Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. М. Самойлов, О свойстве первичности центральных полиномов первичных многообразий ассоциативных алгебр, *Матем. заметки*, 2016, том 99, выпуск 3, 404–408

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10797>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 17:45:28

О свойстве первичности центральных полиномов первичных многообразий ассоциативных алгебр

Л. М. Самойлов

В работе доказывается, что если $f(x_1, \dots, x_n)g(y_1, \dots, y_m)$ – полилинейный центральный полином для вербально первичного T -идеала Γ над полем произвольной характеристики, то оба полинома $f(x_1, \dots, x_n)$ и $g(y_1, \dots, y_m)$ будут центральными для Γ .

Библиография: 8 названий.

DOI: 10.4213/mzm10797

Все рассматриваемые в работе алгебры предполагаются ассоциативными алгебрами над полем.

Полилинейный полином $f = f(x_1, \dots, x_n)$ называется *центральным полиномом* для T -идеала Γ , если $f \notin \Gamma$, но $[f, y] \in \Gamma$. Иначе говоря, если A – алгебра с идеалом тождеств Γ , то все значения $f(a_1, \dots, a_n)$ ($a_1, \dots, a_n \in A$) лежат в центре алгебры A , и при этом полином f не является тождеством алгебры A .

В [1] Реев показал, что если полилинейный полином $f(x_1, \dots, x_n)g(y_1, \dots, y_m)$ является центральным полиномом для алгебры матриц порядка k , то оба полинома f и g будут центральными. В работе [2] Диниц доказал аналогичное свойство для идеалов тождеств алгебр $M_k(E)$ (алгебра матриц порядка k над алгеброй Грассмана) и $M_{k,k}$ (матричная супералгебра $M_{k,k}$, являющаяся подалгеброй $M_{2k}(E)$) над полем нулевой характеристики. Оба эти идеала тождеств являются вербально первичными.

Понятие вербально первичного T -идеала – одного из основных понятий в теории тождеств ассоциативных алгебр – было введено Кемером в работе [3]: T -идеал Γ называется *вербально первичным*, если для произвольных T -идеалов Γ_1, Γ_2 из включения $\Gamma_1 \cdot \Gamma_2 \subseteq \Gamma$ следует, что или $\Gamma_1 \subseteq \Gamma$, или $\Gamma_2 \subseteq \Gamma$. Многообразие называется *первичным*, если идеал тождеств этого многообразия является вербально первичным. В работе [3] Кемер описал все первичные многообразия над полем нулевой характеристики. Проблема описания (а так же исследования свойств) первичных многообразий над полем положительной характеристики является в настоящий момент одной из ключевых проблем в ассоциативной PI -теории.

Хорошо известно, что для каждого ненулевого вербально первичного T -идеала Γ существует полилинейный центральный полином. Над полем нулевой характеристики это следует из результатов работ [3]–[4]: Кемер показал, что каждое первичное

многообразие есть или $\text{Var}(M_{n,k})$, или $\text{Var}(M_n(G))$; Размыслов построил центральные полиномы для многообразий первого типа, а Охитин – для многообразий второго типа. Существование центральных полиномов для первичных многообразий над полем положительной характеристики было доказано Беловым в работе [6].

В настоящей работе мы обобщим результаты Реева и Диница, доказав свойство первичности центральных полиномов для произвольных вербально первичных T -идеалов, как над полем нулевой характеристики, так и над полем положительной характеристики.

ТЕОРЕМА 1. Пусть Γ – вербально первичный T -идеал над полем произвольной характеристики. Если для полилинейного полинома $[fg, y]$ выполнено включение $[fg, y] \in \Gamma$, то имеет место один из трех случаев:

- 1) $f \in \Gamma$;
- 2) $g \in \Gamma$;
- 3) оба полинома f и g являются центральными для T -идеала Γ .

Теорема 1 является следствием результатов Белова (см. [6]) об устойчивости, о существовании слабых тождеств и центральных полиномах для первичных многообразий.

