Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Н. Дубинин, Принцип мажорации для p -листных функций, *Матем. заметки*, 1999, том 65, выпуск 4, 533–541

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1079>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 14:37:31

УДК 517.54

ПРИНЦИП МАЖОРАЦИИ ДЛЯ p -ЛИСТНЫХ ФУНКЦИЙ

В. Н. Дубинин

Доказана теорема, дополняющая известный принцип Линделёфа для функций Грина и неравенство Митюка в случае p -листных отображений. Приведены приложения этой теоремы и метода симметризации в геометрической теории функций комплексного переменного.

Библиография: 9 названий.

1. Введение. Пусть B и D – области, имеющие функции Грина $g_B(z, z')$ и $g_D(w, w')$ и расположенные в открытых плоскостях $\mathbb{C}_z$ и $\mathbb{C}_w$ соответственно. Пусть $w = f(z)$ – регулярная функция в B , значения которой лежат в D . Одним из основных принципов мажорации в теории конформного отображения является

ПРИНЦИП ЛИНДЕЛЁФА. Если w_0 – точка образа $f(B)$ области B ; $z_0, z_1, z_2, \dots$ – точки множества B , для которых $f(z_k) = w_0$; p_k – кратность нуля z_k функции $f(z) - w_0$, то имеет место неравенство [1]

$$g_D(w, w_0) \geq \sum_{k=0}^{\infty} p_k g_B(z, z_k) \quad (1)$$

для всех $z \in B$, $w = f(z)$.

Вычитая из обеих частей неравенства (1) особенность в точке z_0 и переходя к пределу при $z \rightarrow z_0$, получим неравенство Митюка [2]

$$\log r(D, w_0) \geq \log |a_p| + p \log r(B, z_0) + \sum_{k=1}^{\infty} p_k g_B(z_0, z_k), \quad (2)$$

где $r(\Omega, a)$ – внутренний радиус области Ω относительно точки a и

$$f(z) - w_0 = a_p(z - z_0)^p + o((z - z_0)^p), \quad z \rightarrow z_0, \quad a_p \neq 0.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-01-00007.

Заметим, что неравенство (2) содержит известное неравенство Хеймана

$$|a_1| \leq r(f(U), a_0)$$

для регулярных в круге $U = \{z : |z| < 1\}$ функций $f(z) = a_0 + a_1 z + \dots$ и имеет многочисленные приложения в геометрической теории функций [3]. Пусть теперь $w_l, l = 1, \dots, m$, – различные точки области $f(B)$; p – фиксированное натуральное число; $z_{jl}, j = 1, \dots, p$, – некоторые нули функции $f(z) - w_l$, причем каждый нуль взят столько раз, какова его кратность p_{jl} (в частности, мы предполагаем, что суммарная кратность p выбранных точек не зависит от l). Пусть

$$f(z) - w_l = a_{jl}(z - z_{jl})^{p_{jl}} + o((z - z_{jl})^{p_{jl}}), \quad z \rightarrow z_{jl}, \quad a_{jl} \neq 0, \\ j = 1, \dots, p, \quad l = 1, \dots, m,$$

и $\delta_l, l = 1, \dots, m$, – произвольные положительные числа. Суммируя по i либо по j неравенства вида (1) для всевозможных пар точек w_k, w_l и $z_{ik}, z_{jl}, k \neq l$, умножая результат на $\delta_k \delta_l$ и вновь суммируя по k и l , а затем повторяя аналогичную процедуру с неравенством (2) при $k = l$, получим симметричную оценку

$$p \sum \delta_k \delta_l G(D, w_k, w_l) \geq \sum \delta_k \delta_l G(B, z_{ik}, z_{jl}) + \sum \delta_l^2 \log |a_{jl}| \quad (3)$$

(здесь и далее, если не оговорено противное, символы $\{ \cdot \}$, $\sum$ и $\prod$ означают соответственно совокупность, суммирование и произведение по всевозможным индексам, указанным в контексте, за исключением тех, при которых слагаемое в сумме равно ∞ либо неопределено, а сомножитель в произведении равен 0 либо ∞), где

$$G(\Omega, z, \zeta) = \begin{cases} g_\Omega(z, \zeta), & \text{если } z \neq \zeta, \\ \log r(D, \zeta), & \text{если } z = \zeta. \end{cases}$$

