Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. О. Шацков, Осцилляция функции меры иррациональности в многомерном случае, *Матем. заметки*, 2016, том 99, выпуск 1, 102–120

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10789>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 13:31:17

Осцилляция функции меры иррациональности в многомерном случае

Д. О. Шацков

Доказано, что для почти всех пар матриц Θ, Θ' в случаях $m = 1$ и $n = 2$ или $m \geq 2$ и $n = 1$ разность $\psi_\Theta - \psi_{\Theta'}$ осцилирует бесконечное количество раз при $t \rightarrow +\infty$.

Библиография: 4 названия.

DOI: 10.4213/mzm10789

1. Введение. Для матрицы

$$\Theta = \begin{pmatrix} \theta_1^1 & \dots & \theta_1^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta_m^1 & \dots & \theta_m^n \end{pmatrix}$$

рассмотрим функцию меры иррациональности

$$\psi_\Theta(t) = \min_{\substack{x_i \in \mathbb{Z} \\ 1 \leq \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \leq t}} \max_{1 \leq j \leq m} \|\theta_j^1 x_1 + \dots + \theta_j^n x_n\|,$$

где $\|\cdot\|$ обозначает расстояние до ближайшего целого. Для двух матриц Θ и Θ' составим разность $\psi_\Theta(t) - \psi_{\Theta'}(t)$. Нас интересует как ведет себя эта разность при $t \rightarrow +\infty$.

В одномерном случае $\Theta = \alpha$ и функцию ψ_Θ можно записать так

$$\psi_\alpha(t) = \min_{1 \leq q \leq t} \|q\alpha\|.$$

Моцевитин и Кан в совместной работе [1] доказали, что для двух вещественных чисел α и β таких, что $\alpha \pm \beta \notin \mathbb{Z}$ разность

$$\psi_\alpha(t) - \psi_\beta(t)$$

бесконечно много раз меняет знак при $t \rightarrow +\infty$.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант № 14-11-00433).

Известны две теоремы.

ТЕОРЕМА [2] (Хинчин, 1926). Пусть функция $\psi(t)$ убывает к нулю при $t \rightarrow +\infty$. Тогда существуют два алгебраически независимых числа α и β такие, что для достаточно больших t выполняется

$$\psi_{(\alpha \ \beta)}(t) = \min_{1 \leq \max(|x_1|, |x_2|) \leq t} \|x_1\alpha + x_2\beta\| \leq \psi(t).$$

ТЕОРЕМА [2] (Хинчин, 1926). Пусть функция $\psi(t)$ убывает к нулю при $t \rightarrow +\infty$ и функция $t\psi(t)$ бесконечно возрастает при $t \rightarrow +\infty$. Тогда существуют два алгебраически независимых действительных числа α и β таких, что для достаточно больших t выполняется

$$\psi \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} (t) = \min_{1 \leq x \leq t} \max(\|x\alpha\|, \|x\beta\|) \leq \psi(t).$$

Следствием этих двух теорем служит утверждение, что для больших размерностей в общем случае осцилляции нет.

В данной работе будет доказан следующий результат

ТЕОРЕМА. Пусть $m = 1$ и $n = 2$ или $m \geq 2$ и $n = 1$. Тогда для почти всех матриц Θ и Θ' размера $m \times n$ разность

$$\psi_{\Theta}(t) - \psi_{\Theta'}(t)$$

осциллирует бесконечное число раз при $t \rightarrow +\infty$.

2. Изучение функции $\psi_{\Theta}(t)$ в случае $m = 1$ и $n = 2$. Далее в работе $0 < \lambda < \lambda_0$ (λ_0 эффективно вычисляется из лемм 3, 4, 5, 13 и 14), $0 < \varepsilon < 1$ (ε эффективно вычисляется из лемм 3, 4, 5, 12 и 14), $0 < \delta < 1$ (δ эффективно вычисляется из леммы 14) и $k > K_0 = K_0(\lambda)$ (K_0 эффективно вычисляется из лемм 2, 3, 4, 5, 8, 9, 11, 13, 14 и 15).

В случае $m = 1$ и $n = 2$ функция $\psi_{\Theta}(t)$ имеет вид

$$\psi_{(\alpha \ \beta)}(t) = \min_{1 \leq \max(|x_1|, |x_2|) \leq t} \|x_1\alpha + x_2\beta\|.$$

На квадрате $[0; 1]^2$ рассмотрим два множества

$$\begin{aligned} \underline{M}_k &= \left\{ (\alpha, \beta) \in [0; 1]^2 : \psi_{(\alpha \ \beta)}(k) > \frac{\varepsilon}{k^2} \right\} \\ &= \left\{ (\alpha, \beta) \in [0; 1]^2 : \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2 \quad 1 \leq \max(|x_1|, |x_2|) \leq k \quad \|x_1\alpha + x_2\beta\| > \frac{\varepsilon}{k^2} \right\} \\ &= \left\{ (\alpha, \beta) \in [0; 1]^2 : \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2 \right. \\ &\quad \left. 1 \leq \max(|x_1|, |x_2|) \leq k \quad \forall q \in \mathbb{Z} \quad |x_1\alpha + x_2\beta - q| > \frac{\varepsilon}{k^2} \right\}, \\ \overline{M}_k &= \left\{ (\alpha, \beta) \in [0; 1]^2 : \psi_{(\alpha \ \beta)}(k) \leq \frac{\varepsilon}{k^2} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left\{ (\alpha, \beta) \in [0; 1]^2 : \exists (x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2 \quad 1 \leq \max(|x_1|, |x_2|) \leq k \quad \|x_1\alpha + x_2\beta\| \leq \frac{\varepsilon}{k^2} \right\} \\
&= \left\{ (\alpha, \beta) \in [0; 1]^2 : \exists (x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2 \right. \\
&\quad \left. 1 \leq \max(|x_1|, |x_2|) \leq k \quad \exists q \in \mathbb{Z} \quad |x_1\alpha + x_2\beta - q| \leq \frac{\varepsilon}{k^2} \right\}.
\end{aligned}$$

Верно равенство

$$\mu(\underline{M}_k) = 1 - \mu(\overline{M}_k). \quad (2.1)$$

Рассмотрим плоскость $O\alpha\beta$. Для любых целых чисел x_1, x_2 и q зададим множество

$$A(x_1, x_2, q) = \left\{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : |x_1\alpha + x_2\beta - q| \leq \frac{\varepsilon}{k^2} \right\}.$$

Обозначим

$$A(x_1, x_2) = \left\{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : \exists q \in \mathbb{Z} \quad |x_1\alpha + x_2\beta - q| \leq \frac{\varepsilon}{k^2} \right\} = \bigcup_{q \in \mathbb{Z}} A(x_1, x_2, q).$$

Через $S(x_1, x_2, k_1, k_2)$ обозначим прямоугольник со сторонами k_1/x_1 и k_2/x_2 , где $x_1, x_2, k_1, k_2 \in \mathbb{N}_0$. В случае $x_1 = 0$ прямоугольник $S(0, x_2, 0, k_2)$ это прямоугольник со сторонами 1 и k_2/x_2 , в случае $x_2 = 0$ прямоугольник $S(x_1, 0, k_1, 0)$ это прямоугольник со сторонами k_1/x_1 и 1. Выпишем свойства множества $A(x_1, x_2)$:

$$\begin{aligned}
A(x_1, x_2) + \left(\frac{1}{x_1} \mathbb{Z} \right) \times \left(\frac{1}{x_2} \mathbb{Z} \right) &= A(x_1, x_2), \quad A(x_1, x_2) = A(-x_1, -x_2), \\
\mu(A(x_1, x_2) \cap S(x_1, x_2, k_1, k_2)) &= \begin{cases} \frac{2\varepsilon}{k^2} \frac{k_1 k_2}{x_1 x_2}, & x_1, x_2 \neq 0, \\ \frac{2\varepsilon}{k^2} \frac{k_2}{x_2}, & x_1 = 0, \quad x_2 \neq 0, \\ \frac{2\varepsilon}{k^2} \frac{k_1}{x_1}, & x_2 = 0, \quad x_1 \neq 0, \end{cases}
\end{aligned}$$

где $\mu(\cdot)$ – мера Лебега, а знак $\times$ обозначает прямое произведение множеств.

