Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ш. А. Аюпов, Описание вещественных AW^* -факторов типа I, *Матем. заметки*, 2004, том 76, выпуск 3, 344–349

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm108>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 06:21:13

УДК 517.98

ОПИСАНИЕ ВЕЩЕСТВЕННЫХ AW^* -ФАКТОРОВ ТИПА I

Ш. А. Аюпов

В статье рассматриваются вещественные AW^* -алгебры, т.е. вещественные C^* -алгебры, являющиеся бэровскими $*$ -кольцами. Доказано, что всякий вещественный AW^* -фактор типа I (т.е. содержащий минимальный проектор) изометрически $*$ -изоморфен алгебре $B(H)$ всех ограниченных линейных операторов на вещественном или кватернионном гильбертовом пространстве H и, в частности, является вещественным W^* -фактором. В случае комплексных AW^* -алгебр аналогичный результат был доказан Капланским.

Библиография: 12 названий.

Введение. В работах Капланского [1], [2] был исследован специальный класс C^* -алгебр, названных AW^* -алгебрами (иногда их называют алгебрами Капланского), которые представляют абстрактное обобщение W^* -алгебр (алгебр фон Неймана). Впервые пример (коммутативной) AW^* -алгебры, не являющейся W^* -алгеброй, привел Дикс-мье [3]. В работе [2] Капланский доказал, что AW^* -алгебра типа I является W^* -алгеброй тогда и только тогда, когда ее центр является W^* -алгеброй, и высказал гипотезу, что это должно быть верно и для всех AW^* -алгебр. Однако это было опровергнуто Такенучи [4] и Дэем [5], которые независимо друг от друга построили примеры AW^* -факторов, не являющихся W^* -факторами.

В нашей работе [6] был рассмотрен более общий класс алгебр: вещественные AW^* -алгебры – это вещественные C^* -алгебры [7], являющиеся одновременно бэровскими $*$ -кольцами. В работе [6] была исследована связь между вещественными AW^* -алгебрами и их комплексификациями, построены примеры, показывающие, что в отличие от вещественных C^* - и W^* -алгебр, у которых комплексификации являются (комплексными) C^* - и W^* -алгебрами, у вещественной AW^* -алгебры комплексификация может не быть AW^* -алгеброй. Построенные в [6] примеры были коммутативными и в связи с этим была сформулирована проблема: существует ли вещественный AW^* -фактор, у которого комплексификация не является AW^* -алгеброй.

В настоящей работе мы дадим отрицательный ответ на этот вопрос для частного случая AW^* -факторов типа I. Более точно, мы докажем, что произвольный AW^* -фактор типа I (вещественный или комплексный) $*$ -изоморфен алгебре $B(H)$ всех ограниченных линейных операторов на гильбертовом пространстве H над полем действительных чисел $\mathbb{R}$, комплексных чисел $\mathbb{C}$ или телом кватернионов $\mathbb{Q}$. В частности, всякий AW^* -фактор типа I является W^* -фактором (вещественным или комплексным), и потому его комплексификация также является W^* -алгеброй (а значит, и AW^* -алгеброй). Полученный результат обобщает результат Капланского, описывающий комплексные AW^* -факторы типа I [2, § 2].

1. Вещественные AW^* -алгебры. Пусть A – вещественная банахова алгебра. Пространство $A_C = A + iA$ с нормой $\|\cdot\|$ называется *комплексификацией* A , если $(A_C, \|\cdot\|)$ – комплексная банахова алгебра, $\|a + i0\| = \|a\|$ совпадает с исходной нормой на A и, кроме того, $\|a + ib\| = \|a - ib\|$ для всех $a, b \in A$. Для всякой вещественной банаховой алгебры существует единственная (с точностью до эквивалентности норм) комплексификация [7]. Если A является банаховой $*$ -алгеброй, то инволюцию $*$ можно естественным образом продолжить до $A_C = A + iA$ так, что A_C становится комплексной банаховой $*$ -алгеброй.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Вещественная банахова $*$ -алгебра A называется *вещественной C^* -алгеброй*, если на ее комплексификации $A_C = A + iA$ существует норма, относительно которой A_C является (комплексной) C^* -алгеброй.

Есть и другие эквивалентные определения вещественной C^* -алгебры [7, следствие 5.2.11]. Например, вещественная банахова $*$ -алгебра A является вещественной C^* -алгеброй тогда и только тогда, когда A изометрически изоморфна равномерно замкнутой $*$ -подалгебре в $B(H)$, где H – вещественное гильбертово пространство. Если A банахова $*$ -алгебра с единицей, то она является C^* -алгеброй в том и только в том случае, когда $\mathbb{I} + x^*x$ обратимый элемент в A для любого $x \in A$ и $\|a^*a\| = \|a\|^2$ для всех $a \in A$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Вещественная C^* -алгебра A называется *вещественной W^* -алгеброй*, если комплексная C^* -алгебра $A_C = A + iA$ является (комплексной) W^* -алгеброй.