Заметим, что линейная комбинация $\sum \delta_k \delta_l G(D, w_k, w_l)$ для любых δ_l уже встречалась в известных работах Шиффера [4] и Нехари [5]. Естественно возникает вопрос о справедливости неравенства (3) для произвольных вещественных δ_l (необязательно положительных). Конечно, в этом случае необходимо существенно использовать листность накрытия и, следовательно, можно ограничиться p -листными функциями [6, с. 469].

Следующий пункт носит вспомогательный характер. Мы напомним понятие обобщенного приведенного модуля [7]–[9], в п. 3 доказываем неравенство (3) для произвольных δ_l и в конце рассматриваем некоторые приложения принципа мажорации (3) в геометрической теории функций комплексного переменного.

2. Приведенные модули. Пусть B – открытое множество плоскости $\overline{\mathbb{C}}_z$, дополнение которого $E_0 = \overline{\mathbb{C}}_z \setminus B$ имеет положительную гармоническую меру [6]. Пусть $z_l, l = 1, \dots, m$, – различные точки множества B ; $\delta_l, l = 1, \dots, m$, – произвольные действительные числа отличные от 0 и $\mu_l, \nu_l, l = 1, \dots, m$, – произвольные положительные числа. Введем следующие обозначения: $Z = \{z_l\}$, $\Delta = \{\delta_l\}$, $\Psi = \{\psi_l\}$, $\psi_l = \psi_l(r) \equiv \mu_l r^{\nu_l}, l = 1, \dots, m$,

$$E(z_0, r) = \begin{cases} \{z : |z - z_0| \leq r\} & \text{в случае конечной точки } z_0, \\ \{z : |z| \geq 1/r\} & \text{в случае } z_0 = \infty, \end{cases} \quad r > 0.$$

При достаточно малом $r > 0$ определим *обобщенный конденсатор* как упорядоченную совокупность

$$C(r; B, Z, \Delta, \Psi) = \{E_0, E(z_1, \psi_1(r)), \dots, E(z_m, \psi_m(r))\} \quad (4)$$

с предписанными значениями $0, \delta_1, \dots, \delta_m$ соответственно. По аналогии с обычными конденсаторами *модулем конденсатора* $C(r; B, Z, \Delta, \Psi)$ назовем величину

$$|C(r; B, Z, \Delta, \Psi)| = \sup \left\{ \left(\iint_{\mathbb{C}_z} |\nabla v|^2 dx dy \right)^{-1} \right\},$$

где верхняя грань берется по всем вещественнозначным функциям $v(z)$, непрерывным в $\overline{\mathbb{C}_z}$, удовлетворяющим условию Липшица в некоторой окрестности каждой конечной точки, и таким, что $v(z) = 0$ в окрестности множества E_0 и $v(z) = \delta_l$ на $E(z_l, \psi_l(r))$, $l = 1, \dots, m$ (здесь $1/0 = +\infty$). Приведенным модулем множества B относительно совокупностей Z, Δ, Ψ назовем предел

$$M(B, Z, \Delta, \Psi) = \lim_{r \rightarrow 0} \left(|C(r; B, Z, \Delta, \Psi)| + \frac{\nu}{2\pi} \log r \right), \quad (5)$$

где $\nu = (\sum \delta_l^2 \nu_l^{-1})^{-1}$. Непосредственно из определения приведенного модуля вытекает важное свойство монотонности: $M(B, Z, \Delta, \Psi) \leq M(B', Z, \Delta, \Psi)$ для любых $Z = \{z_l\}$, $z_l \in B \subset B'$, $l = 1, \dots, m$, и любых Δ, Ψ . Введем вспомогательные множества $\tilde{E}(z_l, r)$, $l = 1, \dots, m$, как произвольные замкнутые множества в $\overline{\mathbb{C}_z}$, удовлетворяющие условию

$$E(z_l, \psi_l(r_1)) \subset \tilde{E}(z_l, r) \subset E(z_l, \psi_l(r_2)), \quad l = 1, \dots, m, \quad (6)$$

при некоторых положительных непрерывных $r_j = r_j(r) \sim r$, $r \rightarrow 0$, $0 < r < r_0$, $j = 1, 2$. Обобщенный конденсатор, определенный как и в (4), но с заменой $E(z_l, \psi_l(r))$ на $\tilde{E}(z_l, r)$, обозначим через $\tilde{C}(r; B, Z, \Delta, \Psi)$. Нетрудно убедиться в справедливости следующей леммы.