Докажем третье свойство. Пусть $x_1, x_2 \in \mathbb{N}$; для $a, b \in \mathbb{R}$ определим прямоугольник

$$S_{ab} = \left[\frac{a}{x_1}; \frac{a+1}{x_1} \right] \times \left[\frac{b}{x_2}; \frac{b+1}{x_2} \right].$$

Найдем меру пересечения $\mu(A(x_1, x_2) \cap S_{ab})$. Учитывая, что прямоугольник S_{ab} может пересечь не более трех полос вида $A(x_1, x_2, q)$, получим равенство

$$\begin{aligned}
&\mu(A(x_1, x_2) \cap S_{ab}) \\
&= \mu(A(x_1, x_2, q-1) \cap S_{ab}) + \mu(A(x_1, x_2, q) \cap S_{ab}) + \mu(A(x_1, x_2, q+1) \cap S_{ab}) \\
&= \mu\left(A(x_1, x_2, q) \cap S_{(a-1)b}\right) + \mu\left(A(x_1, x_2, q) \cap S_{ab}\right) + \mu\left(A(x_1, x_2, q) \cap S_{(a+1)b}\right) \\
&= \frac{2\varepsilon}{k^2} \frac{1}{x_1 x_2}.
\end{aligned}$$

Прямоугольник $S(x_1, x_2, k_1, k_2)$ состоит из $k_1 k_2$ прямоугольников размера $1/x_1$ на $1/x_2$, поэтому

$$\mu(A(x_1, x_2) \cap S(x_1, x_2, k_1, k_2)) = \frac{2\varepsilon}{k^2} \frac{k_1 k_2}{x_1 x_2}.$$

Для доказательства в случае $x_1 = 0$, надо взять прямоугольник

$$S_{ab} = [0; 1] \times \left[\frac{b}{x_2}; \frac{b+1}{x_2} \right],$$

а в случае $x_2 = 0$ – прямоугольник

$$S_{ab} = \left[\frac{a}{x_1}; \frac{a+1}{x_1} \right] \times [0; 1].$$

Свойство доказано. В частности, если $S(x_1, x_2, k_1, k_2) = [0; 1]^2$, то

$$\mu(A(x_1, x_2) \cap [0; 1]^2) = \frac{2\varepsilon}{k^2}.$$

Для любых двух линейно независимых пар (x_1, x_2) и (y_1, y_2) и любых q_1 и q_2 пересечением множеств $A(x_1, x_2, q_1)$ и $A(y_1, y_2, q_2)$ будет параллелограмм с площадью

$$\mu(A(x_1, x_2, q_1) \cap A(y_1, y_2, q_2)) = \frac{1}{\left| \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} \right|} \frac{4\varepsilon^2}{k^4}. \quad (2.2)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Диаметр этого параллелограмма не более $4\varepsilon/k$.

Обозначим через Λ – решетку, построенную на векторах $(y_2/\Delta, -x_2/\Delta)$ и $(-y_1/\Delta, x_1/\Delta)$, где

$$\Delta = \left| \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} \right|.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Центры параллелограммов, получаемых при переборе всевозможных целочисленных значений q_1, q_2 , лежат в узлах решетки Λ .

Верно равенство

$$\overline{M_k} = \bigcup_{\substack{(x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2 \\ 1 \leq \max(|x_1|, |x_2|) \leq k}} (A(x_1, x_2) \cap [0; 1]^2). \quad (2.3)$$

Для удобства здесь и далее в работе через S будем обозначать параллелепипеды соответствующей размерности со сторонами, параллельными координатным гиперплоскостям.

ТЕОРЕМА ЯРНИКА. Пусть G – выпуклая область на плоскости, N – число целых точек в области G , P – площадь области G , L – периметр области G , $L \geq 1$. Тогда выполнены неравенства

$$P - L < N < L + P.$$

ЛЕММА 1. Пусть S – квадрат со стороной λ ,

$$\Delta = \left| \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} \right|, \quad \Delta \neq 0,$$

$x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{Z}$ и $x_1, x_2, y_1, y_2 > 1/\lambda$, N – число точек решетки Λ в квадрате S . Тогда выполняется неравенство

$$N < \lambda^2 \Delta + 2\lambda \sqrt{x_1^2 + y_1^2} + 2\lambda \sqrt{x_2^2 + y_2^2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подействуем на решетку Λ справа линейным преобразованием

$$T = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix},$$

которое переводит решетку Λ в ортонормированную решетку $\mathbb{Z}^2$. Квадрат S при этом преобразовании перейдет в параллелограмм с площадью $\lambda^2 \Delta$, длины сторон этого параллелограмма будут равны $\lambda \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$ и $\lambda \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$. Применим теорему Ярника и получим неравенство.

Лемма 1 доказана.

Обозначим $E_k = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{N}^2 : (x_1, x_2) = 1, k/2 \leq x_1, x_2 \leq k\}$.

ЛЕММА 2. Пусть

$$\Delta = \left| \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} \right|.$$

Тогда выполняется неравенство

$$\sum_{\substack{(x_1, x_2) \in E_k \\ (y_1, y_2) \in E_k \\ (x_1, x_2) \neq (y_1, y_2)}} \frac{1}{\Delta} \leq 9k^2 \ln k.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим плоскость Oy_1y_2 . Для точки $(x_1, x_2) \in E_k$ построим семейство прямых $x_1y_2 - x_2y_1 = q$, где $q \in \mathbb{Z}$. Уравнение прямой из этого семейства можно переписать в таком виде:

$$\det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} = q.$$

Все точки решетки $\mathbb{Z}^2$ лежат на этих прямых. Расстояние между соседними прямыми из этого семейства равно $1/\sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. Расстояние между соседними целыми точками на каждой прямой из этого семейства равно $\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \geq k/\sqrt{2}$. На каждой прямой будет не более 2 точек $(y_1, y_2) \in E_k$. Так как мы рассматриваем пары $(x_1, x_2) \in E_k$ и $(y_1, y_2) \in E_k$, то $\Delta \leq k^2$. Оценим интересующую нас сумму:

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{(x_1, x_2) \in E_k \\ (y_1, y_2) \in E_k \\ (x_1, x_2) \neq (y_1, y_2)}} \frac{1}{\Delta} &= \sum_{(x_1, x_2) \in E_k} \sum_{n=1}^{k^2} \sum_{\substack{\Delta=n \\ (y_1, y_2) \in E_k}} \frac{1}{\Delta} \leq \sum_{(x_1, x_2) \in E_k} \sum_{n=1}^{k^2} \frac{4}{n} \\ &\leq \sum_{(x_1, x_2) \in E_k} (4 + 8 \ln k) \leq 9k^2 \ln k. \end{aligned}$$

Лемма 2 доказана.

ЛЕММА 3. Для любого квадрата S со стороной λ верны неравенства

$$\lambda^2 \left(\frac{\varepsilon}{3\zeta(2)} - 37 \frac{\varepsilon^2}{\zeta^2(2)} \right) \leq \mu(\overline{M_k} \cap S) \leq 5\varepsilon\lambda^2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого квадрата S и любой пары чисел (x_1, x_2) , если положить $k_1 = [\lambda x_1]$ и $k_2 = [\lambda x_2]$, то можно указать два прямоугольника, центры которых совпадают с центром квадрата S и выполняется условие $S(x_1, x_2, k_1, k_2) \subset S \subset S(x_1, x_2, k_1 + 1, k_2 + 1)$.

Запишем ограничение снизу на меру пересечения $\overline{M_k}$ и S :

$$\mu(\overline{M_k} \cap S) \geq \sum_{(x_1, x_2) \in E_k} \mu(A(x_1, x_2) \cap S) - \sum_{\substack{(x_1, x_2) \in E_k \\ (y_1, y_2) \in E_k \\ (x_1, x_2) \neq (y_1, y_2)}} \mu(A(x_1, x_2) \cap A(y_1, y_2) \cap S). \quad (2.4)$$

Для доказательства этого неравенства воспользуемся формулой (2.3) и формулой включения–исключения

$$\begin{aligned} \mu(\overline{M_k} \cap S) &= \mu \left(\bigcup_{\substack{(x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2 \\ 1 \leq \max(|x_1|, |x_2|) \leq k}} (A(x_1, x_2) \cap S) \right) \geq \mu \left(\bigcup_{(x_1, x_2) \in E_k} (A(x_1, x_2) \cap S) \right) \\ &\geq \sum_{(x_1, x_2) \in E_k} \mu(A(x_1, x_2) \cap S) - \sum_{\substack{(x_1, x_2) \in E_k \\ (y_1, y_2) \in E_k \\ (x_1, x_2) \neq (y_1, y_2)}} \mu(A(x_1, x_2) \cap A(y_1, y_2) \cap S). \end{aligned}$$

