Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. Д. Лившиц, О равномерной аппроксимации на подмножествах, *Матем. заметки*, 2015, том 98, выпуск 5, 797–800

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10783>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 03:32:54

О равномерной аппроксимации на подмножествах

Е. Д. Лившиц

1. Развитие многих областей теории приближения было обусловлено необходимостью решения прикладных задач. В настоящей заметке рассматривается задача теории приближения, являющаяся формализацией задачи “аппроксимации фона фотографии документа” из теории обработки изображений [1]. Пусть заданы множество X с вероятностной мерой μ , множество функций $M \subset \mathcal{L}_\infty(X)$ и число $u \in (0, 1)$. В теории обработки изображений делается предположение, что для $X = [0, 1]^2$, класса M , состоящего из достаточно гладких функций, и функции $f \in L_\infty(X)$, соответствующей фотографии документа, имеет место представление

$$f = m + f_0 + e, \quad m \in M, \quad f_0, e \in \mathcal{L}_\infty(X), \quad (1)$$

в котором $\mu(\text{supp } f_0) < u$, и величина $\epsilon := \|e\|_\infty$ достаточно мала. Тогда гладкая функция m будет соответствовать яркости фона, f_0 с малым носителем – собственно тексту документа, а e – малому равномерному шуму. В этом случае преобразование $f \rightarrow (f - m_0 - \epsilon)_+$ делает фон фотографии равномерно белым и обеспечит желаемое улучшение качества изображения.

Для $A \subset X$ и p , $1 \leq p \leq \infty$, будем использовать следующее обозначение:

$$\|f\|_{p,A} := \|f\chi_A\|_p,$$

где χ_A – индикатор множества A . Для того, чтобы перейти к постановке задачи, определим

$$|f|_u := \inf_{A \subset X, \mu(A) \geq 1-u} \|f\|_{\infty,A}, \quad \text{Dst}_u(f, M) := \inf_{m \in M} |f - m|_u.$$

В наиболее общем виде задача состоит в вычислении $\text{Dst}_u(f, M)$ и нахождении m , на котором эта величина достигается или почти достигается. Для $|\cdot|_u$ не выполняется неравенство треугольника, поэтому вычисление $\text{Dst}_u(f, M)$ является невыпуклой задачей. В настоящей работе мы исследуем эффективные алгоритмы ее приближенного решения, т.е. алгоритмы нахождения таких

$$m \in M, \text{ для которых величина } |f - m|_u \text{ была бы достаточно близка к } \text{Dst}_u(f, M). \quad (2)$$

То, что слагаемое f_0 , несущее информацию о тексте, сосредоточено на множестве малой меры ($\mu(\text{supp } f_0) < \epsilon$) указывает, что рассматриваемый вопрос можно отнести к задаче о сжатом измерении. Как известно, одними из наиболее эффективных способов решения задачи о сжатых измерениях являются l_1 минимизация и жадные алгоритмы [2], [3]. Рассмотрим их аналоги для решения задачи (2).

l_1 -Минимизация. В качестве решения задачи (2) выбирается

$$P_1(f) := \text{argmin}_{m \in M} \|f - m\|_1.$$

Жадный алгоритм выбора подмножества. Пусть задано p , $1 \leq p < \infty$. Построим последовательность вложенных подмножеств $\emptyset = U_0^p \subset U_1^p \subset \dots$ и элементов $G_k^p(f) \in M$, $k \geq 0$. Пусть $U_0^p := \emptyset$. Для каждого $k \geq 0$ определим

$$G_k^p := G_k^p(f) := \text{argmin}_{m \in M} \|f - m\|_{p, X \setminus U_k^p}.$$

$$U_{k+1}^p := U_k^p \cup \left\{ x \in X \setminus U_k^p : |f(x) - G_k^p(x)| > \frac{1}{2} \|f - G_k^p\|_{\infty, X \setminus U_k^p} \right\}.$$

С точки зрения скорости вычисления наибольший интерес представляет случай $p = 2$.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-50-00005).

DOI: 10.4213/mzm10783

© Е. Д. Лившиц, 2015

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В обоих этих определениях мы предполагаем, что $\operatorname{argmin}(\cdot)$ достигается на каком-то элементе из M ; в противном случае необходимо рассмотреть почти оптимальное решение.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Пусть $M := L_n$ является чебышевской системой функций и $|f - m_0|_u = 0$, при некотором $m_0 \in M$. Тогда у задачи (2) есть вероятностное решение, значительно превосходящее детерминистские подходы. Выберем случайным образом числа $x_i \in X$, $1 \leq i \leq n$, найдем $l \in L_n$, для которой $l(x_i) = f(x_i)$, $1 \leq i \leq n$, и проверим является ли найденная l решением задачи, т.е. верно ли, что $|f - l|_u = 0$. Легко проверить, что вероятность того, что за первые N проверок решение не будет найдено, не превышает $\exp(-cN)$.

В следующих двух разделах рассматривается “модельная ситуация”, когда

$$|f - m_0|_u = 0, \quad m_0 \in M.$$

2. Следующая простая лемма вытекает из неравенства треугольника и является стандартной в теории l_1 -минимизации.

