Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. А. Пшибихова, Задача Гурса для дробного телеграфного уравнения с производными Капуто, *Матем. заметки*, 2016, том 99, выпуск 4, 559–563

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10793>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 12:34:58

Задача Гурса для дробного телеграфного уравнения с производными Капуто

Р. А. Пшибихова

Исследуется задача Гурса для дробного телеграфного уравнения с производными Капуто. Доказана теорема существования и единственности решения задачи.

Библиография: 7 названий.

DOI: 10.4213/mzm10793

1. Введение. Рассмотрим уравнение

$$\partial_{0x}^{\alpha} \partial_{0y}^{\beta} u(x, y) + \lambda u(x, y) = f(x, y), \quad (1.1)$$

где $\alpha, \beta \in (0, 1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, ∂_{0s}^{γ} – производная Капуто порядка γ по переменной s , определяемая с помощью равенства [1; с. 11]

$$\partial_{0s}^{\gamma} g(s) = D_{0s}^{\gamma-n} g^{(n)}(s), \quad n-1 < \gamma \leq n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (1.2)$$

D_{0s}^{γ} – оператор дробного интегро-дифференцирования в смысле Римана–Лиувилля порядка γ с началом в точке 0 по переменной s , определенный следующим образом [1; с. 9]:

$$D_{0s}^{\gamma} f(s) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(-\gamma)} \int_0^s \frac{f(v)}{(s-v)^{\gamma+1}} dv, & \gamma < 0, \\ f(s), & \gamma = 0, \\ \frac{d^n}{ds^n} D_{0s}^{\gamma-n} f(s), & n-1 < \gamma \leq n, \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (1.3)$$

В данной работе строится решение задачи Гурса для уравнения (1.1). Ранее, в работе [2] доказана теорема существования и единственности решения аналога задачи Гурса для уравнения вида (1.1) с производными Римана–Лиувилля. В работе [3] для уравнения (1.1) в случае оператора Римана–Лиувилля и $\lambda = 0$ рассмотрены аналогии задач Коши и Гурса. Более полный обзор работ, посвященных исследованию уравнений в частных производных дробного порядка, можно найти в [4] и [5].

2. Постановка задачи и формулировка результатов. Регулярным решением уравнения (1.1) в области

$$D = (0, a) \times (0, b), \quad 0 < a < \infty, \quad 0 < b < \infty,$$

будем называть функцию $u(x, y)$ абсолютно непрерывную в $\overline{D}$ (см., например, [6; с. 247]), удовлетворяющую уравнению (1.1) во всех точках $(x, y) \in D$.

ЗАДАЧА. Найти регулярное решение уравнения (1.1), удовлетворяющее следующим условиям:

$$u(x, 0) = \psi(x), \quad 0 < x < a, \quad u(0, y) = \varphi(y), \quad 0 < y < b, \quad (2.1)$$

где φ, ψ – заданные непрерывные функции.

Примем обозначение

$$w(\xi, \eta) = \xi^{\alpha-1} \eta^{\beta-1} e_{\alpha, -\beta}^{\alpha, \beta}(-\lambda \xi^\alpha \eta^\beta), \quad (2.2)$$

где

$$e_{\gamma, \delta}^{\mu, \nu}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\gamma n + \mu) \Gamma(-\delta n + \nu)} \quad (2.3)$$

– функция типа Райта [4; с. 23]. Заметим, что функцию $e_{\gamma, \delta}^{\mu, \nu}(z)$ можно выразить в виде

$$e_{\gamma, \delta}^{\mu, \nu}(z) = E_{(\gamma, -\delta), (\mu, \nu)}(z),$$

где

$$E_{(\rho_i), (\mu_i)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\mu_1 + n\rho_1) \cdots \Gamma(\mu_m + n\rho_m)}, \quad m \geq 1, \quad \sum_{i=1}^m \rho_i > 0,$$

– многопараметрическая функция Миттаг-Леффлера (см., например, [7]). Поэтому функция $w(\xi, \eta)$ может быть представлена в форме

$$w(\xi, \eta) = \xi^{\alpha-1} \eta^{\beta-1} E_{(\alpha, \beta), (\alpha, \beta)}(-\lambda \xi^\alpha \eta^\beta).$$

Основным результатом работы является следующее утверждение.