Оценим снизу первую сумму из неравенства (2.4):

$$\begin{aligned} &\sum_{(x_1, x_2) \in E_k} \mu(A(x_1, x_2) \cap S) \\ &\geq \sum_{(x_1, x_2) \in E_k} \mu(A(x_1, x_2) \cap S(x_1, x_2, k_1, k_2)) = \frac{2\varepsilon}{k^2} \sum_{(x_1, x_2) \in E_k} \frac{k_1 k_2}{x_1 x_2} \\ &\geq \frac{2\varepsilon}{k^2} \sum_{(x_1, x_2) \in E_k} \frac{(\lambda x_1 - 1)(\lambda x_2 - 1)}{x_1 x_2} = \frac{2\varepsilon}{k^2} \sum_{(x_1, x_2) \in E_k} \left(\lambda^2 - \frac{\lambda}{x_1} - \frac{\lambda}{x_2} + \frac{1}{x_1 x_2} \right) \\ &= \frac{2\varepsilon}{k^2} \left(\lambda^2 \frac{k^2}{4\zeta(2)} + O(k \ln k) \right) = \frac{\lambda^2 \varepsilon}{2\zeta(2)} + O\left(\frac{\ln k}{k}\right) \geq \frac{\lambda^2 \varepsilon}{3\zeta(2)}. \end{aligned}$$

Оценим сверху меру множества $A(x_1, x_2) \cap A(y_1, y_2) \cap S$. Квадрат S и параллелограмм могут пересекаться, если расстояние между их центрами меньше, чем $\lambda/\sqrt{2} + 2\varepsilon/k \leq \lambda$. Если взять квадрат $3S$, у которого центр совпадает с центром квадрата S и сторона равна 3λ , то центры тех параллелограммов, которые задевают квадрат S , будут лежать внутри квадрата $3S$. По лемме 1

$$\#(3S \cap \Lambda) \leq 9\lambda^2 \Delta + 6\lambda \sqrt{x_1^2 + y_1^2} + 6\lambda \sqrt{x_2^2 + y_2^2},$$

где

$$\Delta = \left| \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} \right|.$$

Символ $\#(\cdot)$, здесь и далее, обозначает количество элементов в множестве.

Для ограничения сверху второй суммы из неравенства (2.4) воспользуемся формулой (2.2) и леммой 2:

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{(x_1, x_2) \in E_k \\ (y_1, y_2) \in E_k \\ (x_1, x_2) \neq (y_1, y_2)}} \mu(A(x_1, x_2) \cap A(y_1, y_2) \cap S) &\leq \sum_{\substack{(x_1, x_2) \in E_k \\ (y_1, y_2) \in E_k \\ (x_1, x_2) \neq (y_1, y_2)}} \#(3S \cap \Lambda) \frac{4\varepsilon^2}{\Delta k^4} \\
&\leq \sum_{\substack{(x_1, x_2) \in E_k \\ (y_1, y_2) \in E_k \\ (x_1, x_2) \neq (y_1, y_2)}} \left(9\lambda^2 \Delta + 6\lambda \sqrt{x_1^2 + y_1^2} + 6\lambda \sqrt{x_2^2 + y_2^2} \right) \frac{4\varepsilon^2}{\Delta k^4} \\
&\leq \frac{12\varepsilon^2}{k^4} \sum_{\substack{(x_1, x_2) \in E_k \\ (y_1, y_2) \in E_k \\ (x_1, x_2) \neq (y_1, y_2)}} \left(3\lambda^2 + \lambda \frac{2\sqrt{2}k}{\Delta} + \lambda \frac{2\sqrt{2}k}{\Delta} \right) \\
&= \frac{36\lambda^2 \varepsilon^2}{k^4} \sum_{\substack{(x_1, x_2) \in E_k \\ (y_1, y_2) \in E_k \\ (x_1, x_2) \neq (y_1, y_2)}} 1 + \frac{48\sqrt{2} \lambda \varepsilon^2}{k^3} \sum_{\substack{(x_1, x_2) \in E_k \\ (y_1, y_2) \in E_k \\ (x_1, x_2) \neq (y_1, y_2)}} \frac{1}{\Delta} \\
&\leq \frac{36\lambda^2 \varepsilon^2}{k^4} \sum_{\substack{(x_1, x_2) \in E_k \\ (y_1, y_2) \in E_k}} 1 + \frac{432\sqrt{2} \lambda \varepsilon^2 \ln k}{k} \leq \frac{37\lambda^2 \varepsilon^2}{\zeta^2(2)}.
\end{aligned}$$

Ограничение снизу для $\mu(\overline{M}_k \cap S)$ доказано.

Обозначим

$$E_k^* = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2 : 1 \leq x_1 \leq k, 1 \leq |x_2| \leq k\}$$

и $S^* = S(x_1, x_2, k_1 + 1, k_2 + 1)$.

Воспользуемся формулой (2.3), свойством $A(x_1, x_2) = A(-x_1, -x_2)$ и получим ограничение сверху на $\mu(\overline{M}_k \cap S)$:

$$\begin{aligned}
\mu(\overline{M}_k \cap S) &= \mu \left(\bigcup_{\substack{(x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2 \\ 1 \leq \max(|x_1|, |x_2|) \leq k}} (A(x_1, x_2) \cap S) \right) \\
&\leq \mu \left(\bigcup_{\substack{x_1=0 \\ 1 \leq x_2 \leq k}} (A(x_1, x_2) \cap S) \right) + \mu \left(\bigcup_{\substack{x_2=0 \\ 1 \leq x_1 \leq k}} (A(x_1, x_2) \cap S) \right) \\
&\quad + \mu \left(\bigcup_{(x_1, x_2) \in E_k^*} (A(x_1, x_2) \cap S) \right) \\
&\leq 2 \sum_{\substack{x_1=0 \\ 1 \leq x_2 \leq k}} \mu(A(x_1, x_2) \cap S^*) + \sum_{(x_1, x_2) \in E_k^*} \mu(A(x_1, x_2) \cap S^*) \\
&= \frac{4\varepsilon}{k^2} \sum_{x_2=1}^k \frac{k_2 + 1}{x_2} + \frac{2\varepsilon}{k^2} \sum_{(x_1, x_2) \in E_k^*} \frac{(k_1 + 1)(k_2 + 1)}{x_1 x_2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{4\varepsilon}{k^2} \sum_{x_2=1}^k \frac{\lambda x_2 + 1}{x_2} + \frac{2\varepsilon}{k^2} \sum_{(x_1, x_2) \in E_k^*} \frac{(\lambda x_1 + 1)(\lambda x_2 + 1)}{x_1 x_2} \\
&= \frac{4\varepsilon}{k^2} \sum_{x_2=1}^k \left(\lambda + \frac{1}{x_2} \right) + \frac{2\varepsilon}{k^2} \sum_{(x_1, x_2) \in E_k^*} \left(\lambda^2 + \frac{\lambda}{x_1} + \frac{\lambda}{x_2} + \frac{1}{x_1 x_2} \right) \\
&= \frac{2\varepsilon}{k^2} (2\lambda^2 k^2 + O(k \ln k)) = 4\varepsilon \lambda^2 + O\left(\frac{\ln k}{k}\right) \leq 5\varepsilon \lambda^2.
\end{aligned}$$

Лемма 3 доказана.

ЛЕММА 4. Для любого квадрата S со стороной λ верно неравенство

$$\lambda^2 - 5\lambda^2 \varepsilon \leq \mu(S \cap \underline{M}_k).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся равенством (2.1) и леммой 3

$$\mu(S \cap \underline{M}_k) = \mu(S) - \mu(S \cap \overline{M}_k) \geq \lambda^2 - 5\varepsilon \lambda^2.$$

Лемма 4 доказана.

3. Изучение функции $\psi_\Theta(t)$ в случае $m \geq 2$ и $n = 1$. В этом случае функция $\psi_\Theta(t)$ имеет вид

$$\psi \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} (t) = \min_{1 \leq x \leq t} \max_{j=1, \dots, m} \|x \alpha_j\|.$$

На кубе $[0; 1]^m$ рассмотрим два множества:

$$\begin{aligned}
\underline{M}_k &= \left\{ (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in [0; 1]^m : \psi \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} (k) > \frac{\varepsilon}{\sqrt[m]{k}} \right\} \\
&= \left\{ (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in [0; 1]^m : \forall q \in [1; k] \quad \max_{1 \leq i \leq m} \{\|\alpha_i q\|\} > \frac{\varepsilon}{\sqrt[m]{k}} \right\} \\
&= \left\{ (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in [0; 1]^m : \forall q \in [1; k] \exists (p_1, \dots, p_m) \in \mathbb{Z}^m \quad \max_{1 \leq i \leq m} \{|\alpha_i q - p_i|\} > \frac{\varepsilon}{\sqrt[m]{k}} \right\} \\
&= \left\{ (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in [0; 1]^m : \forall q \in [1; k] \exists (p_1, \dots, p_m) \in \mathbb{Z}^m \quad \max_{1 \leq i \leq m} \left\{ \left| \alpha_i - \frac{p_i}{q} \right| \right\} > \frac{\varepsilon}{q \sqrt[m]{k}} \right\}; \\
\overline{M}_k &= \left\{ (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in [0; 1]^m : \psi \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} (k) \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt[m]{k}} \right\} \\
&= \left\{ (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in [0; 1]^m : \exists q \in [1; k] \quad \max_{1 \leq i \leq m} \{\|\alpha_i q\|\} \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt[m]{k}} \right\} \\
&= \left\{ (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in [0; 1]^m : \exists q \in [1; k] \forall (p_1, \dots, p_m) \in \mathbb{Z}^m \quad \max_{1 \leq i \leq m} \{|\alpha_i q - p_i|\} \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt[m]{k}} \right\} \\
&= \left\{ (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in [0; 1]^m : \exists q \in [1; k] \forall (p_1, \dots, p_m) \in \mathbb{Z}^m \quad \max_{1 \leq i \leq m} \left\{ \left| \alpha_i - \frac{p_i}{q} \right| \right\} \leq \frac{\varepsilon}{q \sqrt[m]{k}} \right\}.
\end{aligned}$$

Верно равенство

$$\mu(\underline{M}_k) = 1 - \mu(\overline{M}_k). \quad (3.1)$$

Для числа q определим множество $A(q)$, как объединение кубов с центрами в точках $(p_1/q, p_2/q, \dots, p_m/q)$ при $p_i = 0, 1, \dots, q$ и со стороной $2\varepsilon/(q\sqrt[m]{k})$.

