{4(1+q^2)}{(1-q)^2} \right)^{1/2}. \quad (50)$$

Оценка (50) завершает исследование оператора $U(\alpha)$.

IV. *Единственность решения.* Рассмотрим класс функций φ в $\mathcal{D}$, удовлетворяющих следующим условиям:

- а) $\varphi \in W_2^1(\mathcal{D})$;
- б) $\varphi \in C^2(\text{int } \mathcal{D})$;
- в) φ непрерывна на $\partial\mathcal{D}$;
- г) обобщенные производные $\partial\varphi/\partial x$, $\partial\varphi/\partial y$ на $\partial\mathcal{D}$ принадлежат $L_2(\partial\mathcal{D})$.

В силу оценки (20) построенное в части I доказательства решение удовлетворяет условиям а)–г). Для задачи

$$\Delta u = g \quad \text{в } \mathcal{D}, \quad u|_{x=0, a} = 0, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \alpha \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Big|_{z=0, b} = f_0, b \in L_2 \quad (51)$$

в предположении, что решение удовлетворяет условиям а)–г), домножением уравнения (51) на u и последующим интегрированием по частям нетрудно получить оценку

$$\|u\|_{W_2^1} \leq \text{const} \left(\|g\|_{W_2^{-1}} + \|f_0\|_{W_2^{-1/2}} + \|f_b\|_{W_2^{-1/2}} \right). \quad (52)$$

Оценка (52) обеспечивает единственность решения нашей задачи в классе функций, удовлетворяющих условиям а)–г).

Используя результаты работ [8], [9] и оценку (52), можно доказать однозначную разрешимость задачи (5) для всех значений $\alpha \in \mathbb{R}^1$ в классе функций, удовлетворяющих условиям а)–г). Разрешимость задачи (5) можно также доказать и методами теории функций комплексного переменного [10, с. 293]. Отметим, что при $|\alpha| < 1$, $g \equiv 0$ разрешимость задачи (51) установлена в части I доказательства теоремы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Гантмахер В. Ф., Левин И. Б. Рассеяние носителей тока в металлах и полупроводниках. М.: Наука, 1984.
- [2] Beer A. G. Galvanomagnetic Effects in Semiconductors. New York–London: Acad. Press, 1963.
- [3] Ансельм А. И. Введение в теорию полупроводников. М.: Наука, 1978.
- [4] Wick R. F. Solution of the field problem of the germanium gyrator // J. Appl. Phys. 1954. V. 25. № 6. P. 741–756.
- [5] Lippmann H. J., Kuhrt F. Der Geometrieinfluss auf den transversalen magnetischen Widerstandseffekt bei recht – eckförmigen Halbleiterplatten // Z. Naturforsch. 1958. V. 13A. P. 462–474.
- [6] Akhiezer I. T., Gurevich Yu. G., Zakirov N. Geometry of a sample and galvanomagnetic effects in semiconductors // Semiconductors. 1993. V. 27. P. 349–352.
- [7] Gonzalez de la Cruz G., Gurevich Yu. G., Prosentsov V. V. New mechanism of magnetoresistance in bulk semiconductors: boundary condition effects // Solid State Comm. 1996. V. 97. P. 1069–1072.
- [8] Егоров Ю. В., Кондратьев В. А. О задаче с косою производной // Матем. сб. 1969. Т. 78. С. 148–176.
- [9] Кондратьев В. А. Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками // Тр. ММО. 1967. Т. 16. С. 209–292.
- [10] Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1987.