ЛЕММА 1. Если при некоторых $\tilde{E}(z_l, r)$, $l = 1, \dots, m$, существует предел

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left(|\tilde{C}(r; B, Z, \Delta, \Psi)| + \frac{\nu}{2\pi} \log r \right), \quad (7)$$

то существует равный ему предел (5), и обратно, если существует предел (5), то существует равный ему предел (7) для любых $\tilde{E}(z_l, r)$, $l = 1, \dots, m$.

Для произвольной области $G \subset \overline{\mathbb{C}_z}$ обозначим через $g_G(z, z_0)$ функцию Грина этой области с полюсом в точке $z_0 \in G$, доопределенную нулем во внешности G . Пусть $r(G, z_0)$ – внутренний радиус области G относительно точки z_0 . В случае $z_0 = \infty$ полагаем

$$r(G, \infty) = \exp \left(\lim_{z \rightarrow \infty} (g_G(z, \infty) - \log |z|) \right).$$

ЛЕММА 2. Пусть множество B и совокупности Z, Δ, Ψ такие же, как и выше, и пусть B_l означает связную компоненту множества B , содержащую точку z_l , $l = 1, \dots, t$ (при такой нумерации одна компонента может иметь несколько обозначений). Тогда приведенный модуль (5) существует и справедлива формула

$$M(B, Z, \Delta, \Psi) = \frac{\nu^2}{2\pi} \left(\sum \frac{\delta_l^2}{\nu_l^2} \log \frac{r(B_l, z_l)}{\mu_l} + \sum \frac{\delta_l}{\nu_l} \frac{\delta_j}{\nu_j} g_{B_l}(z_j, z_l) \right).$$

Доказательство леммы 2 аналогично соответствующим доказательствам в работах [7], [8]. Подробное исследование асимптотики конденсатора $C(r; B, Z, \Delta, \Psi)$ приведено также в [9].

3. Основной результат. Функция $w = f(z)$, мероморфная в некоторой области $B \subset \overline{\mathbb{C}}_z$, называется p -листной в этой области, если она принимает в B каждое комплексное значение w не более чем в p точках. Условимся говорить, что отображение $w = f(z)$ осуществляет полное p -кратное накрытие области $f(B)$ областью B , если каждой точке $w \in f(B)$ соответствует ровно p прообразов в области B с учетом их кратности и любая последовательность точек $z_n \in B$, стремящаяся к ∂B , переходит в последовательность точек, стремящуюся к $\partial f(B)$. Следующее утверждение естественно назвать принципом мажорации (ср. [6, гл. 8]).

ТЕОРЕМА 1. Пусть B и D – области, имеющие функции Грина и расположенные в плоскостях $\overline{\mathbb{C}}_z$ и $\overline{\mathbb{C}}_w$ соответственно, $w = f(z)$ – мероморфная p -листная функция в B , значения которой лежат в D . Пусть w_l , $l = 1, \dots, t$, – различные точки области D , каждая из которых имеет ровно p прообразов в B с учетом их кратности, и пусть z_{jl} , $j = 1, \dots, p$, – указанные прообразы точки w_l , $l = 1, \dots, t$ (каждый нуль функции $f(z) - w_l$ получает столько обозначений какова его кратность). Тогда для любых действительных чисел δ_l , $l = 1, \dots, t$, справедливо неравенство (3), где коэффициенты a_{jl} определяются из разложений

$$f(z) - w_l = a_{jl}(z - z_{jl})^{p_{jl}} + o((z - z_{jl})^{p_{jl}}), \quad z \rightarrow z_{jl}, \quad a_{jl} \neq 0, \\ j = 1, \dots, p, \quad l = 1, \dots, t,$$