ЛЕММА. Пусть множество M является линейным подпространством $\mathcal{L}_\infty(X)$. Предположим, что для любого $U \subset X$, $\mu(U) \leq u$ и любого $t \in M$, $t \neq 0$, выполняется неравенство

$$\|m\|_{1,U} < \|m\|_{1,X \setminus U}, \quad m \neq 0. \quad (3)$$

Тогда для любого $f \in \mathcal{L}_\infty(X)$ из равенства $|f - m_0|_u = 0$, $m_0 \in M$, будет вытекать равенство $P_1(f) = m_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности можно предположить, что $m_0 = 0$; тогда найдется $U \subset X$, $\mu(U) \leq u$, для которого

$$f(x) = 0, \quad x \in X \setminus U. \quad (4)$$

По неравенству треугольника и определению l_1 -минимизации

$$\begin{aligned} \|f - P_1(f)\|_{1,U} + \|P_1(f)\|_{1,U} &\geq \|f\|_{1,U} \stackrel{(4)}{=} \|f\|_1 \geq \|f - P_1(f)\|_1 \\ &= \|f - P_1(f)\|_{1,X \setminus U} + \|f - P_1(f)\|_{1,U} \stackrel{(4)}{=} \|P_1(f)\|_{1,X \setminus U} + \|f - P_1(f)\|_{1,U}, \\ \|P_1(f)\|_{1,U} &\geq \|P_1(f)\|_{1,X \setminus U}. \end{aligned}$$

Из неравенства (3) непосредственно вытекает, что $P_1(f) = 0 = m_0$.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть X является одномерным тором T , а M – множеством тригонометрических полиномов T_n , степени не выше n . Тогда найдется такое $C > 0$, что для функции $f \in \mathcal{L}_\infty(T)$, $\operatorname{Dst}_u(f, T_n) = 0$, $u \leq cn^{-1}$, метод l_1 -минимизации будет давать точное решение: $|f - P_1(f)|_u = 0$.

Выполнение неравенства (3) для тригонометрических полиномов вытекает из неравенства С. М. Никольского [4], точное значение константы c было недавно найдено Ю. В. Малыхиным и К. С. Рютиным [5].

3. Перейдем к исследованию скорости сходимости жадного алгоритма выбора подмножества. Хотя, как отмечалось выше, с вычислительной точки зрения наибольший интерес представляет случай $p = 2$, мы проведем рассуждения для всех p , $1 \leq p < \infty$. Пусть $M = L_n$ является линейным подпространством, для которого выполняется неравенство Никольского

$$\|l\|_\infty \leq C_N n^{1/p} \|l\|_p, \quad l \in L_n, \quad (5)$$

где константа C_N может зависеть от p . В частности M может быть множеством тригонометрических полиномов степени не выше заданной. (В этом случае $C_N = 3$, см. [4].)

ТЕОРЕМА 1. Пусть для $M = L_n$ выполняется неравенство Никольского (5). Если

$$|f - m_0|_u = 0, \quad f \in \mathcal{L}_\infty(X), \quad m_0 \in L_n,$$

и

$$u \leq \frac{C_N^{-p}}{12n}, \quad (6)$$

то для всех $k \in \mathbb{N}$ будет выполняться оценка

$$|f - G_k^p(f)|_u \leq \frac{1}{6} \|f - m_0\|_\infty \left(\frac{3}{4}\right)^k.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности можно считать, что $m_0 = 0$, т.е.

$$f(x) = 0, \quad x \in X \setminus U, \quad \mu(U) \leq u. \quad (7)$$

Для сокращения обозначений будем писать q вместо $G_k^p = G_k^p(f)$ и U_k вместо U_k^p . Докажем по индукции, что для $k \geq 0$ будут выполняться следующие утверждения:

$$U_{k+1} \subset U, \quad \|f\|_{\infty, U \setminus U_{k+1}} \leq \frac{3}{4} \|f\|_{\infty, U \setminus U_k}. \quad (8)$$

По определению жадного алгоритма выбора подмножества

$$\|f - q\|_{p, X \setminus U_k} \leq \|f - 0\|_{p, X \setminus U_k}.$$

Следовательно,

$$\|q\|_{p, X \setminus U} \stackrel{(7)}{=} \|f - q\|_{p, X \setminus U} \leq \|f - q\|_{p, X \setminus U_k} \leq \|f\|_{p, X \setminus U_k} \stackrel{(7)}{=} \|f\|_{p, U \setminus U_k}^p \leq \|f\|_{\infty, U \setminus U_k}^p \mu(U).$$

Применим неравенство Никольского к $q \in L_n$:

$$\begin{aligned} \|q\|_\infty^p &\leq C_N^p n \|q\|_p^p \leq C_N^p n (\|q\|_{p, X \setminus U}^p + \|q\|_{p, U}^p) \\ &\leq C_N^p n (\|f\|_{\infty, U \setminus U_k}^p \mu(U) + \|q\|_\infty^p \mu(U)) \stackrel{(7)}{\leq} C_N^p n u (\|f\|_{\infty, U \setminus U_k}^p + \|q\|_\infty^p). \end{aligned} \quad (9)$$

