Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Аптекарев, Д. Н. Туляков, М. Л. Ятцелев, О параметризации одной комплексной алгебраической кривой рода 2, *Матем. заметки*, 2015, том 98, выпуск 5, 782–785

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10799>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 04:28:33

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

О параметризации одной комплексной алгебраической кривой рода 2

А. И. Аптекарев, Д. Н. Туляков, М. Л. Ятцелев

1. Введение. В настоящей заметке мы находим явный вид параметризации $(w(t), z(t))$ одного семейства алгебраических кривых в $\mathbb{C}^2 = \mathbb{C}_w \times \mathbb{C}_z$

$$w^3 - 3A(z)w - 2B(z) = 0, \quad (1)$$

где

$$A(z) := \frac{1}{z^2 - 1}, \quad B(z) := \frac{z}{(z^2 - a^2)(z^2 - 1)}, \quad a \in (0, 1). \quad (2)$$

Методы нахождения явного вида униформизаций (и более обще параметризаций) представляют самостоятельный интерес. Их наличие облегчает анализ различных объектов, например, абелевых интегралов $\int w dz$. Наш интерес к параметризациям алгебраических кривых порядка выше чем 2 связан с общей гипотезой Наттолла об асимптотике рациональных аппроксимаций Эрмита–Паде для аналитических вектор-функций с точками ветвления (см. [1]). Согласно этой гипотезе предельное распределение полюсов этих аппроксимаций для функций (см. [2])

$$f_j(z) = \ln \left(\frac{z - a_j}{z - b_j} \right), \quad j = 1, 2, \quad (3)$$

описывается алгебраической функцией (1) при

$$A(z) := \frac{P_2(z)}{\Pi_4(z)}, \quad B(z) := \frac{P_1(z)}{\Pi_4(z)}, \quad \Pi_4(z) = \prod_{j=1}^2 (z - a_j)(z - b_j). \quad (4)$$

Здесь при определении неизвестных коэффициентов у $P_k(z) = z^k + \dots$, $k = 1, 2$, используется условие мнимости периодов абелевых интегралов

$$\operatorname{Re} \oint w dz = 0,$$

где интегрирование ведется вдоль любого цикла римановой поверхности $\mathfrak{R}$ алгебраической функции (1), (4). Для случаев рода 1 и 2 у кривых (1), (4) в [3] предложены эллиптические и соответственно ультраэллиптические униформизации. В случае рода 0 в [4] найдены рациональные униформизации.

Исследование конкретного семейства кривых (1), (2) мотивировано задачей о рациональных аппроксимациях Эрмита–Паде для пары функций (3) при

$$a_1 = -1, \quad b_1 = a; \quad a_2 = -a, \quad b_2 = 1, \quad a \in \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (грант № 14-21-00025).
DOI: 10.4213/mzm10799

Эта задача была поставлена и исследовалась Шталем в [5], [6], однако ее детальное решение было получено лишь недавно (см. [7]). Причем, тот факт, что единственный нетривиальный период абелевого интеграла от (1), (2) по замкнутому контуру $\gamma \subset \mathfrak{R}$ имеет положительную действительную часть

$$\exists \gamma \subset \mathfrak{R}: \quad \operatorname{Re} \oint_{\gamma} w \, dz > 0, \quad a \in \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad (5)$$

играл важную роль в доказательствах из [7]. Ниже мы убедимся, что (5) является следствием полученной ниже параметризации кривой (1), (2).

2. Формулировка результата и следствие. Справедлива

ТЕОРЕМА. *Для кривой (1), (2) справедлива параметризация*

$$\begin{cases} w = -iC \left(\varepsilon t + \frac{1}{\varepsilon t} \right), \\ z = \frac{\tilde{a} + it^3 \tilde{\tilde{a}}}{1 - t^6}, \end{cases} \quad \varepsilon^3 = 1, \quad C = \frac{\tilde{\tilde{a}} + it^3 \tilde{a}}{(1 - a^2)(1 + t^6)}, \quad (6)$$

где

$$\tilde{a} := \sqrt{a^2 - (1 - a^2)t^6}, \quad \tilde{\tilde{a}} := \sqrt{(1 - a^2) - a^2 t^6}. \quad (7)$$

Таким образом, теорема устанавливает отображение совместной римановой поверхности $\mathfrak{H}$ вектор-функции $(\tilde{a}, \tilde{\tilde{a}})$ на риманову поверхность $\mathfrak{R}$ функции (1), (2). В качестве четырехлистной $\mathfrak{H}$ над $\mathbb{C}_t$ можно взять риманову поверхность функции $H := a^2 \tilde{a} - (1 - a^2) \tilde{\tilde{a}}$. Корни в (7) надо понимать как аналитические продолжения арифметических корней от положительных аргументов.

