Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. П. Иванов, О применении вариационных неравенств в динамике систем с трением, *Матем. заметки*, 2015, том 98, выпуск 2, 300–302

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10786>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 15:35:04

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

О применении вариационных неравенств в динамике систем с трением

А. П. Иванов

Рассмотрим механическую систему с конфигурационным пространством $q \in \mathbb{R}^n$, стесненную геометрическими неидеальными связями

$$q_j = 0, \quad j = 1, \dots, k. \quad (1)$$

Будем описывать движение уравнениями Лагранжа с множителями вида

$$Aw = F + N + T, \quad N = \sum_{j=1}^k \lambda_j e_j, \quad (2)$$

где $w = \dot{q}$, $A(n \times n)$ – матрица кинетической энергии, e_j – орты стандартного базиса в $\mathbb{R}^n$, вектор F включает обобщенные силы и другие слагаемые, не зависящие от ускорений и реакций, λ_j – множители Лагранжа связей (1), T – силы сухого трения в контактах, выраженных равенствами (1), представленные в формате обобщенных сил. В случае, если часть наложенных связей односторонние, знак равенства в неравенстве (1) заменяется на “не меньше”, при этом соответствующий множитель $\lambda_j \geq 0$.

Будем решать задачу об определении обобщенных ускорений и реакций из уравнений (1), (2) при фиксированных значениях переменных $q, \dot{q}$. Было показано [1], что в случае кулонова трения всякое решение удовлетворяет вариационному неравенству

$$(F + N + T, A^{-1}(N' - N)) \geq 0, \quad N = \sum_{j=1}^k \lambda'_j e_j, \quad (3)$$

которое должно выполняться для всех допустимых значений λ'_j . Если трения нет, а все связи (1) двусторонние, то числа λ'_j произвольны, откуда следует

$$(F + N, A^{-1}e_j) = 0, \quad j = 1, \dots, k. \quad (4)$$

Соотношения (4) можно интерпретировать как условия минимума выпуклой функции

$$\Phi(N) = (F + N, A^{-1}(F + N)), \quad (5)$$

которые выражают принцип наименьшего принуждения Гаусса в двойственной формулировке. Поскольку функция (5) является многочленом второй степени, ее минимайзер находится из системы линейных уравнений с невырожденной матрицей. Можно показать [1],

Данная работа была проделана при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 14.01.00432) и Министерства образования и науки РФ (соглашение 14.A18.21.0374).

что величина (5) также минимальна и в случае, когда среди связей (1) имеются односторонние.

В системах с трением Кулона сила трения R_t при точечном контакте твердых тел противоположна относительной скорости скольжения v_t и пропорциональна нормальной реакции R_n , а при отсутствии скольжения ее модуль не превышает пороговой величины:

$$R_t = -\mu |R_n| \frac{v_t}{|v_t|}, \quad |R_t| \leq \mu |R_n|, \quad (6)$$

где μ – коэффициент трения. При начале скольжения с нулевой скоростью, но ненулевым ускорением, в формуле (6) скорость нужно заменить на ускорение. Соотношения (6) формулируются для случая натуральной евклидовой метрики, а в рассматриваемой системе с абстрактными обобщенными координатами следует использовать метрику Якоби, определяемую при помощи скалярного произведения

$$(a, b)_A = (a, A^{-1}b), \quad a, b \in \mathbb{R}^n. \quad (7)$$

В частности, касательные направления t к плоскости $q_1 = 0$ определяются условием равенства нулю первой компоненты вектора t , а нормальное направление n_1 – формулой $n_1 = Ae_1$. При транслировании закона (6) в обобщенную форму (2) нормальную составляющую и модули векторов следует понимать в смысле метрики (7).

Методы решения вариационных неравенств обсуждены в [2]. Здесь мы предполагаем, что коэффициенты трения в формулах (6) достаточно малы. Следуя общей теории, будем строить последовательность итераций $\{N^{(s)}\}_{s=0}^{\infty}$, используя представленные выше результаты.

В качестве начального приближения $N^{(0)}$ возьмем точку минимума функции (5), составленной в отсутствие трения. Подстановка в систему (2) (где $T = 0$) позволяет найти обобщенные ускорения. Далее рассчитываем силы трения $T_j(N^{(0)})$ по формулам (6). Эти силы преобразуем в формат обобщенных сил $T^{(0)}$ при помощи линейного оператора L , который строится на основе общих теорем динамики, а затем прибавляем к активным силам F , т.е. полагаем $F^{(1)} = F + T^{(0)}$, и переходим к следующей итерации. Общая формула, описывающая процедуру, выглядит так:

$$\begin{aligned} N^{(s)} &= \arg \min (F^{(s)} + N)_A^2, \\ T^{(s)} &= T(F^{(s)}, N^{(s)}), \quad F^{(s+1)} = F + T^{(s)}, \quad s = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (8)$$

Для сходимости последовательности $\{N^{(s)}\}$ достаточно, чтобы отображение

$$N^{(s+1)} = \Psi(N^{(s+1)}) = \arg \min (F + T^{(s)} + N)_A^2 \quad (9)$$

было сжимающим.