ТЕОРЕМА. Пусть $f(x, y) \in C(\overline{D})$ и представима в виде

$$f(x, y) = D_{0x}^{\alpha-1} D_{0y}^{\beta-1} g(x, y),$$

где $g(x, y) \in L(D)$, $\varphi(y) \in AC[0, b]$, $\psi(x) \in AC[0, a]$ и выполнено условие согласования $\varphi(0) = \psi(0)$. Тогда существует единственное регулярное решение уравнения (1.1) в области D , удовлетворяющее краевым условиям (2.1). Решение имеет вид

$$\begin{aligned} u(x, y) = & \psi(x) + \varphi(y) - \psi(0) D_{0x}^{\alpha-1} D_{0y}^{\beta-1} w(x, y) - \lambda \int_0^x \psi(s) D_{0y}^{-1} w(x-s, y) ds \\ & - \lambda \int_0^y \varphi(t) D_{0x}^{-1} w(x, y-t) dt + \int_0^x \int_0^y f(s, t) w(x-s, y-t) dt ds. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Доказательство теоремы проводится в последующей части статьи.

3. Редукция к интегральному уравнению. В силу (1.2) уравнение (1.1) можно записать в виде

$$D_{0x}^{\alpha-1} D_{0y}^{\beta-1} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} u(x, y) + \lambda u(x, y) = f(x, y). \quad (3.1)$$

Поддействуем на обе части уравнения (1.1) оператором $D_{0x}^{1-\alpha} D_{0y}^{1-\beta}$. Имеем

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} u(x, y) + \lambda D_{0x}^{1-\alpha} D_{0y}^{1-\beta} u(x, y) = D_{0x}^{1-\alpha} D_{0y}^{1-\beta} f(x, y)$$

или

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} [u(x, y) + \lambda D_{0x}^{-\alpha} D_{0y}^{-\beta} u(x, y)] = D_{0x}^{1-\alpha} D_{0y}^{1-\beta} f(x, y).$$

Отсюда следует

$$u(x, y) + \lambda D_{0x}^{-\alpha} D_{0y}^{-\beta} u(x, y) = D_{0x}^{-\alpha} D_{0y}^{-\beta} f(x, y) + g_1(x) + g_2(y), \quad (3.2)$$

где $g_1(x)$ и $g_2(y)$ – неизвестные, подлежащие определению функции. Найдем $g_1(x) + g_2(y)$. Удовлетворяя (3.2) краевым условиям (2.1), получаем

$$\begin{aligned} \psi(x) &= u(x, 0) = g_1(x) + g_2(0), \\ \varphi(y) &= u(0, y) = g_1(0) + g_2(y). \end{aligned}$$

Складывая эти два равенства, приходим к соотношению

$$g_1(x) + g_2(y) = \psi(x) + \varphi(y) - g_1(0) - g_2(0).$$

Учитывая, что

$$\psi(0) = \varphi(0) = g_1(0) + g_2(0),$$

получаем, что

$$g_1(x) + g_2(y) = \psi(x) + \varphi(y) - \psi(0).$$

Таким образом, функция $u(x, y)$ является решением интегрального уравнения Вольтерра второго рода

$$u(x, y) + \lambda D_{0x}^{-\alpha} D_{0y}^{-\beta} u(x, y) = F(x, y), \quad (3.3)$$

где

$$F(x, y) = D_{0x}^{-\alpha} D_{0y}^{-\beta} f(x, y) + \psi(x) + \varphi(y) - \psi(0). \quad (3.4)$$

Отсюда, в частности, следует единственность решения задачи (1.1), (1.3).

4. Представление решения. Решение интегрального уравнения (3.3) строится методом последовательных приближений, аналогично тому, как это сделано в работе [2]:

$$u(x, y) = F(x, y) - \lambda D_{0x}^{-\alpha} D_{0y}^{-\beta} F(x, y) + \dots + (-\lambda)^n D_{0x}^{-\alpha n} D_{0y}^{-\beta n} F(x, y) + \dots$$

В силу (1.3) и (2.2) имеем

$$u(x, y) = F(x, y) - \lambda \int_0^x \int_0^y w(x-s, y-t) F(s, t) dt ds.$$

С учетом (3.3) получаем

$$\begin{aligned}
 u(x, y) &= D_{0x}^{-\alpha} D_{0y}^{-\beta} f(x, y) - \lambda \int_0^x \int_0^y w(x-s, y-t) D_{0s}^{-\alpha} D_{0t}^{-\beta} f(s, t) dt ds \\
 &\quad + \psi(x) - \lambda \int_0^x \psi(s) \int_0^y w(x-s, y-t) dt ds + \varphi(y) \\
 &\quad - \lambda \int_0^y \varphi(t) \int_0^x w(x-s, y-t) ds dt \\
 &\quad - \psi(0) \left(1 - \lambda \int_0^x \int_0^y w(x-s, y-t) dt ds \right) \\
 &= \int_0^x \int_0^y f(s, t) \left[\frac{(x-s)^{\alpha-1} (y-t)^{\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} - \lambda D_{xs}^{-\alpha} D_{yt}^{-\beta} w(x-s, y-t) \right] dt ds \\
 &\quad + \psi(x) - \lambda \int_0^x \psi(s) D_{0y}^{-1} w(x-s, y) ds + \varphi(y) - \lambda \int_0^y \varphi(t) D_{0x}^{-1} w(x, y-t) dt \\
 &\quad - \psi(0) (1 - \lambda D_{0x}^{-1} D_{0y}^{-1} w(x, y)).
 \end{aligned}$$