Верно равенство

$$\overline{M_k} = \bigcup_{q=1}^k (A(q) \cap [0, 1]^m). \quad (3.2)$$

Символ $\lceil \cdot \rceil$ обозначает целую часть сверху.

ЛЕММА 5. Для любого куба S со стороной λ выполняется неравенство

$$\lambda^m - 2(4\lambda\varepsilon)^m \leq \mu(S \cap \overline{M_k}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проекция множества $A(q)$ на каждую координатную ось это объединение отрезков вида

$$\left[\frac{p}{q} - \frac{\varepsilon}{q\sqrt[m]{k}}, \frac{p}{q} + \frac{\varepsilon}{q\sqrt[m]{k}} \right] \quad \text{при } p = 0, 1, \dots, q.$$

Очевидно отрезок длины λ заденет не более

$$\left\lceil \left(\lambda + \frac{2\varepsilon}{q\sqrt[m]{k}} \right) : \frac{1}{q} \right\rceil \leq \left(\lambda + \frac{2\varepsilon}{q\sqrt[m]{k}} \right) q + 1 \leq \lambda q + 2$$

отрезков из проекции множества $A(q)$ по каждой оси. Получаем неравенство

$$\mu(S \cap A(q)) \leq (\lambda q + 2)^m \frac{(2\varepsilon)^m}{kq^m}.$$

Применим формулу (3.2) и найдем ограничение сверху на меру пересечения:

$$\begin{aligned} \mu(S \cap \overline{M_k}) &= \mu\left(\bigcup_{q=1}^k (S \cap A(q))\right) \leq \sum_{q=1}^k \mu(S \cap A(q)) \leq \sum_{q=1}^k (\lambda q + 2)^m \frac{(2\varepsilon)^m}{kq^m} \\ &\leq \sum_{q=1}^k ((2\lambda q)^m + 4^m) \frac{(2\varepsilon)^m}{kq^m} = \frac{(4\lambda\varepsilon)^m}{k} \sum_{q=1}^k 1 + \frac{8^m \varepsilon^m}{k} \sum_{q=1}^k \frac{1}{q^m} \\ &\leq (4\lambda\varepsilon)^m + \frac{8^m \varepsilon^m}{k} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q^2} \leq 2(4\lambda\varepsilon)^m. \end{aligned}$$

Применим полученное неравенство и формулу (3.1):

$$\mu(S \cap \overline{M_k}) = \mu(S) - \mu(S \cap \overline{M_k}) \geq \lambda^m - 2(4\lambda\varepsilon)^m.$$

Лемма 5 доказана.

ЛЕММА 6. Для $m \geq 2$ верно неравенство

$$\sum_{\lceil k/2 \rceil \leq q_1 < q_2 \leq k} \frac{(q_1, q_2)^m}{q_2^m} \leq \frac{2k}{5}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $(q_1, q_2) = d$, $q_1 = dl$ ($l \geq \lceil k/(2d) \rceil$) и $q_2 = dp$ ($p \geq l + 1 \geq \lceil k/(2d) \rceil + 1$) с условием $(l, p) = 1$. Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{\lceil k/2 \rceil \leq q_1 < q_2 \leq k} \frac{(q_1, q_2)^m}{q_2^m} &= \sum_{q_2 = \lceil k/2 \rceil + 1}^k \sum_{q_1 = \lceil k/2 \rceil}^{q_2 - 1} \frac{(q_1, q_2)^m}{q_2^m} = \sum_{d=1}^{\lceil k/2 \rceil} \sum_{p = \lceil k/(2d) \rceil + 1}^{\lceil k/d \rceil} \sum_{\substack{l = \lceil k/(2d) \rceil \\ (l, p) = 1}}^{p-1} \frac{1}{p^m} \\ &\leq \sum_{d=1}^{\lceil k/2 \rceil} \sum_{p = \lceil k/(2d) \rceil + 1}^{\lceil k/d \rceil} \sum_{\substack{l=1 \\ (l, p)=1}}^{p-1} \frac{1}{p^m} = \sum_{d=1}^{\lceil k/2 \rceil} \sum_{p = \lceil k/(2d) \rceil + 1}^{\lceil k/d \rceil} \frac{\varphi(p)}{p^m} \leq \sum_{p=2}^k \sum_{d=1}^{\lceil k/p \rceil} \frac{\varphi(p)}{p^m} = \sum_{p=2}^k \left\lfloor \frac{k}{p} \right\rfloor \frac{\varphi(p)}{p^m} \\ &\leq k \sum_{p=2}^k \frac{\varphi(p)}{p^{m+1}} \leq k \left(\sum_{p=1}^{\infty} \frac{\varphi(p)}{p^{m+1}} - 1 \right) = k \left(\frac{\zeta(m)}{\zeta(m+1)} - 1 \right) \leq k \left(\frac{\zeta(2)}{\zeta(3)} - 1 \right) \leq \frac{2k}{5}. \end{aligned}$$

Доказательство равенства

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{\varphi(p)}{p^m} = \frac{\zeta(m-1)}{\zeta(m)}$$

можно найти в [3] на с. 250.

Лемма 6 доказана.

ЛЕММА 7. Пусть W – выпуклая область на плоскости, N – число целых точек в области W . Если найдутся 3 целые точки внутри области, не лежащие на одной прямой, то

$$N \leq 2\mu(W) + 2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим все целые точки, лежащие в области W ; для них построим выпуклую оболочку. Получим выпуклый многоугольник. Применяя формулу Пика, получим неравенство

$$B + \frac{\Gamma}{2} - 1 \leq \mu(W),$$

где B есть количество целочисленных точек внутри многоугольника, а Γ – количество точек на границе многоугольника. Из соотношения $N = B + \Gamma$ получаем

$$N - 2 \leq 2\mu(W).$$

Лемма 7 доказана.

Рассмотрим плоскость Op_1p_2 . Для пары $(q_1, q_2) \in \mathbb{N}^2$ и числа $\delta > 0$ введем обозначения:

- C – прямоугольник со сторонами $(1 + \delta)\lambda q_1$ и $(1 + \delta)\lambda q_2$, параллельными осям;
- $C_0 = \left[0, \frac{(1 + \delta)}{2} \lambda q_1 \right] \times \left[0, \frac{(1 + \delta)}{2} \lambda q_2 \right]$;
- $D = \left\{ (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2 : |q_2 p_1 - q_1 p_2| \leq d \left[\frac{\varepsilon(q_1 + q_2)}{d \sqrt[m]{k}} \right] \right\}$,
где d – наибольший общий делитель чисел q_1 и q_2 .
- l_q – прямая $q_2 p_1 - q_1 p_2 = q$.

Запишем несколько свойств прямых вида l_q :

- расстояние между двумя соседними прямыми вида l_q равно $1/\sqrt{q_1^2 + q_2^2}$;
- все целые точки $(p_1, p_2) \in \mathbb{Z}^2$ лежат на прямых вида l_q ; расстояние между двумя соседними точками на одной прямой равно $\sqrt{q_1^2 + q_2^2}$.

Запишем некоторые свойства области D :

- количество прямых l_q в области D равно $2d[\varepsilon(q_1 + q_2)/d \sqrt[m]{k}] + 1$;
- ширина полосы D равна

$$h = 2 \left\lceil \frac{\varepsilon(q_1 + q_2)}{d \sqrt[m]{k}} \right\rceil \frac{d}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2}} \leq \frac{2\sqrt{2}\varepsilon}{\sqrt[m]{k}};$$

- если $d > 2\varepsilon k^{1-1/m}$, то $D = l_0$.