Напомним определение *устойчивого* T -идеала. Если $f(x_1, \dots, x_n)$ – полилинейный полином, то запишем

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_i u_i x_k v_i,$$

где u_i, v_i – некоторые полиномы. На пространстве P_n полилинейных полиномов от переменных $x_1, \dots, x_n$ определим оператор отражения A_{x_k} относительно переменной x_k :

$$A_{x_k} \left(\sum_i u_i x_k v_i \right) = \sum_i v_i x_k u_i.$$

T -идеал Γ называется *устойчивым*, если для всех n пространства $P_n \cap \Gamma$ замкнуты относительно всех операторов отражения $A_{x_1} \dots A_{x_n}$. Понятие устойчивого T -идеала было введено Латышевым в работах [7], [8]. Устойчивость вербально первичных T -идеалов над полями нулевой характеристики была доказана Охитиным в [5]. Доказательство Охитина опирается на классификацию первичных многообразий над полями нулевой характеристики, полученную Кемером в [3], и поэтому не переносится в случай положительной характеристики основного поля.

Над полями положительной характеристики устойчивость произвольного вербально первичного T -идеала была доказана Беловым в [6]. Несложно показать, что для устойчивого T -идеала существование центрального полинома равносильно существованию слабого по некоторой переменной тождества (полином $f(x_1, \dots, x_n)$ называется *слабым по переменной x_1 тождеством T -идеала Γ* , если $f(x_1, \dots, x_n) \notin \Gamma$, но $f([x, y], x_2, \dots, x_n) \in \Gamma$). В той же работе Белов показал, что у каждого вербально первичного T -идеала есть слабые тождества, что в силу свойства устойчивости равносильно наличию центральных полиномов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Будем доказывать, что если $[fg, y] \in \Gamma$, то или $f \in \Gamma$, или $[g, x] \in \Gamma$. Совершенно аналогично доказывается, что или $g \in \Gamma$, или

$[f, x] \in \Gamma$. Эти два утверждения вместе равносильны теореме. Везде в доказательстве все полиномы будут полилинейными, а все сравнения будут по модулю Γ .

Отметим равенство

$$\sum_{i=1}^n g(x_1, \dots, [x_i, x], \dots, x_n) = [g(x_1, \dots, x_n), x].$$

Из него вытекает, что если $f(g(x_1, \dots, x_n), y_2, \dots, y_m) \in \Gamma$, то

$$f([g(x_1, \dots, x_n), x], y_2, \dots, y_m) \in \Gamma.$$

Будем говорить, что в этом случае полином $f([g, x], \dots)$ получен из полинома $f(g, \dots)$ подстановкой $g \rightarrow [g, x]$.

Непосредственно проверяется следующее свойство операторов отражения:

$$A_x([f(x, \dots)g, z]) = \tilde{f}(g[z, x], \dots),$$

где $\tilde{f} = \tilde{f}(x, \dots) = A_x f(x, \dots)$. Из условия теоремы 1 и этого свойства получаем тождество

$$\tilde{f}(g[z, x]) \equiv 0. \quad (1)$$

В (1) и в дальнейшем в записи полинома $\tilde{f}$ опускаем все переменные, кроме первой.

Из тождества (1) подстановкой $g \rightarrow [a, g]$ получаем тождество

$$\tilde{f}([a, g][z, x]) \equiv 0. \quad (2)$$

Подставляя в (2) $a = ab$, имеем с использованием (2):

$$0 \equiv \tilde{f}([ab, g][z, x]) = \tilde{f}(a[b, g][z, x] + [a, g]b[z, x]) \equiv \tilde{f}([b, g]a[z, x] + [a, g]b[z, x]). \quad (3)$$

Теперь подставим в (2) $z = bz$:

$$0 \equiv \tilde{f}([a, g][bz, x]) = \tilde{f}([a, g]b[z, x] + [a, g][b, x]z). \quad (4)$$

Вычтем из тождества (3) тождество (4):

$$0 \equiv \tilde{f}([b, g]a[z, x] - [a, g][b, x]z) = \tilde{f}([b, g][az, x] - [b, g][a, x]z - [a, g][b, x]z),$$

откуда по модулю тождества (2)

$$\tilde{f}([b, g][a, x]z + [a, g][b, x]z) \equiv 0. \quad (5)$$

Применяя к (5) оператор A_z , получаем тождество

$$f(z, \dots) \cdot ([b, g][a, x] + [a, g][b, x]) \equiv 0.$$

Так как идеал Γ является вербально первичным, то или $f \equiv 0$ (в этом случае теорема 1 доказана), или Γ содержит тождество

$$[b, g][a, x] + [a, g][b, x] \equiv 0. \quad (6)$$

Применяя к этому тождеству оператор A_x , получаем

$$[x[b, g], a] + [x[a, g], b] \equiv 0. \quad (7)$$

Подставив в (7) вместо x центральный полином $c(z_1, \dots, z_t)$ вербально первичного T -идеала Γ , получаем тождество