где в случае $z_{jl} = \infty$ ($w_l = \infty$) величину $z - z_{jl}$ ($f(z) - w_l$) необходимо заменить на $1/z$ ($1/f(z)$ соответственно). Если, дополнительно, область D имеет классическую функцию Грина, а отображение $w = f(z)$ осуществляет полное p -кратное накрытие области D областью B , то в неравенстве (3) достигается знак равенства.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать, что все δ_l , $l = 1, \dots, t$, отличны от 0 и область B ограничена конечным числом аналитических жордановых кривых. Положим $W = \{w_l\}$, $\Delta = \{\delta_l\}$, $\Psi = \{t_l(r)\}$, $t_l(r) \equiv r$, $l = 1, \dots, t$, $\nu = (\sum \delta_l^2)^{-1}$. При достаточно малом $r > 0$ в плоскости $\overline{\mathbb{C}}_w$ определен конденсатор $C(r; D, W, \Delta, \Psi)$. По лемме 2 существует приведенный модуль

$$M(D, W, \Delta, \Psi) = \lim_{r \rightarrow 0} \left(|C(r; D, W, \Delta, \Psi)| + \frac{\nu}{2\pi} \log r \right). \quad (8)$$

Конденсатору $C(r; D, W, \Delta, \Psi)$ в плоскости $\overline{\mathbb{C}}_z$ сопоставим конденсатор $\tilde{C}(r; B, \tilde{Z}, \tilde{\Delta}, \tilde{\Psi})$, где $\tilde{Z} = \{\tilde{z}_{kl}\}$, $\tilde{z}_{kl}$, $k = 1, \dots, n_l$, $l = 1, \dots, m$, – нули функции $f(z) - w_l$ без учета кратности, $\tilde{\Delta} = \{\delta_{kl}\}$, $\delta_{kl} = \delta_l/p$, $k = 1, \dots, n_l$; $\tilde{\Psi} = \{\psi_{kl}(r)\}$, $\psi_{kl}(r) = |\tilde{a}_{kl}|^{-1/p_{kl}} r^{1/p_{kl}}$, p_{kl} , $k = 1, \dots, n_l$, – кратность точки $\tilde{z}_{kl}$, $\sum_{k=1}^{n_l} p_{kl} = p$, $l = 1, \dots, m$, $\tilde{a}_{kl}$ – коэффициент, соответствующий точке $\tilde{z}_{kl}$; $\tilde{E}(\tilde{z}_{kl}, r)$ – связная часть прообраза $E(w_l, r)$ при отображении $w = f(z)$, лежащая в окрестности точки $\tilde{z}_{kl}$. Легко видеть, что множества $\tilde{E}(\tilde{z}_{kl}, r)$ удовлетворяют условиям вида (6). Ввиду лемм 1 и 2

$$M(B, \tilde{Z}, \tilde{\Delta}, \tilde{\Psi}) = \lim_{r \rightarrow 0} \left(|\tilde{C}(r; B, \tilde{Z}, \tilde{\Delta}, \tilde{\Psi})| + \frac{\tilde{\nu}}{2\pi} \log r \right), \quad (9)$$

где

$$\tilde{\nu} = \left(\sum \delta_{kl}^2 p_{kl} \right)^{-1} = p \left(\sum \delta_l^2 \right)^{-1} = p\nu.$$