Прежде чем перейти к следствию теоремы, зафиксируем глобальную структуру ветвей алгебраической функции (1), (2) (иначе, структуру трех листов $\mathfrak{R} = \{\mathfrak{R}_j\}$ над $\mathbb{C}_z$). Локально, при $z \rightarrow \infty$ фиксируем из (1), (2) ветви w :

$$w_0(z) = \frac{2}{z} + \dots, \quad w_i(z) = -\frac{1}{z} + \dots, \quad i = 1, 2.$$

Функция $w = \{w_j(z)\}_{j=0}^2$ имеет 6 точек ветвления: $z = \pm 1$ – точки ветвления 2-го порядка (в них совпадают 2 ветви w), $z = \pm a$ (3-го порядка) и $z = \pm id$ (2-го порядка), где $d = a^2/\sqrt{1 - 2a^2}$. Тем самым трехлистная риманова поверхность $\mathfrak{R}$ имеет род 2.

Анализ уравнения (1), (2) приводит к тому, что зафиксированные в т. ∞ ветви w имеют голоморфные продолжения в следующие области:

$$\begin{aligned} w_0 &\in H(\overline{\mathbb{C}} \setminus [-1, 1]), & w_1 &\in H(\overline{\mathbb{C}} \setminus \{-a, a\} \cup [+id, +i\infty] \cup [-id, -i\infty]), \\ w_2 &\in H(\overline{\mathbb{C}} \setminus \{-1, -a\} \cup [a, 1] \cup [+id, +i\infty] \cup [-id, -i\infty]). \end{aligned} \quad (8)$$

Тем самым границы областей голоморфности определяют проекции разрезов соответствующих листов $\mathfrak{R} = \{\mathfrak{R}_j\}_{j=0}^2$.

Пусть $t \in [0, t_-]$, $t_- := (a^2/(1 - a^2))^{1/6}$; тогда оба подкоренные выражения в (7) положительны и параметризация z в (6) определяет аналитическую дугу $\tilde{\gamma} := z(t)$ в $\mathbb{C}$, соединяющую точки $z(0) = a$ и $z(t_-) = ia/\sqrt{1 - 2a^2} > id$. Определим на $\mathfrak{R}$ следующий замкнутый контур γ . Начало в тройной точке ветвления a . Контур γ идет по листу $\mathfrak{R}_1$ вдоль поднятия дуги $\tilde{\gamma}$ до прообраза на $\mathfrak{R}_1$ проекции в точку $z(t_-)$, затем контур γ идет вниз вдоль поднятия на $\mathfrak{R}_1$ мнимой оси до точки ветвления id , там переходит на лист $\mathfrak{R}_2$, по которому он возвращается в точку ветвления a вдоль пути, имеющему ту же проекцию, что и $\gamma|_{\mathfrak{R}_1}$.

СЛЕДСТВИЕ. *Для цикла γ справедливо (5).*

Для проверки следствия заметим, что $\operatorname{Re} w_1(z) = \operatorname{Re} w_2(z)$, $z \in [id, +\infty]$, поэтому

$$\operatorname{Re} \oint_{\gamma} w dz = \int_{\tilde{\gamma}} (w_1(z) - w_2(z)) dz = \int_0^{t^-} (w_1 - w_2) \frac{dz}{dt} dt.$$

Отметим, что выбор ветви (8) в параметризации (6) осуществляется фиксацией ветви кубического корня из единицы ε . При этом, ветви w_1 соответствует $\varepsilon_1 = (i\sqrt{3} - 1)/2$, а $w_2 \leftrightarrow \varepsilon_2 = (-i\sqrt{3} - 1)/2$. Таким образом,

$$w_1 - w_2 = \sqrt{3} C \left(t - \frac{1}{t} \right).$$

После упрощающих преобразований имеем из (6):

$$\frac{dz}{dt} = \frac{3t^5(3a^2 - 1 + (a^2 - 1)t^6)}{\tilde{a}(t^6 - 1)^2} - i \frac{3t^2(a^2 - 1 + (3a^2 - 1)t^6)}{\tilde{\tilde{a}}(t^6 - 1)^2}.$$

Подитоживая, получаем

$$(w_1 - w_2) \frac{dz}{dt} = \frac{3\sqrt{3}(1 - 2a^2)}{\tilde{a}\tilde{\tilde{a}}t^2(t^4 + t^2 + 1)} - i \frac{3\sqrt{3}t}{(t^4 + t^2 + 1)},$$

что и доказывает (5).

