Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. К. Абдикалыков, Х. Д. Икрамов, В. Н. Чугунов, Об одном отношении двойственности для унитарных автоморфизмов в пространствах теплицевых и ганкелевых матриц, *Матем. заметки*, 2016, том 99, выпуск 1, 3–10

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10780>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 18:13:58

Об одном отношении двойственности для унитарных автоморфизмов в пространствах теплицевых и ганкелевых матриц

А. К. Абдикалыков, Х. Д. Икрамов, В. Н. Чугунов

Отношением двойственности мы называем тождество между группами унитарных автоморфизмов, действующих в пространстве теплицевых или ганкелевых матриц посредством подобия или конгруэнции. Дано простое объяснение причины появления таких тождеств.

Библиография: 6 названий.

DOI: 10.4213/mzm10780

1. Пусть M_n – линейное пространство комплексных $n \times n$ матриц. Обозначим через $\mathcal{T}_n$ и $\mathcal{H}_n$ подпространства в M_n , составленные соответственно из всех теплицевых и всех ганкелевых матриц. Обозначим через $\text{UAut}(\mathcal{T}_n)$ множество унитарных $n \times n$ матриц W , обладающих следующим свойством:

$$\forall T \in \mathcal{T}_n \rightarrow W^*TW \in \mathcal{T}_n.$$

Такие матрицы W можно отождествить с унитарными автоморфизмами пространства $\mathcal{T}_n$, действующими посредством подобия.

Символ $\text{UAut}(\mathcal{H}_n)$ определяется аналогичным образом и относится к автоморфизмам пространства $\mathcal{H}_n$.

Описания групп $\text{UAut}(\mathcal{T}_n)$ и $\text{UAut}(\mathcal{H}_n)$ получены соответственно в [1] и [2]. Они даются следующими двумя предложениями.

ТЕОРЕМА 1. *Всякая матрица $W \in \text{UAut}(\mathcal{T}_n)$ имеет одну из двух возможных форм:*

- (а) $W = \sigma \text{diag}(1, \varepsilon, \varepsilon^2, \dots, \varepsilon^{n-1})$, где оба числа σ и ε по модулю равны единице;
- (б) $W = \sigma \mathcal{P}_n \text{diag}(1, \varepsilon, \varepsilon^2, \dots, \varepsilon^{n-1})$; здесь $|\sigma| = |\varepsilon| = 1$, а $\mathcal{P}_n$ – так называемая перестановочная матрица:

$$\mathcal{P}_n = \begin{pmatrix} & & & & 1 \\ & & & 1 & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ 1 & & & & \end{pmatrix}.$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть $n > 2$. Тогда множество $\text{UAut}(\mathcal{H}_n)$ есть группа, изоморфная прямому произведению унитарной группы $\mathbf{U}_1$ и дискретной группы, образующими элементами которой являются диагональная матрица

$$D_n = \text{diag}(1, -1, 1, -1, \dots, (-1)^{n-1})$$

и перзединичная матрица $\mathcal{P}_n$.

Заметим, что при нечетном n матрицы D_n и $\mathcal{P}_n$ коммутируют и дискретная группа в формулировке теоремы 2 превращается в четверную группу Клейна.

Вместо унитарных автоморфизмов, действующих подобиями, можно рассмотреть действия унитарными конгруэнциями. Символом $\text{UAut}_c(\mathcal{T}_n)$ будем обозначать множество унитарных $n \times n$ матриц U таких, что

$$\forall T \in \mathcal{T}_n \rightarrow U^t T U \in \mathcal{T}_n.$$

Символ $\text{UAut}_c(\mathcal{H}_n)$ определяется аналогичным образом.

Описания групп $\text{UAut}_c(\mathcal{T}_n)$ и $\text{UAut}_c(\mathcal{H}_n)$ также имеются (см. [3], [4]).

ТЕОРЕМА 3. Пусть $n > 2$. Тогда всякая матрица $U \in \text{UAut}_c(\mathcal{H}_n)$ имеет одну из следующих двух форм:

- (а) $U = \sigma \text{diag}(1, \varepsilon, \varepsilon^2, \dots, \varepsilon^{n-1})$, где оба числа σ и ε по модулю равны единице;
- (б) $U = \sigma \mathcal{P}_n \text{diag}(1, \varepsilon, \varepsilon^2, \dots, \varepsilon^{n-1})$, где $|\sigma| = |\varepsilon| = 1$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $n > 2$. Тогда множество $\text{UAut}_c(\mathcal{T}_n)$ есть группа, изоморфная прямому произведению унитарной группы $\mathbf{U}_1$ и дискретной группы, образующими элементами которой являются диагональная матрица D_n и перзединичная матрица $\mathcal{P}_n$.