Отсюда и неравенства (6) будет следовать оценка

$$\|f - q\|_{\infty, X \setminus U} = \|q\|_{\infty, X \setminus U} \leq \|q\|_\infty \leq \frac{1}{6} \|f\|_{\infty, U \setminus U_k}. \quad (10)$$

Тогда будут иметь место следующие неравенство:

$$\|f - q\|_{\infty, X \setminus U} \leq \frac{1}{6} \|f\|_{\infty, U \setminus U_k} \leq \frac{1}{3} \|f - q\|_{\infty, X \setminus U_k}.$$

Следовательно, $U_{k+1} \subset U$. Если $x \in U \setminus U_k$ и $|f(x)| > 3/4 \|f\|_{\infty, U \setminus U_k}$, то

$$|f(x) - q(x)| > \frac{3}{4} \|f\|_{\infty, U \setminus U_k} - \|q\|_\infty \stackrel{(10)}{\geq} \frac{1}{2} (\|f\|_{\infty, U \setminus U_k} + \|q\|_\infty) \geq \frac{1}{2} \|f - q\|_{\infty, U \setminus U_k}.$$

Поэтому

$$\left\{ x \in U \setminus U_k : |f(x)| > \frac{3}{4} \|f\|_{\infty, U \setminus U_k} \right\} \subset U_{k+1},$$

что доказывает индукционные предположения (8). В результате получаем

$$\begin{aligned} |f - G_k^p(f)|_u &\leq \|f - G_k^p(f)\|_{\infty, X \setminus U} = \|f - q\|_{\infty, X \setminus U} \stackrel{(7)}{=} \|q\|_{\infty, X \setminus U} \\ &\leq \|q\|_\infty \stackrel{(10)}{\leq} \frac{1}{6} \|f\|_{\infty, U \setminus U_k} \stackrel{(8)}{\leq} \frac{1}{6} \|f\|_\infty \left(\frac{3}{4}\right)^k \leq \frac{1}{6} \|f - m_0\|_\infty \left(\frac{3}{4}\right)^k. \end{aligned}$$

4. Даже в модельном случае $\text{Dst}_u(f, M) = 0$ положительный результат удастся получить только когда f отличается от $l \in L_n$ на множестве меры порядка n^{-1} . С точки зрения задачи выравнивания фона это условие является слишком ограничительным. С другой стороны, в этой задаче естественно ограничить сверху производную фона – элементов множества M :

$$M \subset W_\infty^1([0, 1]), \quad \|m'\|_\infty \leq C_0 \quad \text{или} \quad M \subset W_\infty^1([0, 1]^2), \quad \|\nabla m\|_\infty \leq C_0.$$

Эти соотношения позволяют оценить сверху $\|\cdot\|_\infty$ через $\|\cdot\|_p$. Легко проверить, что можно выбрать константы c_1, c_2 со следующим свойством: для любого $m \in M$ и $U \subset X$, $\mu(U) \leq \min(c_1 \|m\|_\infty, 1/2)$, выполняется неравенство

$$\|m\|_{p, X \setminus U} \geq c_2 \min(\|m\|_\infty, 1)^{(p+1)/p}. \quad (11)$$

В этой ситуации удастся показать, что жадный алгоритм выбора подмножества позволяет исключить из аппроксимации те точки, где функция f сильно отличалась от оптимального $m_0 \in M$ и $G_k^p(f)$ являются достаточно хорошим приближением к f . Более того, в этой ситуации допустим шум порядка $u^{(p+1)/p}$.

ТЕОРЕМА 2. *Существуют такие константы $C_i > 1$, $1 \leq i \leq 4$, зависящие только от C_0 , что если для $f \in \mathcal{L}_\infty(X)$, $m_0 \in M$ и $u \in (0, 1/2]$ будет выполняться неравенство*

$$|f - m_0|_u < C_1 u^{(p+1)/p},$$

то для

$$k_0 = [C_2(\ln(\|f - m_0\|_\infty)_+ - \ln u + 1)]$$

будет справедлива оценка

$$|f - G_{k_0}^p|_u \leq C_4 C_3^p u.$$

Автор выражает глубокую благодарность члену-корреспонденту РАН профессору С. В. Конягину за плодотворное обсуждение результатов настоящей работы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Gabriel de França Pereira e Silva, Rafael Dueire Lins, André Ricardson Silva, *Image Analysis and Recognition*, Lecture Notes in Computer Science, **7950**, Springer-Verlag, Berlin, 2013, 290–298. [2] D. L. Donoho, *IEEE Trans. Inform. Theory*, **52**:4 (2006), 1289–1306. [3] Е. Д. Лившиц, *Матем. сб.*, **203**:2 (2012), 33–44. [4] С. М. Никольский, *Приближение функций многих переменных и теоремы вложения*, Наука, М., 1977. [5] Ю. В. Малыхин, К. С. Рютин, *Матем. сб.*, **205**:11 (2014), 95–124.

Е. Д. Лившиц

Математический институт им. В. А. Стеклова
Российской академии наук
E-mail: livshitz@rambler.ru

Поступило

23.04.2015