Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Конягин, А. А. Кулешов, О непрерывности конечных сумм ридж-функций, *Матем. заметки*, 2015, том 98, выпуск 2, 308–309

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10787>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 13:45:45

О непрерывности конечных сумм ридж-функций

С. В. Конягин, А. А. Кулешов

Пусть $n \geq 2$, $E \subset \mathbb{R}^n$ – некоторое множество. Ридж-функцией на E (см. [1]–[4]) будем называть функцию вида $\varphi(\mathbf{a} \cdot \mathbf{x})$, где

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in E, \quad \mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = \sum_{j=1}^n a_j x_j$$

и φ – функция, определенная на $\Delta(\mathbf{a}) = \{\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} : \mathbf{x} \in E\}$. На множестве E рассмотрим сумму ридж-функций

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m \varphi_i(\mathbf{a}^i \cdot \mathbf{x}). \quad (1)$$

Всюду мы будем предполагать, что векторы $\mathbf{a}^i$ попарно неколлинеарны и, значит, ненулевые. Обозначим $\Delta_i = \Delta(\mathbf{a}^i)$. Нас интересует, вытекает ли из непрерывности f непрерывность функций φ_i . Следующее утверждение основано на результатах [4].

ТЕОРЕМА 1. Пусть множество E непусто и открыто. Тогда следующие условия равносильны:

- 1) векторы $\mathbf{a}^i$ линейно независимы;
- 2) из непрерывности на E функции f вида (1) следует непрерывность функций φ_i на множествах Δ_i .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть выполнено 1). Докажем, что, например, функция φ_1 непрерывна в произвольной точке $t_0 \in \Delta_1$. Зафиксируем точку $\mathbf{x}^0 \in E$ такую, что $\mathbf{a}^1 \cdot \mathbf{x}^0 = t_0$. В силу линейной независимости векторов $\mathbf{a}^i$ найдется такой вектор $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$, что $\mathbf{a}^1 \cdot \mathbf{h} = 1$ и $\mathbf{a}^i \cdot \mathbf{h} = 0$ при $i = 2, \dots, m$. Для $i = 2, \dots, m$ обозначим $\varphi_i(\mathbf{a}^i \cdot \mathbf{x}^0)$ через φ_i^0 . Тогда $x^0 + t\mathbf{h} \in E$ и $\varphi_i(\mathbf{a}^i \cdot (\mathbf{x}^0 + t\mathbf{h})) = \varphi_i^0$ для всех t из некоторой окрестности нуля. Следовательно,

$$\varphi_1(t_0 + t) = f(\mathbf{x}^0 + t\mathbf{h}) - \sum_{i=2}^m \varphi_i^0,$$

откуда вытекает непрерывность φ_1 в t_0 .

Докажем, что из невыполнения 1) следует невыполнение 2). Для этого мы построим определенные на $\mathbb{R}$ функции φ_i , среди которых будут всюду разрывные, так, что (1) выполнено на всем $\mathbb{R}$ для $f \equiv 0$. В силу линейной зависимости векторов найдутся числа α_i , не все равные нулю, такие, что $\sum_{i=1}^m \alpha_i \mathbf{a}^i = 0$. Пусть $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – произвольная всюду разрывная аддитивная функция (теорема 5.4, [5]), т.е. φ удовлетворяет функциональному уравнению Коши:

$$\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y) \quad \text{для всех} \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Тогда функции $\varphi_i(t) = \varphi(\alpha_i t)$ обладают требуемым свойством.

Замкнутое выпуклое множество $E \subset \mathbb{R}^n$, для которого $\text{int}(E) \neq \emptyset$, называется *выпуклым телом*. Гиперплоскость $\Gamma = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{c} \cdot \mathbf{x} = \gamma\}$ будем называть *опорной* к множеству E в точке $\mathbf{y} \in E$, если для всех $\mathbf{x} \in E$ выполнено $\mathbf{c} \cdot \mathbf{x} \geq \mathbf{c} \cdot \mathbf{y} = \gamma$ [6; с. 192]; тогда $\mathbf{c}$ и $-\mathbf{c}$ – *опорные функционалы* множества E в точке $\mathbf{y}$. Границу $\partial(E)$ выпуклого тела E назовем *гладкой*, если через любую точку $\mathbf{y} \in \partial(E)$ проходит единственная опорная гиперплоскость.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-50-00005).