Под двойственностью, упоминаемой в названии настоящей заметки, мы понимаем соотношения тождественности

$$\text{UAut}(\mathcal{T}_n) = \text{UAut}_c(\mathcal{H}_n), \quad (1)$$

$$\text{UAut}(\mathcal{H}_n) = \text{UAut}_c(\mathcal{T}_n) \quad (2)$$

для введенных выше групп. Всюду ниже предполагается, что порядок n рассматриваемых матриц больше двух.

Возникает вопрос: нельзя ли было предвидеть равенства (1) и (2), что сделало бы излишними описания, приведенные в [3] и [4]. Ниже, в разделах 2–6, мы даем простое объяснение этих равенств.

2. Нам понадобится следующее вспомогательное утверждение.

ЛЕММА 1. Для любой матрицы $W \in \text{UAut}(\mathcal{T}_n)$ произведение

$$\mathcal{P}_n W^t \mathcal{P}_n W \quad (3)$$

есть скалярная матрица.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проверим утверждение леммы для образующих элементов группы $\text{UAut}(\mathcal{T}_n)$. Если $W = \mathcal{P}_n$, то произведение (3) есть, очевидно, единичная

матрица I_n . Пусть теперь D – невырожденная диагональная матрица с элементами, образующими геометрическую прогрессию, т.е.

$$D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n), \quad d_i = \alpha^{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Тогда

$$\{\mathcal{P}_n D \mathcal{P}_n D\}_{jj} = d_{n+1-j} d_j = \alpha^{n-j} \alpha^{j-1} = \alpha^{n-1}.$$

Таким образом,

$$\mathcal{P}_n D^t \mathcal{P}_n D = \alpha^{n-1} I_n.$$

Предположим, что матрицы W_1 и W_2 таковы, что

$$\mathcal{P}_n W_1^t \mathcal{P}_n W_1 = a I_n, \quad \mathcal{P}_n W_2^t \mathcal{P}_n W_2 = b I_n.$$

Положим $W = W_1 W_2$. Имеем

$$\mathcal{P}_n W^t \mathcal{P}_n W = \mathcal{P}_n W_2^t W_1^t \mathcal{P}_n W_1 W_2 = \mathcal{P}_n W_2^t \mathcal{P}_n (\mathcal{P}_n W_1^t \mathcal{P}_n W_1) W_2 = a \mathcal{P}_n W_2^t \mathcal{P}_n W_2 = ab I_n.$$

Эта выкладка доказывает лемму.

3. Если T – произвольная теплицева матрица, то

$$H = T \mathcal{P}_n$$

является ганкелевой матрицей, и всякая ганкелева матрица H может быть представлена в таком виде, где $T = H \mathcal{P}_n$.

Предположим, что $W \in \text{UAut}(\mathcal{T}_n)$, т.е. для любой теплицевой матрицы A матрица

$$B = W^* A W \tag{4}$$

также теплицева. Определим ганкелевы матрицы $A_1 = A \mathcal{P}_n$ и $B_1 = B \mathcal{P}_n$. Тогда равенство (4) можно переписать в виде

$$W^* A_1 \mathcal{P}_n W = B_1 \mathcal{P}_n.$$

Беря от обеих частей комплексное сопряжение, получаем

$$W^t \overline{A_1} \mathcal{P}_n \overline{W} = \overline{B_1} \mathcal{P}_n,$$

или

$$W^t \overline{A_1} W W^* \mathcal{P}_n \overline{W} = \overline{B_1} \mathcal{P}_n, \tag{5}$$

или

$$W^t \overline{A_1} W = \overline{B_1} \mathcal{P}_n W^t \mathcal{P}_n W. \tag{6}$$