Пусть теперь $u(z)$ – потенциальная функция конденсатора $\tilde{C}(r; B, \tilde{Z}, \tilde{\Delta}, \tilde{\Psi})$, т.е. вещественнозначная функция $u(z)$, непрерывная в $\overline{\mathbb{C}}_z$, гармоническая в $B \setminus \bigcup_{k,l} \tilde{E}(\tilde{z}_{kl}, r)$, равная 0 на $\overline{\mathbb{C}}_z \setminus B$ и δ_{kl} на $\tilde{E}(\tilde{z}_{kl}, r)$. На множестве $f(B)$ определим функцию

$$U(w) = \sum_{f(z)=w} u(z).$$

Значение функции $U(w)$ для каждого w состоит не более чем из p слагаемых. Функция $U(w)$ непрерывна в $\overline{f(B)}$, равна 0 на границе $f(B)$ и δ_l на $E(w_l, r)$ и удовлетворяет условию Липшица в некоторой окрестности каждой конечной точки $f(B)$ за исключением, быть может, конечного числа таких точек. Из принципа Дирихле, выпуклости функции $y = x^2$ и конформной инвариантности интеграла Дирихле имеем

$$|C(r; D, W, \Delta, \Psi)|^{-1} \leq \iint_{f(B)} |\nabla U|^2 du dv \leq p \iint_B |\nabla u|^2 dx dy. \quad (10)$$

Учитывая вновь принцип Дирихле, заключаем, что

$$p|C(r; D, W, \Delta, \Psi)| \geq |\tilde{C}(r; B, \tilde{Z}, \tilde{\Delta}, \tilde{\Psi})|.$$

В силу (8)–(10) имеем

$$pM(D, W, \Delta, \Psi) \geq M(B, \tilde{Z}, \tilde{\Delta}, \tilde{\Psi}),$$

или с учетом леммы 2

$$\begin{aligned} p \sum \delta_l \delta_k G(D, w_k, w_l) &\geq \sum \delta_k p_{ik} \delta_l p_{jl} G(B, \tilde{z}_{ik}, \tilde{z}_{jl}) + \sum \delta_l^2 p_{kl} \log |\tilde{a}_{kl}| \\ &= \sum \delta_k \delta_l G(B, z_{ik}, z_{jl}) + \sum \delta_l^2 \log |a_{jl}|. \end{aligned}$$

Неравенство (3) доказано.

Предположим, что область D имеет классическую функцию Грина, а отображение $w = f(z)$ осуществляет полное p -кратное накрытие области D областью B . Тогда существует потенциальная функция $\omega(w)$ конденсатора $C(r; D, W, \Delta, \Psi)$. Сложная функция $\omega(f(z))$ является потенциальной для конденсатора $\tilde{C}(r; B, \tilde{Z}, \tilde{\Delta}, \tilde{\Psi})$, причем ввиду

конформной инвариантности интеграла Дирихле и p -кратности накрытия выполняется равенство

$$p|C(r; D, W, \Delta, \Psi)| = |\tilde{C}(r; B, \tilde{Z}, \tilde{\Delta}, \tilde{\Psi})|.$$

С учетом (8) и (9) это дает знак равенства в (3). Теорема доказана.

Заметим, что в случае $p = 1$ и однолистной функции $w = f(z)$ неравенство (3) превращается в равенство и является простым следствием инвариантности функции Грина при конформном отображении. При $p \geq 1$ и положительных δ_l это неравенство, как было показано выше, справедливо для любых регулярных функций и вытекает из принципа Линделёфа и теоремы Митюка. В случае разных знаков у δ_l условие p -листности существенно. Это видно уже при $p = 1$ из следующего примера. Пусть B есть плоскость $\mathbb{C}_z$ с разрезами вдоль лучей $[-\infty, 0]$ и $[1, +\infty]$ действительной оси и пусть $D = \mathbb{C}_w \setminus [1, +\infty]$. Обозначим через $w = f(z)$ ветвь степенной функции, заданную в B соотношениями $w = r^{3/2}e^{i3\varphi/2}$, $z = re^{i\varphi}$, $-\pi < \varphi < \pi$. Функция $w = f(z)$ двулистная, однако точкам $w_1 = e^{3\pi i/8}$ и $w_2 = e^{-3\pi i/8}$ соответствуют ровно по одному прообразу с учетом кратности: точки $z_1 = e^{i\pi/4}$ и $z_2 = e^{-i\pi/4}$ соответственно. Прямые вычисления показывают, что

$$\log r(D, w_1)r(D, w_2) - 2g_D(w_1, w_2) = 2 \log \left(2 \sin \frac{3\pi}{8} \right).$$

В то же время

$$\log r(B, z_1)r(B, z_2) - 2g_B(z_1, z_2) + \log |f'(z_1)f'(z_2)| = 2 \log \frac{3}{\sqrt{2}},$$

что противоречит неравенству (3).