Определим множества:

$$\text{Tr}_k = \left\{ (q_1, q_2) \in \mathbb{Z}^2 : \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil \leq q_1 < q_2 \leq k \right\},$$

$$J = \{(q_1, q_2) \in \text{Tr}_k : \exists C = C_1 \# (D \cap C_1 \cap \mathbb{Z}^2) \geq N_0\}, \quad N_0 = 8(1 + \delta)\varepsilon\lambda k^{1-1/m} + 6,$$

$$J_0 = \{(q_1, q_2) \in \text{Tr}_k : (q_1, q_2) = d > d_0\}, \quad d_0 = 9\varepsilon k^{1-1/m},$$

$$J_1 = \left\{ (q_1, q_2) \in \text{Tr}_k : \#(D \cap C_0 \cap \mathbb{Z}^2) \geq \frac{N_0}{2} \right\},$$

$$\text{Pr}_k = \left\{ (p_1, p_2) \in \left[0, \frac{\sqrt[m]{k}}{4\varepsilon}\right]^2 \cap \mathbb{N}^2 : (p_1, p_2) = 1, 1 \leq \frac{p_2}{p_1} \leq 2 \right\}.$$

ЛЕММА 8. Для каждой пары $(q_1, q_2) \in J$ все целые точки в $D \cap C_1$ лежат на одной прямой l с шагом γ , где

$$1 \leq \gamma \leq \frac{\sqrt[m]{k}}{4\varepsilon}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Область $D \cap C_1$ можно вложить в параллелограмм с высотой h и стороной $\sqrt{2}(1 + \delta)\lambda k$. Таким образом, мера $\mu(D \cap C_1) \leq 4(1 + \delta)\varepsilon\lambda k^{1-1/m}$.

Пусть точки не лежат на одной прямой. Тогда по лемме 7 количество целых точек N в области $\mu(D \cap C_1)$ будет

$$N \leq 2\mu(D \cap C_1) + 2 \leq 8(1 + \delta)\varepsilon\lambda k^{1-1/m} + 2;$$

получаем противоречие с тем, что $(q_1, q_2) \in J$.

Максимальный отрезок в $D \cap C_1$ это диагональ прямоугольника C_1 . Длина диагонали равна $\sqrt{2}(1 + \delta)\lambda k$, минимальное количество точек на отрезке такой длины должно быть не менее N_0 , поэтому шаг γ не может превышать величины

$$\frac{\sqrt{2}(1 + \delta)\lambda k}{N_0 - 1} \leq \frac{\sqrt{2}(1 + \delta)\lambda k}{N_0 - 6} = \frac{\sqrt{2} \sqrt[m]{k}}{8\varepsilon} \leq \frac{\sqrt[m]{k}}{4\varepsilon}.$$

Лемма 8 доказана.

ЛЕММА 9. Пусть l – прямая из леммы 8, γ – расстояние между двумя соседними целыми точками на этой прямой, ω – угол между прямыми l и l_0 . Тогда

$$\sin \omega \leq \frac{1}{2k\lambda\gamma}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим число $a = d[\varepsilon(q_1 + q_2)/d \sqrt[m]{k}]$. Построим прямоугольный треугольник $A_1A_2A_3$ с гипотенузой A_1A_2 , где

$$A_1 = l \cap l_a, \quad A_2 = l \cap l_{-a}, \quad A_3 \in l_a, \quad A_1A_3 \perp l.$$

Длины сторон $|A_1A_2| \geq (N_0 - 1)\gamma$ и $|A_1A_3| = h$. Оценим синус угла между прямыми l и l_0 :

$$\sin \omega = \frac{|A_1A_3|}{|A_1A_2|} \leq \frac{h}{(N_0 - 1)\gamma} \leq \frac{2\sqrt{2}\varepsilon}{\sqrt[m]{k}(N_0 - 6)\gamma} \leq \frac{1}{2k\lambda\gamma}.$$

Если $D = l_0$, то $l = l_0$ и $\sin \omega = 0$.

Лемма 9 доказана.

ЛЕММА 10. Если $(q_1, q_2) \in J$, то

$$\#(D \cap C_0 \cap \mathbb{Z}^2) \geq \frac{N_0}{2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $(q_1, q_2) \in J$. Тогда существует квадрат C_1 такой, что в области $D \cap C_1$ будет лежать $N \geq N_0$ целых точек. Из всех целых точек в $D \cap C_1$ выделим две точки p_s и p_d – самая левая и самая правая соответственно по оси Op_1 . Возьмем точку $p_c = (p_s + p_d)/2$. Рассмотрим 2 случая.

Первый случай. Если N нечетное, то p_c – целая точка. Обозначим через ϕ сдвиг на вектор $-\mathbf{p}_c$, где вектор $\mathbf{p}_c$ – радиус-вектор точки p_c .

Точки $\phi(p_c) = (0, 0) \in D \cap C_0$ и $\phi(p_d) \in D \cap C_0$, а значит и образы всех целых точек между p_c и p_d тоже лежат в области $D \cap C_0$. Количество целых точек в области $D \cap C_0$ будет

$$\#(D \cap C_0 \cap \mathbb{Z}^2) \geq \frac{N+1}{2} \geq \frac{N_0+1}{2} > \frac{N_0}{2}.$$

Второй случай. Если N четное, то точка p_c лежит посередине двух целых точек с прямой l , возьмем правую точку, обозначим ее p_{cd} . Сделаем сдвиг на вектор $-\mathbf{p}_{cd}$, где вектор $\mathbf{p}_{cd}$ – радиус-вектор точки p_{cd} . Точки $\phi(p_{cd}) = (0, 0) \in D \cap C_0$ и $\phi(p_d) \in D \cap C_0$, а значит, и образы всех целых точек между p_{cd} и p_d тоже лежат в области $D \cap C_0$.

Количество целых точек в области $D \cap C_0$ будет

$$\#(D \cap C_0 \cap \mathbb{Z}^2) \geq \frac{N}{2} \geq \frac{N_0}{2}.$$

Лемма 10 доказана.

ЛЕММА 11. Для любого $(q_1, q_2) \in \text{Tr}_k$ выполняется неравенство

$$\#(D \cap C \cap \mathbb{Z}^2) \leq \left((32\varepsilon\lambda k^{1-1/m})^m + \left(\frac{16\varepsilon k^{1-1/m}}{d} \right)^m + (8\lambda d)^m + 4^m \right)^{1/m}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Количество прямых l_q в области D , на которых лежат целые точки, равно

$$2 \left\lceil \frac{\varepsilon}{d \sqrt[m]{k}} (q_1 + q_2) \right\rceil + 1 \leq \frac{4\varepsilon k^{1-1/m}}{d} + 1.$$

Количество точек на каждой прямой не превосходит количества точек на диагонали прямоугольника C . На каждой прямой расстояние между точками $\sqrt{q_1^2 + q_2^2}/d$. Длина диагонали

$$\sqrt{((1+\delta)\lambda q_1)^2 + ((1+\delta)\lambda q_2)^2} = (1+\delta)\lambda\sqrt{q_1^2 + q_2^2}.$$

Значит наибольшее количество точек на каждой прямой не превосходит величины

$$\frac{(1+\delta)\lambda\sqrt{q_1^2 + q_2^2}}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2}/d} + 1 = (1+\delta)\lambda d + 1. \quad (3.3)$$

Таким образом все количество целых точек в области $D \cap C$ оценим так:

$$\begin{aligned} \#(D \cap C \cap \mathbb{Z}^2) &\leq \left(\frac{4\varepsilon k^{1-1/m}}{d} + 1 \right) (2\lambda d + 1) = \left(\left(\frac{4\varepsilon k^{1-1/m}}{d} + 1 \right)^m (2\lambda d + 1)^m \right)^{1/m} \\ &\leq \left(\left(\left(\frac{8\varepsilon k^{1-1/m}}{d} \right)^m + 2^m \right) ((4\lambda d)^m + 2^m) \right)^{1/m} \\ &= \left(\left(32\varepsilon \lambda k^{1-1/m} \right)^m + \left(\frac{16\varepsilon k^{1-1/m}}{d} \right)^m + (8\lambda d)^m + 4^m \right)^{1/m}. \end{aligned}$$

Лемма 11 доказана.

Вокруг каждой точки $(p_1, p_2) \in \text{Pr}_k$ построим сектор $V(p_1, p_2)$ с углом ϕ , для которого верно неравенство $\sin \phi = 1/(k\lambda\gamma)$, где $\gamma = \sqrt{p_1^2 + p_2^2}$ и точка (p_1, p_2) лежит на биссектрисе угла ϕ . Под сектором будем понимать область между двумя прямыми вида $y = k_1x$ и $y = k_2x$. Объединение всех получившихся секторов обозначим через V .