$$c(z_1, \dots, z_t) \cdot ([b, g], a] + [[a, g], b]) \equiv 0.$$

Поскольку T -идеал Γ вербально первичен и $c(z_1, \dots, z_t) \notin \Gamma$, то

$$[[b, g], a] + [[a, g], b] \equiv 0. \quad (8)$$

Сделаем в (8) подстановку $a = ax$, получаем по модулю (8):

$$\begin{aligned} 0 &\equiv [[b, g], ax] + [[ax, g], b] = a[[b, g], x] + [[b, g], a]x + [a[x, g], b] + [[a, g]x, b] \\ &= a[[b, g], x] + [[b, g], a]x + a[[x, g], b] + [a, b][x, g] + [a, g][x, b] + [[a, g], b]x \\ &\equiv [a, b][x, g] + [a, g][x, b], \end{aligned}$$

т.е.

$$[a, x][b, g] + [a, g][b, x] \equiv 0.$$

Из этого тождества и (6) следует тождество

$$[[u, v], [t, g]] \equiv 0. \quad (9)$$

Делая в (6) подстановку $g \rightarrow [t, g]$, $b \rightarrow [u, v]$ и используя (9), получаем

$$0 \equiv [[u, v], [t, g]][a, x] + [a, [t, g]][[u, v], x] \equiv [a, [t, g]][[u, v], x]. \quad (10)$$

Из (10) и T -первичности идеала Γ заключаем, что или $[a, [t, g]] \in \Gamma$ или $[[u, v], x] \in \Gamma$. В любом случае выполнено включение

$$[a, [t, g]] \in \Gamma. \quad (11)$$

Подставляя в (6) $a \rightarrow [z, t]$, используя тождество Якоби и (11), имеем

$$\begin{aligned} 0 &\equiv [b, g][[z, t], x] + [[z, t], g][b, x] \\ &= [b, g][[z, t], x] - [[t, g], z][b, x] - [[g, z], t][b, x] \equiv [b, g][[z, t], x]. \end{aligned} \quad (12)$$

Из этого тождества и T -первичности идеала Γ следует, что или $[b, g] \in \Gamma$ (в этом случае теорема 1 доказана), или $[[z, t], x] \in \Gamma$. Рассмотрим случай $[[z, t], x] \in \Gamma$. Тождество $[fg, x] \equiv 0$ можно записать в виде $f[g, x] + [f, x]g \equiv 0$, откуда подстановкой $g \rightarrow [g, y]$ получаем тождество $[f, x][g, y] \equiv 0$. Так как идеал Γ вербально первичен, то или $[g, y] \equiv 0$ (в этом случае теорема 1 доказана), или $[f, x] \equiv 0$. В последнем случае из тождества $f[g, x] + [f, x]g \equiv 0$ получаем, что $f[g, x] \equiv 0$, откуда или $f \equiv 0$, или $[g, x] \equiv 0$, что и требовалось доказать.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A. Regev, “A primeness property for central polynomials”, *Pacific J. Math.*, **83**:1 (1979), 269–271.
- [2] Diogo Diniz Pereira da Silva e Silva, “A primeness property for central polynomials of verbally prime P.I. algebras”, *Linear and Multilinear Algebra*, **63**:11 (2015), 2151–2158.
- [3] А. Р. Кемер, “Многообразия и Z_2 -градуированные алгебры”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **48**:5 (1984), 1042–1059.
- [4] Ю. П. Размыслов, “Тождества со следом и центральные полиномы в матричных супералгебрах $M_{n,k}$ ”, *Матем. сб.*, **128**:2 (1985), 194–215.
- [5] С. В. Охитин, “Об устойчивых T -идеалах и центральных полиномах”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1986, № 3, 85–88.
- [6] А. Я. Белов, “Ассоциативных PI -алгебр, совпадающих со своим коммутантом, не существует”, *Сиб. матем. журн.*, **44**:6 (2003), 1239–1254.
- [7] В. Н. Латышев, “О некоторых многообразиях ассоциативных алгебр”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **37**:5 (1973), 1010–1037.
- [8] В. Н. Латышев, “Устойчивые идеалы тождеств”, *Алгебра и логика*, **20**:5 (1981), 563–570.

Л. М. Самойлов

Ульяновский государственный университет

E-mail: samoilov_l@rambler.ru

Поступило

23.05.2015

Исправленный вариант

21.10.2015