4. Приложения. Прежде всего отметим, что специальные свойства p -листных функций изучены в меньшей степени, чем те свойства, которые выполняются для известных обобщений p -листных в среднем и др. Мы ограничимся здесь простейшими приложениями теоремы 1 в случае, когда область B есть круг, $m = 2$ и $\delta_1 = \pm \delta_2 = 1$. Обозначим через M_p класс функций, мероморфных и p -листных в круге $U = \{z : |z| < 1\}$. Точку z_0 круга U назовем n -кратной точкой функции $f(z)$, если она является нулем функции $f(z) - f(z_0)$ кратности n . Для заданной функции $f(z)$ класса M_p и точки $z_0 \in U$ кратности n определим постоянную $a(f, z_0) = f^{(n)}(z_0)/n!$. Следующее утверждение можно рассматривать как дополнение в случае p -листных функций к известной лемме Шварца (ср. [6, с. 319, 323]).

ТЕОРЕМА 2. Пусть функция $f(z)$ принадлежит классу M_p и $|f(z)| < R$ для всех $z \in U$. Пусть w и ω — произвольные различные точки образа $f(U)$, p -кратно покрываемые кругом U при отображении $f(z)$. Тогда для систем точек $\{z_k\}_{k=1}^p$, $\{\zeta_k\}_{k=1}^p$, переходящих в точки w и ω соответственно и взятых с учетом кратности, справедливо неравенство

$$\left(\frac{(R^2 - |w|^2)(R^2 - |\omega|^2)|w - \omega|^2}{|R^2 - w\bar{\omega}|^2} \right)^p \geq \prod |a(f, z_k)a(f, \zeta_k)| \frac{\prod |1 - z_k\bar{z}_l| \cdot |1 - \zeta_k\bar{\zeta}_l|}{\prod |z_k - z_l| \cdot |\zeta_k - \zeta_l|} \prod \left| \frac{z_k - \zeta_l}{1 - z_k\bar{\zeta}_l} \right|^2. \quad (11)$$

Знак равенства в (11) достигается для функций, осуществляющих полное p -кратное накрытие круга $V = \{w : |w| < R\}$ кругом U .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $f(U)$ через D . По лемме 2 и из монотонности приведенного модуля

$$\log r(V, w)r(V, \omega) - 2g_V(w, \omega) \geq \log r(D, w)r(D, \omega) - 2g_D(w, \omega).$$

С другой стороны, согласно теореме 1 справедливо неравенство

$$p(\log r(D, w)r(D, \omega) - 2g_D(w, \omega)) \geq \sum \log r(U, z_k)r(U, \zeta_k) + \sum G(U, z_k, z_l) + \sum G(U, \zeta_k, \zeta_l) - 2 \sum g_U(z_k, \zeta_l) + \sum \log |a(f, z_k)a(f, \zeta_k)|$$

с соответствующим утверждением о знаке равенства. Завершают доказательство простые вычисления внутренних радиусов и функций Грина для кругов U и V . Теорема доказана.

Отметим два частных случая неравенства (11). Пусть $f(z) \in M_p$, $|f(z)| < R$ при $|z| < 1$ и пусть в окрестности точки $z = 0$ имеет место разложение $f(z) = a_p z^p + \dots$, $a_p \neq 0$. Предположим, что для точки $w \in f(U)$ существует ровно p прообразов с учетом кратности $z_1, \dots, z_p$. Тогда из неравенства (11) имеем

$$\left(\left(1 - \left| \frac{w}{R} \right|^2 \right) |w|^2 \right)^p \geq |a_p|^p \prod |f'(z_k)| \frac{\prod |1 - z_k \bar{z}_l|}{\prod |z_k - z_l|} \prod |z_k|^{2p}.$$

Если, дополнительно, точки $z_1, \dots, z_p$ лежат на одной окружности $|z| = r < 1$, то с учетом следствия 3 из [7] получим

$$\left(1 - \left| \frac{w}{R} \right|^2 \right) |w|^2 \geq \left| \frac{a_p}{p} \right| (1 - r^{2p}) r^{p+1} \sqrt[p]{\prod |f'(z_k)|}.$$

Знак равенства в обоих случаях достигается для функции $w = Rz^p$ и точек $z_k = e^{2\pi i k/p}$, $k = 1, \dots, p$.