Согласно лемме 1 произведение $\mathcal{P}_n W^t \mathcal{P}_n W$ в правой части есть скалярная матрица. Если заставить A пробегать все пространство $\mathcal{T}_n$, то матрица $\overline{A_1}$ опишет все пространство $\mathcal{H}_n$. Теперь соотношение (6) интерпретируется таким образом: всякая унитарная матрица W , отображающая $\mathcal{T}_n$ в себя подобием, отображает $\mathcal{H}_n$ в себя конгруэнцией. Иначе говоря, доказано включение

$$\text{UAut}(\mathcal{T}_n) \subset \text{UAut}_c(\mathcal{H}_n). \tag{7}$$

Сравнение теорем 1 и 2 показывает, что $\text{UAut}(\mathcal{H}_n)$ является подгруппой группы $\text{UAut}(\mathcal{T}_n)$. Поэтому лемма 1 применима ко всем матрицам $W \in \text{UAut}(\mathcal{H}_n)$. Можно повторить проведенные выше рассуждения, считая теперь A и B ганкелевыми матрицами. В результате будет снова получено равенство (6), где на этот раз $\bar{A}_1$ и $\bar{B}_1$ – теплицевы матрицы. Смысл этого равенства (6) таков: всякая унитарная матрица W , отображающая $\mathcal{H}_n$ в себя подобием, отображает $\mathcal{T}_n$ в себя конгруэнцией. Иначе говоря,

$$\text{UAut}(\mathcal{H}_n) \subset \text{UAut}_c(\mathcal{T}_n). \quad (8)$$

4. Для доказательства равенств (1) и (2) нам остается показать справедливость включений

$$\text{UAut}_c(\mathcal{H}_n) \subset \text{UAut}(\mathcal{T}_n), \quad (9)$$

$$\text{UAut}_c(\mathcal{T}_n) \subset \text{UAut}(\mathcal{H}_n). \quad (10)$$

Наше обоснование этих включений использует несколько вспомогательных утверждений. Первые три из них суть простые следствия определения групп $\text{UAut}_c(\mathcal{H}_n)$ и $\text{UAut}_c(\mathcal{T}_n)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. При любом n матрица $\mathcal{D}_n$ и перестановочная матрица $\mathcal{P}_n$ принадлежат группам $\text{UAut}_c(\mathcal{H}_n)$ и $\text{UAut}_c(\mathcal{T}_n)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Для любого числа α с модулем единица и произвольной матрицы $W \in \text{UAut}_c(\mathcal{H}_n)$ матрица αW также принадлежит $\text{UAut}_c(\mathcal{H}_n)$. Аналогичное утверждение верно для группы $\text{UAut}_c(\mathcal{T}_n)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Если $W \in \text{UAut}_c(\mathcal{H}_n)$, то W^* , W^t , $\bar{W}$, $\mathcal{D}_n W$, $W \mathcal{D}_n$, $\mathcal{P}_n W$ и $W \mathcal{P}_n$ также принадлежат $\text{UAut}_c(\mathcal{H}_n)$. Аналогичное утверждение верно для группы $\text{UAut}_c(\mathcal{T}_n)$.

Следующее (отнюдь не очевидное) утверждение есть результат, полученный в работах [5], [6].

ТЕОРЕМА 5. Пусть T – невырожденная теплицева матрица порядка n . Обозначим через a и b векторы-столбцы размерности $n - 1$, составленные следующим образом: a состоит из поддиагональных элементов первого столбца матрицы T в их естественном порядке, а b – из внедиагональных элементов ее первой строки в обратном порядке. Матрица T^{-1} будет теплицевой тогда и только тогда, когда векторы a и b пропорциональны.

Таким образом, T и T^{-1} могут одновременно быть теплицевыми матрицами только в двух случаях:

- (i) T и T^{-1} – (нижне- или верхне-)треугольные матрицы с ненулевой диагональю;
- (ii) T и T^{-1} – невырожденные ϕ -циркулянты для одного и того же числа ϕ .

Последнее вспомогательное утверждение относится к фольклору и может быть легко проверено читателем.