ЛЕММА 12. *Верны включения $J_0 \subset J \subset J_1 \subset (V \cap \text{Tr}_k)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем включение $J_0 \subset J$. Если пара $(q_1, q_2) \in J_0$, то $D = l_0$. Возьмем прямоугольник $C = [0, (1+\delta)\lambda q_1] \times [0, (1+\delta)\lambda q_2]$. Оценим количество целых точек в $D \cap C$:

$$\begin{aligned} \#(D \cap C \cap \mathbb{Z}^2) &= \#(l_0 \cap C \cap \mathbb{Z}^2) = \left\lceil \frac{(1+\delta)\lambda\sqrt{q_1^2 + q_2^2}}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2}/d} \right\rceil + 1 > \frac{(1+\delta)\lambda\sqrt{q_1^2 + q_2^2}}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2}/d} \\ &= (1+\delta)\lambda d > 9(1+\delta)\varepsilon \lambda k^{1-1/m} > 8(1+\delta)\varepsilon \lambda k^{1-1/m} + 6. \end{aligned}$$

Включение $J_0 \subset J$ доказано.

Включение $J \subset J_1$ доказано в лемме 10.

Если $(q_1, q_2) \in J_1$, то в области $D \cap C_0$ все целые точки лежат на одной прямой l , так как $\mu(D \cap C_0) \leq 2(1+\delta)\varepsilon \lambda k^{1-1/m}$.

Пусть точки не лежат на одной прямой; тогда по лемме 7 количество целых точек в области $\mu(D \cap C_0)$ будет

$$2\mu(D \cap C_0) + 2 \leq 4(1+\delta)\varepsilon \lambda k^{1-1/m} + 2 < \frac{N_0}{2};$$

получаем противоречие с тем, что $(q_1, q_2) \in J_1$. Прямые l и l_0 пересекаются в начале координат и синус угла между прямыми l и l_0 не превосходит величины $1/(2k\lambda\gamma)$.

Для доказательства этого факта надо повторить рассуждения, аналогичные рассуждениям в лемме 9.

Докажем включение $J_1 \subset (V \cap \text{Tr}_k)$.

Если точка $(q_1, q_2) \notin V$, то $(q_1, q_2) \notin J_1$, потому как синус угла между прямой l_0 и любым радиус-вектором (p_1, p_2) , где $(p_1, p_2) \in \text{Pr}_k$, больше чем

$$\sin \frac{\phi}{2} > \frac{\sin \phi}{2} = \frac{1}{2k\lambda\gamma},$$

что противоречит тому, что синус угла между прямыми l и l_0 не превосходит величины $1/(2k\lambda\gamma)$.

Лемма 12 доказана.

ЛЕММА 13. *Количество пар $(q_1, q_2) \in J$ не более $2k^{1+3/2m}/(\lambda\varepsilon^2)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценим сколько точек $(q_1, q_2) \in \text{Tr}_k$ попадают в каждый сектор $V(p_1, p_2)$. Возможны 2 случая.

Первый случай. Все целые точки лежат на прямой l_0 ; тогда их количество не больше чем $\sqrt{2}k/\gamma + 1$.

Второй случай. Для области $V(p_1, p_2) \cap [1, k]^2$ выполняются условия леммы 7 тогда количество точек не больше, чем

$$2\mu(V(p_1, p_2) \cap [1, k]^2) + 2 \leq 2 \cdot \frac{1}{2}(\sqrt{2}k)^2 \sin \phi + 2 \leq \frac{2k}{\lambda\gamma} + 2.$$

Оценим общее количество точек

$$\begin{aligned} \#J &\leq \#(V \cap \text{Tr}_k) = \# \left(\bigcup_{(p_1, p_2) \in \text{Pr}_k} (V(p_1, p_2) \cap \text{Tr}_k) \right) \leq \sum_{(p_1, p_2) \in \text{Pr}_k} \#(V(p_1, p_2) \cap \text{Tr}_k) \\ &\leq \sum_{(p_1, p_2) \in \text{Pr}_k} \left(\frac{\sqrt{2}k}{\gamma} + 1 + \frac{2k}{\lambda\gamma} + 2 \right) \leq \sum_{(p_1, p_2) \in \text{Pr}_k} \left(\frac{2k}{\lambda\gamma} + \frac{2k}{\lambda\gamma} + 3 \right) \\ &\leq \sum_{(p_1, p_2) \in \text{Pr}_k} \frac{4k}{\lambda\gamma} + \frac{3k^{2/m}}{16\varepsilon^2} = \sum_{\substack{(p_1, p_2) \in \text{Pr} \\ 1 \leq \gamma \leq \frac{2m\sqrt{k}}{(4\varepsilon)}}} \frac{4k}{\lambda\gamma} + \sum_{\substack{(p_1, p_2) \in \text{Pr}_k \\ \frac{2m\sqrt{k}}{(4\varepsilon)} < \gamma \leq \frac{m\sqrt{k}}{(4\varepsilon)}}} \frac{4k}{\lambda\gamma} + \frac{3k^{2/m}}{16\varepsilon^2} \\ &\leq \sum_{\substack{(p_1, p_2) \in \text{Pr} \\ 1 \leq \gamma \leq \frac{2m\sqrt{k}}{(4\varepsilon)}}} \frac{4k}{\lambda} + \sum_{\substack{(p_1, p_2) \in \text{Pr} \\ \frac{2m\sqrt{k}}{(4\varepsilon)} < \gamma \leq \frac{m\sqrt{k}}{(4\varepsilon)}}} \frac{16k\varepsilon}{\lambda \frac{2m\sqrt{k}}{(4\varepsilon)}} + \frac{3k^{2/m}}{16\varepsilon^2} \\ &\leq \frac{4k}{\lambda} \frac{k^{1/m}}{16\varepsilon^2} + \frac{16k\varepsilon}{\lambda \frac{2m\sqrt{k}}{(4\varepsilon)}} \frac{k^{2/m}}{16\varepsilon^2} + \frac{3k^{2/m}}{16\varepsilon^2} = \frac{k^{1+1/m}}{4\lambda\varepsilon^2} + \frac{k^{1+3/(2m)}}{\lambda\varepsilon} + \frac{3k^{2/m}}{16\varepsilon^2} \leq \frac{2k^{1+3/(2m)}}{\lambda\varepsilon^2}. \end{aligned}$$

Лемма 13 доказана.

ЛЕММА 14. *Для любого куба S со стороной λ выполняется неравенство*

$$\frac{(2\lambda\varepsilon)^m}{6} - \frac{(68\lambda\varepsilon^2)^m}{4} \leq \mu(S \cap \overline{M_k}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ограничение снизу на меру пересечения множества $\overline{M_k}$ с кубом S записывается неравенством

$$\mu(S \cap \overline{M_k}) \geq \sum_{q=\lceil k/2 \rceil}^k \mu(S \cap A(q)) - \sum_{\lceil k/2 \rceil \leq q_1 < q_2 \leq k} \mu(S \cap A(q_1) \cap A(q_2)). \quad (3.4)$$

Применим формулу (3.2) и докажем это неравенство:

$$\begin{aligned} \mu(S \cap \overline{M_k}) &= \mu\left(\bigcup_{q=\lceil k/2 \rceil}^k (S \cap A(q))\right) \geq \mu\left(\bigcup_{q=\lceil k/2 \rceil}^k (S \cap A(q))\right) \\ &\geq \sum_{q=\lceil k/2 \rceil}^k \mu(S \cap A(q)) - \sum_{\lceil k/2 \rceil \leq q_1 < q_2 \leq k} \mu((S \cap A(q_1)) \cap (S \cap A(q_2))) \\ &= \sum_{q=\lceil k/2 \rceil}^k \mu\left(S \cap A(q)\right) - \sum_{\lceil k/2 \rceil \leq q_1 < q_2 \leq k} \mu(S \cap A(q_1) \cap A(q_2)). \end{aligned}$$

Первую сумму из (3.4) снизу можно оценить таким образом:

$$\sum_{q=\lceil k/2 \rceil}^k \mu(S \cap A(q)) \geq \frac{(1-\delta)^m (2\lambda\varepsilon)^m}{2}. \quad (3.5)$$

Докажем это неравенство. Проекция множества $A(q)$ на каждую координатную ось это объединение отрезков вида

$$\left[\frac{p}{q} - \frac{\varepsilon}{q \sqrt[m]{k}}, \frac{p}{q} + \frac{\varepsilon}{q \sqrt[m]{k}} \right] \quad \text{при } p = 0, 1, \dots, q.$$

Минимальное количество проекций множества $A(q)$, которые полностью попадут в отрезок длины λ , равно

$$\left[\left(\lambda - \frac{2\varepsilon}{\sqrt[m]{k}q} \right) : \frac{1}{q} \right] \geq \lambda q - \frac{2\varepsilon}{\sqrt[m]{k}} - 1 > \lambda q - 2.$$

Получаем неравенство

$$\begin{aligned} \sum_{q=\lceil k/2 \rceil}^k \mu(S \cap A(q)) &\geq \sum_{q=\lceil k/2 \rceil}^k (\lambda q - 2)^m \frac{2^m \varepsilon^m}{k q^m} \geq \sum_{q=\lceil k/2 \rceil}^k ((1-\delta)\lambda q)^m \frac{2^m \varepsilon^m}{k q^m} \\ &= \sum_{q=\lceil k/2 \rceil}^k \frac{(1-\delta)^m (2\lambda\varepsilon)^m}{k} \geq \frac{(1-\delta)^m (2\lambda\varepsilon)^m}{2}. \end{aligned}$$

В сумме $\sum_{\lceil k/2 \rceil \leq q_1 < q_2 \leq k} \mu(S \cap A(q_1) \cap A(q_2))$ найдем ограничение сверху на каждое слагаемое. Сначала найдем ограничение на количество пересечений. Выпишем условия на попарное пересечение множеств. Рассмотрим проекцию на первую ось.