Известно [7, § 20], что вещественная C^* -алгебра A является вещественной W^* -алгеброй тогда и только тогда, когда она изометрически $*$ -изоморфна слабо замкнутой $*$ -подалгебре в вещественной $B(H)$, содержащей единичный оператор $\mathbb{I}$, или, что эквивалентно, $*$ -подалгебре в $B(H)$, совпадающей со своим бикоммутантом. Подробнее о вещественных C^* - и W^* -алгебрах см. [7].

Пусть A – вещественная C^* -алгебра.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. A называется *вещественной AW^* -алгеброй* (или вещественной алгеброй Капланского), если для любого непустого множества $S \subset A$ его правый аннулятор

$$R(S) = \{x \in A : sx = 0 \quad \forall s \in S\}$$

порождается проектором, т.е. имеет вид $R(S) = gA$ для некоторого проектора $g \in A$. Другими словами, A является одновременно вещественной C^* -алгеброй и бэровским $*$ -кольцом [8].

Множество $Z(A) = \{x \in A : xy = yx \quad \forall y \in A\}$ называется *центром* A .

Вещественная AW^* -алгебра A называется *вещественным AW^* -фактором*, если $Z(A) = \{\lambda \mathbb{I}, \lambda \in \mathbb{R}\}$, где $\mathbb{I}$ – единица A , $\mathbb{R}$ – поле вещественных чисел.

ЗАМЕЧАНИЕ. Понятие вещественного AW^* -фактора отличается от понятия бэровского $*$ -фактора [8, с. 36], которое означает, что A содержит только два центральных проектора $0, \mathbb{I}$. Ясно, что вещественный AW^* -фактор всегда является бэровским $*$ -фактором, но обратное неверно. Например $\mathbb{C}$ является бэровским $*$ -фактором, но $Z(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \neq \mathbb{R}$.

Подробнее о вещественных AW^* -алгебрах см. [6].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть A – вещественная C^* -алгебра, $A_s = \{x \in A: x^* = x\}$, $A_k = \{x \in A: x^* = -x\}$. Если элемент $x \in A_s$ коммутирует со всеми элементами из A_s , то $x \in Z(A)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x \in A_s$ и $[x, a] = 0$ для всех $a \in A_s$. Если $b \in A_k$, то, очевидно, $[x, b]^* = [x, b] \in A_s$ и потому $[x, [x, b]] = 0$. Тогда по теореме Путнама [9] (см. также [10, следствие 2.2.10]) отсюда следует, что $[x, b] = 0$. Так как $A = A_s \oplus A_k$, это значит, что $[x, y] = 0$ для всех $y \in A$, т.е. $x \in Z(A)$.

СЛЕДСТВИЕ. В любой вещественной C^* -алгебре A имеет место равенство $[Z(A)]_s = Z(A_s)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2 (ср. [8, § 6, утверждение 2]). В вещественной AW^* -алгебре правый аннулятор правого идеала J является главным идеалом, порожденным центральным проектором, т.е. $R(J) = hA$ для некоторого проектора $h \in Z(A)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть J – правый идеал, т.е. $JA \subset J$. Тогда, очевидно, $R(J)$ является левым идеалом. В самом деле, если $x \in R(J)$, $a \in A$, то для любого $y \in J$ имеем $y(ax) = (ya)x = 0$, так как $ya \in J$. Значит, $ax \in R(J)$, т.е. $R(J)$ – левый идеал. Но с другой стороны, очевидно, что $R(J)$ – правый идеал, который по аксиоме бэровского $*$ -кольца имеет вид $R(J) = hA$.

Итак $R(J) = hA$ является двусторонним идеалом. Покажем, что $h \in Z(A)$. В самом деле, так как $A(hA) \subset hA$, то $h(xhy) = xhy$ для всех $x, y \in A$. В частности, при $y = \mathbb{I}$ имеем $h x h = x h$ для всех $x \in A$. Подставляя x^* вместо x , имеем

$$h x^* h = x^* h \quad \forall x \in A.$$

Следовательно,

$$x h = h x h = (h x^* h)^* = (x^* h)^* = h x \quad \forall x \in A,$$

т.е. $h \in Z(A)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Проектор e в вещественной AW^* -алгебре A называется *полуабелевым*, если $(eAe)_s$ является коммутативной алгеброй.

ЗАМЕЧАНИЕ. Очевидно, если проектор e абелев (т.е. eAe коммутативна), то e полуабелев. Обратное, вообще говоря, не верно: например $\mathbb{I}$ является полуабелевым но не абелевым проектором в алгебре кватернионов $\mathbb{Q}$. Для комплексных AW^* -алгебр эти понятия совпадают.