Отсюда в силу равенств

$$\begin{aligned}
 &\frac{(x-s)^{\alpha-1} (y-t)^{\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} - \lambda D_{xs}^{-\alpha} D_{yt}^{-\beta} w(x-s, y-t) \\
 &= \frac{(x-s)^{\alpha-1} (y-t)^{\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} - \lambda (x-s)^{2\alpha-1} (y-t)^{2\beta-1} e_{\alpha, -\beta}^{2\alpha, 2\beta} (-\lambda (x-s)^\alpha (y-t)^\beta) \\
 &= w(x-s, y-t),
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

$$\begin{aligned}
 &1 - \lambda D_{0x}^{-1} D_{0y}^{-1} w(x, y) \\
 &= 1 - \lambda x^\alpha y^\beta e_{\alpha, -\beta}^{\alpha+1, \beta+1} (-\lambda x^\alpha y^\beta) = e_{\alpha, -\beta}^{1, 1} (-\lambda x^\alpha y^\beta) = D_{0x}^{\alpha-1} D_{0y}^{\beta-1} w(x, y)
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

следует формула (2.4). При выводе (4.1) и (4.2) мы воспользовались формулами

$$\begin{aligned}
 D_{0x}^\varepsilon x^{\mu-1} e_{\alpha, -\beta}^{\mu, \delta} (cx^\alpha) &= x^{\mu-\varepsilon-1} e_{\alpha, -\beta}^{\mu-\varepsilon, \delta} (cx^\alpha), \\
 D_{0y}^\varepsilon y^{\delta-1} e_{\alpha, -\beta}^{\mu, \delta} (cy^\beta) &= y^{\delta-\varepsilon-1} e_{\alpha, -\beta}^{\mu, \delta-\varepsilon} (cy^\beta), \\
 e_{\alpha, -\beta}^{\mu, \delta} (z) &= \frac{1}{\Gamma(\mu)\Gamma(\delta)} + z e_{\alpha, -\beta}^{\mu+\alpha, \delta+\beta} (z),
 \end{aligned}$$

которые следуют из определения формулы дробного дифференцирования (интегрирования) степенных функций (см., например, [4; с. 15])

$$D_{0z}^\mu \frac{z^{\delta-1}}{\Gamma(\delta)} = \frac{z^{\delta-\mu-1}}{\Gamma(\delta-\mu)}.$$

Покажем, что функция $u(x, y)$ является искомым решением для уравнения (1.1). Продифференцируем уравнение (3.3) по x, y и получим

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} u(x, y) + \lambda D_{0x}^{1-\alpha} D_{0y}^{1-\beta} u(x, y) = D_{0x}^{1-\alpha} D_{0y}^{1-\beta} f(x, y).$$

Поддействуем на последнее равенство оператором $D_{0x}^{\alpha-1}D_{0y}^{\beta-1}$. Учитывая условия, наложенные на правую часть, и краевые условия, отсюда получаем, что $u(x, y)$ является регулярным решением уравнения (1.1). Для доказательства выполнения краевых условий устремляем поочередно x и y в (3.2) к нулю. Это завершает доказательство теоремы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. М. Нахушев, *Дробное исчисление и его применение*, Физматлит, М., 2003.
- [2] Р. А. Пшибихова, “Аналог задачи Гурса для обобщенного телеграфного уравнения дробного порядка”, *Дифференц. уравнения*, **50**:6 (2014), 839–843.
- [3] А. С. Ерёмин, “Три задачи для одного уравнения в частных дробных производных”, *Труды Всероссийской научной конференции, Дифференциальные уравнения и краевые задачи (26–28 мая 2004 г.)*, Часть 3, Матем. моделирование и краев. задачи, СамГТУ, Самара, 2004, 94–98.
- [4] А. В. Псху, *Уравнения в частных производных дробного порядка*, Наука, М., 2005.
- [5] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo, *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, North-Holland Math. Stud., **204**, Elsevier, Amsterdam, 2006.
- [6] В. И. Смирнов, *Курс высшей математики*, Т. 5, Физматгиз, М., 1959.
- [7] V. S. Kiryakova, “The multi-index Mittag-Leffler functions as generators of fractional calculus operators and Laplace transforms”, *International Conference on Mathematics and Its Applications (ICMA 2004)*, Extended Abstracts, Kuwait Univ., 169–175.

Р. А. Пшибихова

Институт прикладной математики и автоматизации,
г. Нальчик
E-mail: Pshibihova@mail.ru

Поступило

17.05.2015

Исправленный вариант

03.11.2015