Первая из формул (9) определяет ортогональную (в смысле (7)) проекцию вектора $F^{(s)}$ на линейную оболочку векторов $n_j = Ae_j$, $j = 1, \dots, k$, (если среди связей (1) имеются односторонние, то в линейных комбинациях коэффициенты при соответствующих векторах неотрицательны). Оператор проектирования не расширяющий, т.е.

$$\|N^{(s)} - \bar{N}^{(s)}\| \leq \|F^{(s)} - \bar{F}^{(s)}\|_A$$

для любых $F^{(s)} - \bar{F}^{(s)}$. Сжатость оператора (9) при достаточно малом трении обеспечивается второй формулой (8). Действительно, если при некоторых значениях нормальных реакций в каком-либо контакте скольжения нет, причем неравенство (6) выполнено в строгом смысле, то при малом изменении этих значений ситуация не изменится, т.е. сила трения в этом контакте останется прежней. Для контакта скольжения выполнена первая формула (6). При малых изменениях нормальных реакций изменяется как модуль силы трения (за счет приращения соответствующей реакции), так и ее направление (за счет приращений остальных реакций), однако последний фактор имеет второй порядок малости.

ТЕОРЕМА 1. Если норма (7) линейного оператора $T(F^{(s)}, N^{(s)})$, переводящего силы трения в формат обобщенных сил системы (2), меньше единицы, то эта система имеет единственное решение, причем оно является неподвижной точкой отображения (9).

СЛЕДСТВИЕ. Итерационный процесс (8) сходится для достаточно малых значений коэффициентов трения.

ПРИМЕР. Круглый неоднородный диск радиуса R и массы m со смещенным центром масс движется в вертикальной плоскости по неподвижной шероховатой опоре. Введем систему отсчета OXY с началом на опоре и осью OY , направленной вертикально вверх. Положение диска задается координатами его центра $C(x, y)$ и углом φ между вектором CG и осью OX (G – центр масс диска). Наложённая связь описывается уравнением $y - R = 0$. Теорема о движении центра масс и теорема моментов выражаются системой

$$\begin{aligned} m\ddot{x}(G) &= T, & m\ddot{y}(G) &= N - mg, & m\rho^2\ddot{\varphi} &= T(R + a \sin \varphi) - aN \cos \varphi, \\ x(G) &= x + a \cos \varphi, & y(G) &= y + a \sin \varphi, \end{aligned}$$

где ρ – радиус инерции, $a = |CG|$. После преобразований эти уравнения принимают вид

$$\begin{aligned} m(\ddot{x} - a\ddot{\varphi} \sin \varphi) &= T + ma\dot{\varphi}^2 \cos \varphi, & m(\ddot{y} + a\ddot{\varphi} \cos \varphi) &= N - mg + ma\dot{\varphi}^2 \sin \varphi, \\ m\rho^2\ddot{\varphi} &= T(y + a \sin \varphi) - aN \cos \varphi. \end{aligned} \quad (10)$$

Полагая $y \equiv R$, исключим угловое ускорение из второго и третьего уравнений (10):

$$N(\rho^2 + a \cos^2 \varphi) = aT(R + a \sin \varphi) \cos \varphi + m\rho^2(a\dot{\varphi}^2 \sin \varphi - g),$$

откуда получаем в формуле (9)

$$\frac{dT^{(s+1)}}{dT^{(s)}} = \frac{a(R + a \sin \varphi) \cos \varphi}{\rho^2 + a \cos^2 \varphi}. \quad (11)$$

Если скорость скольжения отлична от нуля, то

$$\frac{dT^{(s)}}{dN^{(s)}} = \pm \mu,$$

а в отсутствие скольжения эта производная равна нулю. Следовательно, условие сжатости оператора (9) выглядит так:

$$a\mu(R + a \sin \varphi)|\cos \varphi| < \rho^2 + a \cos^2 \varphi. \quad (12)$$

Заметим, что в случае, когда неравенство (12) имеет противоположный смысл, система (10) может быть несовместной (один из так называемых парадоксов Пенлеве [3]).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] А. Р. Иванов, *Regul. Chaotic Dyn.*, **19:1** (2014), 100–115. [2] Д. Киндерлерер, Г. Стампакья, *Введение в вариационные неравенства и их приложения*, Мир, М., 1983. [3] П. Пенлеве, *Лекции о трении*, Гостехтеориздат, М., 1954.

А. П. Иванов

Московский физико-технический
институт (государственный университет),
г. Долгопрудный Московской обл.

E-mail: apivanov@orc.ru

Поступило

15.11.2014