DOI: 10.4213/mzm10787

ТЕОРЕМА 2. Пусть E – выпуклое тело в $\mathbb{R}^n$, $E \neq \mathbb{R}^n$, и $m \geq 2$. Тогда следующие условия равносильны:

- 1) граница E гладкая;
- 2) для любых векторов $\mathbf{a}^1, \dots, \mathbf{a}^m$ и любых функций φ_i , непрерывных на $\text{int}(\Delta_i)$, $i = 1, \dots, m$, из непрерывности на E функции f вида (1) следует непрерывность функций φ_i на множествах Δ_i ;
- 3) для любых векторов $\mathbf{a}^1, \dots, \mathbf{a}^m$ и любых функций φ_i , непрерывных на $\text{int}(\Delta_i)$, $i = 1, \dots, m$, из непрерывности на E функции f вида (1) следует локальная ограниченность функций φ_i на множествах Δ_i .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть выполнено 1). Докажем, что, например, функция φ_1 непрерывна в граничной точке $t_0 \in \Delta_1$. Зафиксируем точку $\mathbf{x}^0 \in E$ такую, что $\mathbf{a}^1 \cdot \mathbf{x}^0 = t_0$. Тогда $\mathbf{x}^0$ является граничной точкой множества E , а функционал $\mathbf{a}^1$ является опорным в этой точке. В силу условия гладкости функционалы $\mathbf{a}^i$, $i \geq 2$, не будут опорными в точке $\mathbf{x}^0$, т.е. $\mathbf{a}^i \cdot \mathbf{x}^0$ является внутренней точкой Δ_i и, значит, точкой непрерывности φ_i . Поэтому функция

$$\varphi_1(\mathbf{a}^1 \cdot \mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - \sum_{i=2}^m \varphi_i(\mathbf{a}^i \cdot \mathbf{x})$$

будет непрерывной в $\mathbf{x}^0$, из чего следует требуемое утверждение.

Пусть 1) не выполнено, т.е. имеется точка негладкости $\mathbf{x}^0$ на границе E . Тогда найдутся неколлинеарные векторы $\mathbf{h}^1$ и $\mathbf{h}^2$ такие, что

$$t_i = \mathbf{h}^i \cdot \mathbf{x}^0 = \min\{\mathbf{h}^i \cdot \mathbf{x} : \mathbf{x} \in E\}, \quad i = 1, 2.$$

Без ограничения общности можно считать, что $t_1 = t_2 = 0$. Положим $\mathbf{a}^1 = \mathbf{h}^1 + \mathbf{h}^2$, $\mathbf{a}^2 = \mathbf{h}^1 + 2\mathbf{h}^2$. Пусть $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – произвольная дифференцируемая функция, удовлетворяющая условиям $\lim_{u \rightarrow -\infty} \psi(u) = \infty$ и $\lim_{u \rightarrow -\infty} \psi'(u) = 0$. Для $i = 1, 2$ положим $\varphi_i(t) = (-1)^i \psi(\log t)$ при $t > 0$ и $\varphi_i(0) = 0$, а функция f при $m = 2$ определяется равенством (1). Легко видеть, что f будет непрерывной на E , а $|\varphi_i(t)| \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow 0$, $i = 1, 2$. Если $m > 2$, то можно дополнительно положить $\mathbf{a}^i = \mathbf{h}^1 + i\mathbf{h}^2$ и $\varphi_i \equiv 0$ при $i > 2$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 3. Пусть E – выпуклое тело в $\mathbb{R}^n$, функция f вида (1) непрерывна на E , функции φ_i непрерывны на $\text{int}(\Delta_i)$, $i = 1, \dots, m$, и пусть для некоторого i точка $t_0 \in \Delta_i$ является граничной. Тогда

$$\varphi_i(t) = o(-\log |t - t_0|) \quad \text{при } t \rightarrow t_0, \quad t \in \Delta_i.$$

Доказательство теоремы 2 показывает точность логарифмической оценки в теореме 3.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Xingping Sun, E. W. Cheney, *Aequationes Math.*, **44**:2-3 (1992), 226–235. [2] D. Braess, A. Pinkus, *J. Approx. Theory*, **73**:2 (1993), 218–236. [3] V. E. Maiorov, *J. Approx. Theory*, **99**:1 (1999), 68–94. [4] A. Pinkus, *Indag. Math. (N.S.)*, **24**:4 (2013), 725–738. [5] H. Herrlich, *Axiom of Choice*, Lecture Notes in Math., **1876**, Springer-Verlag, Berlin, 2006. [6] Ф. П. Васильев, *Методы оптимизации*, Факториал Пресс, М., 2002.

С. В. Конягин

Математический институт им. В. А. Стеклова
Российской академии наук
E-mail: konyagin23@gmail.com

Поступило

16.03.2015

Исправленный вариант

22.03.2015

А. А. Кулешов

Математический институт им. В. А. Стеклова
Российской академии наук
E-mail: kuleshov.a.a@yandex.ru