3. Доказательство теоремы. Подход, который мы используем для нахождения параметризации, достаточно общий для кривых, задаваемых уравнением (1). Он базируется на тех же соображениях, что и формулы Кардано. Представим решение в виде $w = u + v$, причем все три ветви решения будем искать в виде

$$w_j = \varepsilon^j u + \varepsilon^{-j} v, \quad j = 0, 1, 2, \quad \varepsilon^3 = 1.$$

Тогда соотношения Виета для (1) дают

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = 2B(z) \\ uv = A(z) \end{cases} \implies \left(\frac{u^3 - v^3}{u^3 + v^3} \right)^2 = \frac{B^2 - A^3}{B^2}.$$

Выбирая параметр t в виде

$$t^2 = \frac{u}{v} \implies \left(\frac{t^6 - 1}{t^6 + 1} \right)^2 = \frac{B^2 - A^3}{B^2} = \frac{(1 - 2a^2)z^2 + a^4}{z^2(1 - z^2)}, \quad (9)$$

получаем уравнение зависимости $z(t)$. Для нахождения $w(t)$ используем

$$w = u \left(1 + \frac{v}{u} \right), \quad u \left(\frac{(u/v)^3 + 1}{(u/v)^2} \right) = \frac{u^3 + v^3}{uv} = \frac{2B}{A}. \quad (10)$$

Обозначая $T_{\pm} = t^6 \pm 1$, запишем (9) в виде

$$z^4 - z^2 \left(\frac{T_-^2 - (1 - 2a^2)T_+^2}{T_-^2} \right) + a^4 \frac{T_+^2 T_-^2}{T_-^4} = 0,$$

и по формуле для решения биквадратного уравнения имеем

$$z = \frac{1}{2T_-} (\pm R_+ \pm R_-), \quad R_{\pm} := \sqrt{T_-^2 - (1 - 2a^2)T_+^2 \pm 2a^2 T_+ T_-}.$$

Тождественные преобразования подкоренных выражений приводят к

$$R_+ = 2t^3 i \sqrt{(1 - a^2) - a^2 t^6}, \quad R_- = 2 \sqrt{a^2 - (1 - a^2)t^6},$$

что с учетом (7) доказывает параметризацию $z(t)$ в (6). Наконец, используя в правой части (10) явный вид (2), имеем

$$w = (1 + t^{-2}) \left(\frac{t^4}{t^6 + 1} \right) \frac{z^2 - a^2}{2z},$$

и подставляя сюда полученное выражение $z(t)$, после нетрудных тождественных преобразований приходим к параметризации $w(t)$ в (6).

Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] J. Nuttall, *J. Approx. Theory*, **42**:4 (1984), 299–386. [2] A. I. Aptekarev, A. B. J. Kuijlaars, W. Van Assche, *Int. Math. Res. Pap. IMRP*, **2008**:Article ID rpm007 (2008). [3] A. I. Aptekarev, D. N. Toulyakov, W. Van Assche, *J. Comput. Appl. Math.*, **284** (2015), 38–49. [4] A. I. Aptekarev, V. A. Kalyagin, V. G. Lysov, D. N. Toulyakov, *J. Comput. Appl. Math.*, **233**:2 (2009), 602–616. [5] H. Stahl, *Nonlinear Numerical Methods and Rational Approximation* (Wilrijk, 1987), Math. Appl., **9**, D. Reidel, Dordrecht, 1988, 23–53. [6] A. I. Aptekarev, H. Stahl, *Progress in Approximation Theory*, Springer Ser. Comput. Math., **19**, Springer, New York, 1992, 127–167. [7] A. I. Aptekarev, W. Van Assche, M. L. Yattselev, *Hermite–Padé Approximants for a Pair of Cauchy Transforms with Interlacing Symmetric Supports*, 2015, [arXiv: 1505.03993](#).

А. И. Аптекарев

Институт прикладной математики
им. М. В. Келдыша
Российской академии наук, г. Москва
E-mail: aptekaa@keldysh.ru

Поступило
30.05.2015

Д. Н. Туляков

Институт прикладной математики
им. М. В. Келдыша
Российской академии наук, г. Москва
E-mail: dntulyakov@gmail.com

М. Л. Ятцелев

Indiana University –
Purdue University Indianapolis, USA
E-mail: maxyatts@math.iupui.edu