ЛЕММА 2. Пусть H – ганкелева матрица порядка n , записанная в виде

$$H = \begin{pmatrix} h_{n-1} & h_{n-2} & h_{n-3} & \dots & h_0 \\ h_{n-2} & h_{n-3} & h_{n-4} & \dots & h_{-1} \\ h_{n-3} & h_{n-4} & h_{n-5} & \dots & h_{-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_0 & h_{-1} & h_{-2} & \dots & h_{-n+1} \end{pmatrix}.$$

Матрица H имеет ранг 1 только в следующих трех случаях:

- (i) все элементы $h_{-n+1}, h_{-n+2}, \dots, h_0, h_1, \dots, h_{n-1}$ отличны от нуля и образуют (в указанном порядке) геометрическую прогрессию;
- (ii) в матрице H отличен от нуля только элемент h_{n-1} , т.е. с точностью до этого скалярного множителя H есть матричная единица E_{11} ;
- (iii) H есть матрица вида $h_{-n+1}E_{nn}$.

5. В этом разделе мы докажем включение (9).

Пусть $W \in \text{UAut}_c(\mathcal{H}_n)$, т.е. для любой ганкелевой матрицы A матрица

$$B = W^t A W \quad (11)$$

снова ганкелева. Покажем, что ганкелева матрица

$$W^t \mathcal{P}_n W \quad (12)$$

с точностью до числового множителя есть перъединичная матрица $\mathcal{P}_n$. Иначе говоря, для любой матрицы $W \in \text{UAut}_c(\mathcal{H}_n)$ теплицево произведение

$$K_W = W^t \mathcal{P}_n W \mathcal{P}_n \quad (13)$$

должно быть скалярной матрицей. Включение (9) окажется простым следствием этого факта.

Теплицева матрица K_W принадлежит группе $\text{UAut}_c(\mathcal{H}_n)$ (см. предложение 3) и при этом унитарна как произведение унитарных сомножителей. Обратная к ней матрица K_W^* также теплицева. Согласно теореме 5 унитарная матрица K_W должна быть ϕ -циркулянтном для некоторого комплексного числа ϕ с модулем 1. Теперь наша задача сводится к обоснованию следующего утверждения: единственными ϕ -циркулянтами, присутствующими в группе $\text{UAut}_c(\mathcal{H}_n)$, являются скалярные матрицы.

Предположим, что унитарная матрица $W \in \text{UAut}_c(\mathcal{H}_n)$ есть ϕ -циркулянт. Запишем ее первую строку в виде

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \quad (14)$$

и составим ганкелеву матрицу

$$B = W^t E_{11} W = \begin{pmatrix} \alpha_1^2 & \alpha_1 \alpha_2 & \cdots & \alpha_1 \alpha_n \\ \alpha_2 \alpha_1 & \alpha_2^2 & \cdots & \alpha_2 \alpha_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_n \alpha_1 & \alpha_n \alpha_2 & \cdots & \alpha_n^2 \end{pmatrix}.$$

Если все компоненты строки (14) отличны от нуля, то элементы первой строки матрицы B должны составлять геометрическую прогрессию (см. лемму 2), и это же верно для самих чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_n$:

$$\alpha_j = q^{j-1} \alpha_1.$$

Так как $W^t \in \text{UAut}_c(\mathcal{H}_n)$, то и элементы первого столбца матрицы W должны быть геометрической прогрессией. Тремя первыми ее членами являются числа α_1 , $\phi \alpha_n = q^{n-1} \alpha_1$ и $\phi \alpha_{n-1} = q^{n-2} \alpha_1$, поэтому

$$\alpha_1 q^{n-2} \phi \alpha_1 = (q^{n-1} \phi \alpha_1)^2$$

или

$$\phi = q^{-n}.$$

Поскольку $|\phi| = 1$, то и $|q| = 1$.

В последней строке ϕ -циркулянта W стоят числа

$$\phi\alpha_2 = q^{-n+1}\alpha_1, \quad \phi\alpha_3 = q^{-n+2}\alpha_1, \quad \dots, \quad \phi\alpha_n = q^{-1}\alpha_1, \quad \alpha_1.$$

Поэтому скалярное произведение первой и последней строк в W равно $nq^{n-1}|\alpha_1|^2$, т.е. не равно нулю, что невозможно вследствие унитарности матрицы W .

Итак, в строке (14) должны содержаться нули. Согласно лемме 2, применяемой к матрице B , нужно рассмотреть еще два возможных варианта:

- (ii) α_1 – единственный ненулевой элемент строки (14);
- (iii) в строке (14) только элемент α_n отличен от нуля.