Пусть теперь z и ζ – две различные p -кратные точки функции $f(z)$ из теоремы 2. В этом случае неравенство (11) имеет вид

$$\begin{aligned} & (p!)^2 \frac{(R^2 - |f(z)|^2)(R^2 - |f(\zeta)|^2)|f(z) - f(\zeta)|^2}{|R^2 - f(z)\overline{f(\zeta)}|^2} \\ & \geq |f^{(p)}(z)f^{(p)}(\zeta)|(1 - |z|^2)^p(1 - |\zeta|^2)^p \left| \frac{z - \zeta}{1 - \bar{z}\zeta} \right|^{2p}. \end{aligned}$$

Поскольку при полном p -кратном накрытии круга кругом возможна лишь одна p -кратная точка, последнее неравенство не точное. Применение симметризации относительно окружности [7] дает следующий результат.

ТЕОРЕМА 3. Пусть функция $f(z)$ принадлежит классу M_p , w и ω – произвольные различные конечные точки образа $f(U)$, p -кратно покрываемые кругом U при отображении $f(z)$. Пусть $\alpha_f(w, \omega)$ – линейная мера всех θ , $0 \leq \theta \leq 2\pi$, для которых дуга окружности с концами в w, ω и углом θ к действительной оси в точке w не принадлежит $f(U)$. Тогда для систем точек $\{z_k\}_{k=1}^p$, $\{\zeta_k\}_{k=1}^p$, переходящих в точки w и ω соответственно и взятых с учетом кратности, справедливо неравенство

$$|w - \omega|^{2p} \sin^{-4p} \frac{\alpha_f(w, \omega)}{4} \geq \prod |a(f, z_k) a(f, \zeta_k)| \frac{\prod |1 - z_k \bar{z}_l| \cdot |1 - \zeta_k \bar{\zeta}_l|}{\prod |z_k - z_l| \cdot |\zeta_k - \zeta_l|} \prod \left| \frac{1 - z_k \bar{\zeta}_l}{z_k - \zeta_l} \right|^2.$$

Знак равенства достигается, например, для функции $f(z) = z^p + 1/z^p$ и точек $z_k = re^{\pi i/(2p) + 2\pi i k/p}$, $\zeta_k = re^{-\pi i/(2p) + 2\pi i k/p}$, $0 < r < 1$, $k = 1, \dots, p$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функция $\zeta = 1/(f(z) - \omega)$ принадлежит классу M_p . Обозначим через B образ круга U , возникающий при отображении этой функцией, $w_0 = 1/(w - \omega)$, и пусть $D = f(U)$. Ввиду конформной инвариантности функции Грина и согласно теореме 14 из [7] выполнено

$$\log r(D, w) r(D, \omega) + 2g_D(w, \omega) = \log r(B, w_0) r(B, \infty) + 2g_B(w_0, \infty) + \log |w - \omega|^2 \leq \log \left(|w - \omega|^2 \sin^{-4} \frac{\alpha_f(w, \omega)}{4} \right).$$

Оценка левой части неравенства снизу осуществляется с помощью теоремы 1 так же, как и при доказательстве теоремы 2. Для проверки случая равенства удобнее всего воспользоваться утверждениями о знаке равенства в теореме 1 и в теореме 14 из [7]. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть функция $f(z) \in M_p$ и пусть в окрестности точки $z = 0$ имеет место разложение $f(z) = z^p + \dots$. Предположим, что для точки $w \in f(U)$ имеется ровно p прообразов с учетом кратности $z_1, \dots, z_p$ и любая дуга окружности, соединяющая точки 0 и w , не принадлежит $f(U)$. Тогда имеет место оценка

$$|w|^{2p} \geq \prod |a(f, z_k)| \frac{\prod |1 - z_k \bar{z}_l|}{\prod |z_k - z_l|} \prod |z_k|^{-2p}.$$