Проекции множеств $A(q_1)$ и S пересекаются, если

$$\alpha_1 - \frac{\varepsilon}{\sqrt[m]{k}q_1} \leq \frac{p_1}{q_1} < \alpha_1 + \lambda + \frac{\varepsilon}{\sqrt[m]{k}q_1}.$$

Проекции множеств $A(q_2)$ и S пересекаются, если

$$\alpha_1 - \frac{\varepsilon}{\sqrt[m]{k} q_2} \leq \frac{p_2}{q_2} < \alpha_1 + \lambda + \frac{\varepsilon}{\sqrt[m]{k} q_2}.$$

Проекции множеств $A(q_1)$ и $A(q_2)$ пересекаются, если существуют p_1 и p_2 , такие что

$$\left| \frac{p_1}{q_1} - \frac{p_2}{q_2} \right| < \frac{\varepsilon}{\sqrt[m]{k}} \left(\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} \right).$$

Если пара (p_1, p_2) удовлетворяет всем трем неравенствам, то проекции множеств S , $A(q_1)$ и $A(q_2)$ пересекаются. Перепишем эти неравенства по-другому:

$$\begin{cases} 0 \leq p_1 - \alpha_1 q_1 + \frac{\varepsilon}{\sqrt[m]{k}} < \lambda q_1 + \frac{2\varepsilon}{\sqrt[m]{k}}, \\ 0 \leq p_2 - \alpha_1 q_2 + \frac{\varepsilon}{\sqrt[m]{k}} < \lambda q_2 + \frac{2\varepsilon}{\sqrt[m]{k}}, \\ |p_1 q_2 - p_2 q_1| < \frac{\varepsilon}{\sqrt[m]{k}} (q_1 + q_2). \end{cases}$$

Рассмотрим плоскость $Op_1 p_2$. Первые два неравенства задают прямоугольник со сторонами $\lambda q_1 + 2\varepsilon/\sqrt[m]{k}$ и $\lambda q_2 + 2\varepsilon/\sqrt[m]{k}$, который содержится в прямоугольнике C . Третье неравенство задает прямые вида $p_1 q_2 - p_2 q_1 = q$, где

$$q = 0, \pm d, \dots, \pm d \left\lceil \frac{\varepsilon}{(d \sqrt[m]{k})(q_1 + q_2)} \right\rceil,$$

т.е. в точности прямые из области D . Отсюда следует, что количество решений системы будет не более, чем $\#(D \cap C \cap \mathbb{Z}^2)$.

Все множество пар (q_1, q_2) разобьем на три случая:

- пара $(q_1, q_2) \in J_0$; тогда $D = l_0$ и по формуле (3.3)

$$\#(D \cap C \cap \mathbb{Z}^2) \leq (1 + \delta) \lambda d + 1;$$

- пара $(q_1, q_2) \in J \setminus J_0$; воспользуемся оценкой из леммы 11

$$\#(D \cap C \cap \mathbb{Z}^2) \leq \left((32\varepsilon \lambda k^{1-1/m})^m + \left(\frac{16\varepsilon k^{1-1/m}}{d} \right)^m + (8\lambda d)^m + 4^m \right)^{1/m};$$

- пара $(q_1, q_2) \in \text{Tr}_k \setminus J$; тогда

$$\#(D \cap C \cap \mathbb{Z}^2) < N_0 = 8(1 + \delta) \varepsilon \lambda k^{1-1/m} + 6 \leq 17\varepsilon \lambda k^{1-1/m}.$$

Сумму можно записать

$$\sum_{[k/2] \leq q_1 < q_2 \leq k} \mu(S \cap A(q_1) \cap A(q_2)) = \left(\sum_{J_0} + \sum_{J \setminus J_0} + \sum_{\text{Tr}_k \setminus J} \right) \mu(S \cap A(q_1) \cap A(q_2)).$$

Для удобства вместо $\sum_{(q_1, q_2) \in J}$, $\sum_{(q_1, q_2) \in J \setminus J_0}$ и $\sum_{(q_1, q_2) \in \text{Tr}_k}$ будем писать $\sum_J$, $\sum_{J \setminus J_0}$ и $\sum_{\text{Tr}_k}$ соответственно.

Применим лемму 6 и получим ограничение на сумму по $(q_1, q_2) \in J_0$:

$$\begin{aligned} \sum_{J_0} \mu(S \cap A(q_1) \cap A(q_2)) &\leq \sum_{J_0} (\#(D \cap C \cap \mathbb{Z}^2))^m \frac{(2\varepsilon)^m}{k q_2^m} \leq \sum_{J_0} ((1 + \delta)\lambda d + 1)^m \frac{(2\varepsilon)^m}{k q_2^m} \\ &\leq \sum_{J_0} ((1 + 2\delta)\lambda d)^m \frac{(2\varepsilon)^m}{k q_2^m} \leq \frac{(1 + 2\delta)^m \lambda^m (2\varepsilon)^m}{k} \sum_{\text{Tr}_k} \frac{d^m}{q_2^m} \leq \frac{2(1 + 2\delta)^m \lambda^m (2\varepsilon)^m}{5}. \end{aligned}$$

Оценим сумму по $(q_1, q_2) \in J \setminus J_0$:

$$\begin{aligned} \sum_{J \setminus J_0} \mu(S \cap A(q_1) \cap A(q_2)) &\leq \sum_{J_0} (\#(D \cap C \cap \mathbb{Z}^2))^m \frac{(2\varepsilon)^m}{k q_2^m} \\ &\leq \sum_{J \setminus J_0} \left((32\varepsilon \lambda k^{1-1/m})^m + \left(\frac{16\varepsilon k^{1-1/m}}{d} \right)^m + (8\lambda d)^m + 4^m \right) \frac{(4\varepsilon)^m}{k^{m+1}} \\ &= \frac{(128\varepsilon^2 \lambda)^m}{k^2} \sum_{J \setminus J_0} 1 + \frac{(64\varepsilon^2)^m}{k^2} \sum_{J \setminus J_0} \frac{1}{d^m} + \frac{(32\varepsilon \lambda)^m}{k^{m+1}} \sum_{J \setminus J_0} d^m + \frac{(16\varepsilon)^m}{k^{m+1}} \sum_{J \setminus J_0} 1 \\ &\leq \frac{(128\varepsilon^2 \lambda)^m}{k^2} \sum_J 1 + \frac{(64\varepsilon^2)^m}{k^2} \sum_J 1 + \frac{(32\varepsilon \lambda)^m}{k^{m+1}} \sum_{J \setminus J_0} (9\varepsilon k^{1-1/m})^m + \frac{(16\varepsilon)^m}{k^{m+1}} \sum_{\text{Tr}_k} 1 \\ &\leq \frac{(128\varepsilon^2 \lambda)^m}{k^2} \frac{2k^{1+3/(2m)}}{\lambda \varepsilon^2} + \frac{(64\varepsilon^2)^m}{k^2} \frac{2k^{1+3/(2m)}}{\lambda \varepsilon^2} + \frac{(288\varepsilon^2 \lambda)^m}{k^2} \sum_J 1 + \frac{(16\varepsilon)^m}{k^{m+1}} k^2 \\ &\leq \frac{(128\varepsilon^2 \lambda)^m}{k^2} \frac{2k^{1,75}}{\lambda \varepsilon^2} + \frac{(64\varepsilon^2)^m}{k^2} \frac{2k^{1,75}}{\lambda \varepsilon^2} + \frac{(288\varepsilon^2 \lambda)^m k^{1,75}}{k^2} + \frac{(16\varepsilon)^m}{k} \\ &\leq \frac{1}{\lambda k^{0,25}} \leq \frac{1}{k^{0,2}}. \end{aligned}$$