Начнем с анализа варианта (iii). В соответствующем ϕ -циркулянте W , помимо элемента α_n в позиции $(1, n)$, отличны от нуля только элементы первой поддиагонали, равные числу $\phi\alpha_n$. Единственный ненулевой элемент матрицы $W^t E_{nn} W$ стоит в позиции $(n-1, n-1)$ и равен $\phi^2 \alpha_n^2$. Тем самым он отличается от нулевых элементов в позициях $(n-2, n)$ и $(n, n-2)$, что противоречит ганкелевости матрицы $W^t E_{nn} W$.

Таким образом, остается единственная возможность: $\alpha_1 \neq 0$, $\alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$. Этому варианту соответствует скалярная матрица $W = \alpha_1 I_n$.

Напомним, что этими рассуждениями обоснованы следующие факты:

- (i) единственными ϕ -циркулянтами, присутствующими в группе $\text{UAut}_c(\mathcal{H}_n)$, являются скалярные матрицы;
- (ii) для любой матрицы $W \in \text{UAut}_c(\mathcal{H}_n)$ теплицево произведение (13) должно быть скалярной матрицей;
- (iii) для любой матрицы $W \in \text{UAut}_c(\mathcal{H}_n)$ ганкелево произведение (12) с точностью до числового множителя равно перьединичной матрице $\mathcal{P}_n$.

Пусть теперь W – произвольная матрица из группы $\text{UAut}_c(\mathcal{H}_n)$, T – произвольная теплицева матрица и $H = T\mathcal{P}_n$. Имеем

$$W^*TW = W^*H\mathcal{P}_nW = W^*H\overline{W}W^t\mathcal{P}_nW.$$

Вместе с W группа $\text{UAut}_c(\mathcal{H}_n)$ содержит матрицу $\overline{W}$. Поэтому произведение $W^*H\overline{W}$ есть ганкелева матрица H_1 . Произведение же $W^t\mathcal{P}_nW$ согласно доказанному выше есть матрица вида $\alpha\mathcal{P}_n$. Следовательно, матрица $W^*TW = \alpha H_1\mathcal{P}_n$ является теплицевой. Тем самым показано, что всякая матрица $W \in \text{UAut}_c(\mathcal{H}_n)$ отображает подобием пространство $\mathcal{T}_n$ в себя. Иначе говоря, доказано включение (9) и, значит, равенство (1).

6. Доказательство включения (10) проводится по сходному образцу. Вместо леммы 2 используется ее теплицев аналог.

ЛЕММА 3. Пусть T – теплицева матрица порядка n , записанная в виде

$$T = \begin{pmatrix} t_0 & t_1 & t_2 & \dots & t_{n-1} \\ t_{-1} & t_0 & t_1 & \dots & t_{n-2} \\ t_{-2} & t_{-1} & t_0 & \dots & t_{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{-n+1} & t_{-n+2} & t_{-n+3} & \dots & t_0 \end{pmatrix}.$$

Матрица T имеет ранг 1 только в следующих трех случаях:

- (i) все элементы $t_{-n+1}, t_{-n+2}, \dots, t_0, t_1, \dots, t_{n-1}$ отличны от нуля и образуют (в указанном порядке) геометрическую прогрессию;
- (ii) в матрице T отличен от нуля только элемент t_{n-1} , т.е. с точностью до этого скалярного множителя T есть матричная единица E_{1n} ;
- (iii) T есть матрица вида $t_{-n+1}E_{n1}$.

Как и в разделе 5, основную трудность составляет доказательство следующего утверждения: для любой матрицы $W \in \text{UAut}_c(\mathcal{T}_n)$ произведение (12) есть скалярное кратное перьединичной матрицы.