Для функций $f(z)$ класса M_p введем обозначение

$$\mu_f(w, \omega) = \int_{\sigma} t^{-1} (1-t)^{-1} dt, \quad \sigma = \{t \in (0, 1) : w + t(\omega - w) \notin f(U)\}.$$

ТЕОРЕМА 4. Если функция $f(z)$ принадлежит классу M_p и для данных различных конечных точек $w, \omega \in f(U)$ имеется ровно по p прообразов с учетом кратности $z_1, \dots, z_p$ и $\zeta_1, \dots, \zeta_p$ соответственно, то

$$\text{ch}^{-4p} \frac{\mu_f(w, \omega)}{4} |w - \omega|^{2p} \geq \prod |a(f, z_k) a(f, \zeta_k)| \frac{\prod |1 - z_k \bar{z}_l| \cdot |1 - \zeta_k \bar{\zeta}_l|}{\prod |z_k - z_l| \cdot |\zeta_k - \zeta_l|} \prod \left| \frac{z_k - \zeta_l}{1 - z_k \bar{\zeta}_l} \right|^2.$$

Знак равенства достигается для функции $f(z) = z^p + 1/z^p$ и точек $z_k = re^{2\pi i k/p}$, $\zeta_k = re^{\pi i/p + 2\pi i k/p}$, $0 < r < 1$, $k = 1, \dots, p$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через B плоскость $\overline{\mathbb{C}}_w$, разрезанную по отрезку $\{w + t(\omega - w) : (1 - \tau)/2 \leq t \leq (1 + \tau)/2\}$, где $\tau = \text{th}(\mu_f(w, \omega)/4)$, и пусть $D = f(U)$. По теореме 2 из [8]

$$\log r(D, w)r(D, \omega) - 2g_D(w, \omega) \leq \log r(B, w)r(B, \omega) - 2g_B(w, \omega) = 2 \log(1 - \tau^2)|w - \omega|.$$

Осталось воспользоваться теоремой 1. Случай равенства проверяется непосредственно. Теорема доказана.

Как показывают доказательства теорем 3 и 4, принцип мажорации для p -листных функций позволяет распространить и уточнить результаты, полученные ранее методом симметризации для регулярных либо регулярных и однолистных функций, на случай p -листных отображений.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Стоилов С. Теория функций комплексного переменного. Т. 2. М.: ИЛ, 1962.
- [2] Митюк И. П. Принцип симметризации для многосвязных областей // Докл. АН СССР. 1964. Т. 157. № 2. С. 268–270.
- [3] Митюк И. П. Симметризационные методы и их применение в геометрической теории функций. Введение в симметризационные методы. Краснодар: Кубанский гос. ун-т, 1980.
- [4] Шиффер М. Некоторые новые результаты в теории конформных отображений // Приложение к книге Р. Куранта “Принцип Дирихле, конформные отображения и минимальные поверхности”. М.: ИЛ, 1953.
- [5] Nehari Z. Some inequalities in the theory of functions // Trans. Amer. Math. Soc. 1953. V. 75. № 2. P. 256–286.
- [6] Голузин Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1966.
- [7] Дубинин В. Н. Некоторые свойства внутреннего приведенного модуля // Сиб. матем. ж. 1994. Т. 35. № 4. С. 774–792.
- [8] Дубинин В. Н. Симметризация, функция Грина и конформные отображения // Аналитическая теория чисел и теория функций. Вып. 13. Зап. научных семин. ПОМИ. 1996. Т. 226. С. 80–92.
- [9] Дубинин В. Н. Асимптотика модуля вырождающегося конденсатора и некоторые ее применения // Аналитическая теория чисел и теория функций. Вып. 14. Зап. научных семин. ПОМИ. 1997. Т. 237. С. 56–73.

Институт прикладной математики ДВО РАН, г. Владивосток
E-mail: dubn@ipm.marine.su

Поступило
08.01.97