Найдем ограничение на сумму по $(q_1, q_2) \in \text{Tr}_k \setminus J$:

$$\begin{aligned} \sum_{\text{Tr}_k \setminus J} \mu(S \cap A(q_1) \cap A(q_2)) &\leq \sum_{J_0} \#(D \cap C \cap \mathbb{Z}^2)^m \frac{(2\varepsilon)^m}{k q_2^m} \\ &\leq \sum_{\text{Tr}_k \setminus J} (17\varepsilon \lambda k^{1-1/m})^m \frac{(2\varepsilon)^m}{k(k/2)^m} = \sum_{\text{Tr}_k \setminus J} \frac{(68\varepsilon^2 \lambda)^m}{k^2} \leq \frac{(68\varepsilon^2 \lambda)^m}{k^2} \sum_{\text{Tr}_k} 1 \leq \frac{(68\varepsilon^2 \lambda)^m}{4}. \end{aligned}$$

Подставим в неравенство (3.4) неравенство (3.5) и неравенства, полученные выше:

$$\begin{aligned} \mu(S \cap \overline{M_k}) &\geq \frac{2^m(1 - \delta)^m(\lambda \varepsilon)^m}{2} - \frac{2(1 + 2\delta)^m(2\lambda \varepsilon)^m}{5} - \frac{1}{k^{0,2}} - \frac{(68\varepsilon^2 \lambda)^m}{4} \\ &\geq \frac{2^m(1 - \delta)^m(\lambda \varepsilon)^m}{2} - \frac{2(1 + 3\delta)^m(2\lambda \varepsilon)^m}{5} - \frac{(68\varepsilon^2 \lambda)^m}{4} \\ &= 2^m(\lambda \varepsilon)^m \left(\frac{(1 - \delta)^m}{2} - \frac{2(1 + 3\delta)^m}{5} \right) - \frac{(68\lambda \varepsilon^2)^m}{4} \geq \frac{2^m(\lambda \varepsilon)^m}{6} - \frac{(68\lambda \varepsilon^2)^m}{4}. \end{aligned}$$

Лемма 14 доказана.

4. Последовательности Бореля–Кантелли. Пусть здесь и далее $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ – вероятностное пространство с $\Omega = [0; 1]^m$.

Назовем последовательность измеримых множеств $\{M_k\}$ *последовательностью Бореля–Кантелли*, если

$$\mu\left(\bigcap_{r=1}^{\infty} \bigcup_{k=r}^{\infty} M_k\right) = 1.$$

То есть почти все точки множества Ω попадают в бесконечное количество множеств последовательности $\{M_k\}$.

ТЕОРЕМА ШУСТЕРА [4]. Пусть $\{M_k\}$ – последовательность измеримых множеств. Если для любого измеримого множества E , такого что $\mu(E) > 0$, выполняется

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(E \cap M_k) = +\infty,$$

то последовательность $\{M_k\}$ является последовательностью Бореля–Кантелли.

ТЕОРЕМА О ПЛОТНОСТИ. Пусть E – измеримое множество с $\mu(E) > 0$. Тогда для любого $\delta > 0$ существует куб S такой, что

$$\frac{\mu(E \cap S)}{\mu(S)} > 1 - \delta.$$

ЛЕММА 15. Пусть $\{M_k\}$ – последовательность измеримых множеств; для любого куба S со стороной λ начиная с некоторого номера $k_0(\lambda)$ для всех $k > k_0$ выполняется неравенство $\mu(S \cap M_k) > c\mu(S)$, где $c = c(m)$. Тогда последовательность $\{M_k\}$ является последовательностью Бореля–Кантелли.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любых множеств E , S и M_k выполняется неравенство

$$\mu(E \cap M_k) \geq \mu(S \cap E \cap M_k) \geq \mu(S) - \mu(S \cap \overline{M_k}) - \mu(S \cap \overline{E}). \quad (4.1)$$

Из условия леммы для всех $k > k_0(\lambda)$ будет

$$\mu(S \cap \overline{M_k}) = \mu(S) - \mu(S \cap M_k) \leq \mu(S) - c\mu(S). \quad (4.2)$$

По теореме о плотности для $\delta = c/2$ можно выбрать куб S так, что

$$\mu(S \cap E) \geq \frac{c}{2} \mu(S),$$

откуда получаем неравенство

$$\mu(S \cap \overline{E}) = \mu(S) - \mu(S \cap E) \leq \frac{c}{2} \mu(S), \quad (4.3)$$

Подставим (4.2) и (4.3) в неравенство (4.1)

$$\mu(E \cap M_k) \geq \mu(S) - \mu(S) + c\mu(S) - \frac{c}{2} \mu(S) = \frac{c}{2} \mu(S).$$

Видим, что для последовательности $\{M_k\}$ выполняются условия теоремы Шустера; значит, последовательность $\{M_k\}$ – последовательность Бореля–Кантелли.

Лемма 15 доказана.

Напомним некоторые свойства прямого произведения.

Пусть $A, A' \subset X$, $B, B' \subset Y$. Тогда

- 1) $(A \times B) \cap (A' \times B') = (A \cap A') \times (B \cap B')$;
- 2) $\mu_{X \times Y}(A \times B) = \mu_X(A) \cdot \mu_Y(B)$.

ЛЕММА 16. Пусть $\{M_k^1\}$ и $\{M_k^2\}$ – последовательности в Ω и для любых кубов S_1 и S_2 начиная с некоторого номера k_0 для всех $k > k_0$ выполняются неравенства $\mu(M_k^1 \cap S_1) > c\mu(S_1)$ и $\mu(M_k^2 \cap S_2) > c\mu(S_2)$, где $c = c(m)$; тогда последовательность $\{M_k^1 \times M_k^2\}$ является последовательностью Бореля–Кантелли.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Построим последовательность множеств $\{\Psi_k\} = \{M_k^1 \times M_k^2\}$. Покажем, что для этой последовательности выполняются условия леммы 15. Возьмем куб $S = S_1 \times S_2$. Найдем меру пересечения

$$\begin{aligned}\mu(S \cap \Psi_k) &= \mu((S_1 \times S_2) \cap (M_k^1 \times M_k^2)) \\ &= \mu((S_1 \cap M_k^1) \times (S_2 \cap M_k^2)) = \mu(S_1 \cap M_k^1) \cdot \mu(S_2 \cap M_k^2).\end{aligned}$$

По условию леммы для всех $k > k_0$ выполняется неравенство

$$\mu(S_1 \cap M_k^1) \cdot \mu(S_2 \cap M_k^2) \geq c\mu(S_1) \cdot c\mu(S_2) = c^2\mu(S).$$

Видим, что для последовательности $\{\Psi_k\}$ выполняются условия леммы 15, таким образом последовательность $\{\Psi_k\}$ является последовательностью Бореля–Кантелли.

Лемма 16 доказана.

5. Доказательство основной теоремы. Построим последовательность множеств $\{\Psi_k\} = \{\underline{M}_k \times \overline{M}_k\}$ и $\{\Phi_k\} = \{\overline{M}_k \times \underline{M}_k\}$. По леммам 3, 4, 5, 14 и 16 обе последовательности $\{\Psi_k\}$ и $\{\Phi_k\}$ являются последовательностями Бореля–Кантелли. Установим взаимнооднозначно соответствие между точками из Ω и матрицами.

В случае $n = 2$ и $m = 1$, точке $(\alpha, \beta) \in [0, 1]^2$ сопоставим матрицу $\Theta = (\theta_1^1 \theta_1^2) = (\alpha \beta)$.

В случае $n = 1$ и $m \geq 2$ точке $(\alpha_1, \dots, \alpha_j) \in [0, 1]^m$ сопоставим матрицу

$$\Theta = \begin{pmatrix} \theta_1^1 \\ \vdots \\ \theta_m^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 \\ \vdots \\ \alpha_m^1 \end{pmatrix}.$$

В обоих случаях почти все точки, а значит, и почти все матрицы, попадают в последовательности $\{\Psi_k\}$ и $\{\Phi_k\}$ бесконечное количество раз. Если $(\Theta, \Theta') \in \Psi_k$, то разность $\psi_\Theta(t) - \psi_{\Theta'}(t) > 0$, и если $(\Theta, \Theta') \in \Phi_k$, то разность $\psi_\Theta(t) - \psi_{\Theta'}(t) < 0$; поэтому для почти всех пар матриц осцилляция происходит бесконечное количество раз.

Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] I. D. Kan, N. G. Moshchevitin, “Approximations to two real numbers”, *Unif. Distrib. Theory*, **5:2** (2010), 79–86.
- [2] А. Я. Хинчин, *Цепные дроби*, ГИФМЛ, М., 1960.
- [3] G. H. Hardy, E. M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers*, The Clarendon Press, Oxford, 1979.
- [4] J. Shuster, “On the Borel–Cantelli problem”, *Canad. Math. Bull.*, **13:2** (1970), 273–275.

Д. О. Шацков

Астраханский государственный университет

E-mail: Denislli@mail.ru

Поступило

29.01.2015

Исправленный вариант

21.06.2015