Для произвольной матрицы $W \in \text{UAut}_c(\mathcal{T}_n)$ произведение $W^t W = W^t I_n W$ является унитарной теплицевой матрицей, а значит ϕ -циркулянт, который также должен содержаться в $\text{UAut}_c(\mathcal{T}_n)$. Покажем отсутствие в группе $\text{UAut}_c(\mathcal{T}_n)$ нескаларных ϕ -циркулянтов. Пусть $W \in \text{UAut}_c(\mathcal{T}_n)$ – такой ϕ -циркулянт. Рассмотрим теплицеву матрицу $W^t E_{1n} W$. Вводя помимо первой строки (14) матрицы W ее последнюю строку

$$(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n), \quad (15)$$

можем записать $W^t E_{1n} W$ в виде

$$B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \beta_1 & \alpha_1 \beta_2 & \cdots & \alpha_1 \beta_n \\ \alpha_2 \beta_1 & \alpha_2 \beta_2 & \cdots & \alpha_2 \beta_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_n \beta_1 & \alpha_n \beta_2 & \cdots & \alpha_n \beta_n \end{pmatrix}.$$

К этой матрице применима лемма 3. Вариант (i) анализируется так же, как в разделе 5, и оказывается невозможным вследствие нарушения ортогональности. В варианте (iii) единственными ненулевыми элементами строк (14) и (15) являются α_n и β_1 , что несовместимо с циркулянтной структурой матрицы W . Остается вариант (ii), где в первой и последней строках матрицы W отличны от нуля только α_1 и β_n . В этом случае циркулянт W есть скалярная матрица.

Итак, какова бы ни была матрица $W \in \text{UAut}_c(\mathcal{T}_n)$, справедливо соотношение $W^t W = \gamma I$ для некоторого числа γ (по модулю равного единице). Отсюда $W^t = \gamma W^*$, а потому $W \in \text{UAut}(\mathcal{T}_n)$. Используя лемму 1, заключаем, что для всякой матрицы $W \in \text{UAut}_c(\mathcal{T}_n)$ произведение $W^t \mathcal{P}_n W$ является скалярным кратным перьединичной матрицы. Нужно нам включение есть простое следствие этого факта.

Действительно, пусть W – произвольная матрица из группы $\text{UAut}_c(\mathcal{T}_n)$, H – произвольная ганкелева матрица и $T = H \mathcal{P}_n$. Имеем

$$W^* H W = W^* T \mathcal{P}_n W = W^* T \bar{W} W^t \mathcal{P}_n W.$$

Вместе с W группа $\text{UAut}_c(\mathcal{T}_n)$ содержит матрицу $\bar{W}$. Поэтому произведение $W^* T \bar{W}$ есть теплицева матрица T_1 . Произведение же $W^t \mathcal{P}_n W$ согласно доказанному выше есть скалярное кратное перьединичной матрицы: $W^t \mathcal{P}_n W = \alpha \mathcal{P}_n$. Следовательно, матрица $W^* H W = \alpha T_1 \mathcal{P}_n$ ганкелева. Тем самым показано, что всякая матрица $W \in \text{UAut}_c(\mathcal{T}_n)$ отображает подобием пространство $\mathcal{H}_n$ в себя. Иначе говоря, доказано включение (10) и, значит, равенство (2).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Х. Д. Икрамов, “Унитарные автоморфизмы пространства теплицевых матриц”, *Докл. РАН*, **456**:4 (2014), 389–391.
- [2] Х. Д. Икрамов, “Унитарные автоморфизмы пространства ганкелевых матриц”, *Матем. заметки*, **96**:5 (2014), 687–696.
- [3] А. К. Абдикалыков, Х. Д. Икрамов, В. Н. Чугунов, “Унитарные конгруэнции и ганкелевы матрицы”, *Докл. РАН*, **457**:5 (2014), 507–509.
- [4] A. K. Abdikalykov, V. N. Chugunov, Kh. D. Ikramov, “Unitary congruence automorphisms of the space of Toeplitz matrices”, *Linear Multilinear Algebra*, **63**:6 (2015), 1195–1203.
- [5] N. M. Huang, R. E. Cline, “Inversion of persymmetric matrices having Toeplitz inverses”, *J. Assoc. Comput. Mach.*, **19**:3 (1972), 437–444.
- [6] T. N. E. Greville, “Toeplitz matrices with Toeplitz inverses revisited”, *Linear Algebra Appl.*, **55** (1983), 87–92.

А. К. Абдикалыков

Казахстанский филиал
Московского государственного
университета имени М.В.Ломоносова
E-mail: adiko2008@gmail.com

Поступило
25.03.2015

Х. Д. Икрамов

Московский государственный университет
имени М.В.Ломоносова
E-mail: ikramov@cs.msu.su

В. Н. Чугунов

Институт вычислительной математики
Российской академии наук
E-mail: chugunov.vadim@gmail.com