Вещественная AW^* -алгебра A называется *AW^* -алгеброй типа I*, если в ней существует полуабелев проектор e с центральным носителем $\mathbb{I}$, т.е. $\mathbb{I}$ является наименьшим центральным проектором, мажорирующим e . В частности, если A содержит только два центральных проектора 0 и $\mathbb{I}$, то A имеет тип I в том и только в том случае, когда в A существует ненулевой полуабелев проектор.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть e – полуабелев проектор в вещественной AW^* -алгебре A , f – проектор в A , причем $f \leq e$. Тогда $f = he$ для некоторого центрального проектора $h \in A$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем $f \in (eAe)_s$, причем $f \in Z[(eAe)_s]$, так как $(eAe)_s$ коммутативна. Следовательно, в силу предложения 1 $f \in Z(eAe)$. Но тогда из [8, § 6, утверждение 4] следует, что $f = he$ для некоторого центрального проектора $h \in Z(A)$.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть A – вещественная AW^* -алгебра, которая содержит только два центральных проектора 0 и $\mathbb{I}$ (в частности, A – вещественный AW^* -фактор). Если e – полуабелев проектор в A , то e – минимальный проектор (атом) в A .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $f \leq e$, то в силу предложения 3 $f = he$, где h – проектор в $Z(A)$. По условию $h = 0$ либо $\mathbb{I}$, т.е. $f = 0$ либо e .

2. Основные результаты.

ТЕОРЕМА 1. Пусть A – вещественная AW^* -алгебра, у которой только два проектора 0 и $\mathbb{I}$. Тогда A $*$ -изоморфна $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ или $\mathbb{Q}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из аксиом бэровского $*$ -кольца следует, что для любого элемента $x \neq 0$ в A его правый аннулятор $R(x) = \{y \in A : xy = 0\}$ равен либо 0 либо A . Но $\mathbb{I} \notin R(x)$ и потому $R(x) = \{0\}$ для всех $x \neq 0$. Таким образом, A не содержит делителей нуля ($xy \neq 0 \forall x \neq 0, y \neq 0$). В силу [7, утверждение 5.2.2] в вещественной C^* -алгебре A всякий элемент $a \in A_s$ имеет вид $a = a_+ - a_-$, где $a_+, a_- \in A^+$, причем $a_+a_- = 0$. Следовательно, либо $a_+ = 0$, либо $a_- = 0$, т.е. для любого $a \in A_s$ этот элемент либо положителен, либо отрицателен (т.е. $-a \in A^+$).

Покажем, что любой элемент $a \in A^+$ обратим. Если $0 \leq a \leq (1/n)\mathbb{I}$ для всех $n = 1, 2, \dots$, то, очевидно, $\|a\| \leq 1/n, n = 1, 2, \dots$, т.е. $a = 0$. Поэтому если $a \in A^+$, $a \neq 0$, то существует натуральное число n такое, что $(1/n)\mathbb{I} - a \notin A^+$. Но тогда

$$-\left(\frac{1}{n}\mathbb{I} - a\right) = a - \frac{1}{n}\mathbb{I} \in A^+,$$

т.е. $na - \mathbb{I} \in A^+$. Это означает, что $na - \mathbb{I} = x^*x$ для некоторого $x \in A$. По аксиоме вещественной C^* -алгебры элемент $na = \mathbb{I} + (na - \mathbb{I}) = \mathbb{I} + x^*x$ всегда обратим, т.е. элемент a обратим. Теперь, если b – произвольный ненулевой элемент из A , то $b^*b \geq 0$ и $bb^* \geq 0$ – ненулевые положительные элементы и потому оба обратимы, т.е. существуют такие элементы c_1 и c_2 , что $c_1b^*b = \mathbb{I}$ и $bb^*c_2 = \mathbb{I}$, т.е. b имеет правый (b^*c_2) и левый (c_1b^*) обратные элементы, т.е. b обратим. Итак A – вещественная C^* -алгебра с делением. В силу [7, теорема 2.2.2] A изоморфна $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ либо $\mathbb{Q}$. Причем в силу единственности $*$ -операции в вещественной C^* -алгебре [7, теорема 5.6.5] этот изоморфизм является $*$ -изоморфизмом. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть A – вещественная AW^* -алгебра, содержащая только два центральных проектора 0 и $\mathbb{I}$. Тогда $Z(A) = \mathbb{R}\mathbb{I}$ либо $\mathbb{C}\mathbb{I}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО вытекает из теоремы 1, примененной к коммутативной AW^* -алгебре $Z(A)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Следствие 1 показывает, что если вещественная AW^* -алгебра A содержит только два центральных проектора 0 и $\mathbb{I}$, т.е. является бэровским $*$ -фактором в смысле [8], то A либо вещественный AW^* -фактор (т.е. $Z(A) = \mathbb{R}\mathbb{I}$), либо комплексный AW^* -фактор, так как $Z(A) = \mathbb{C}\mathbb{I}$ и A является $*$ -алгеброй над $\mathbb{C}$. Поэтому в дальнейшем вещественную AW^* -алгебру A , у которой $Z(A)$ содержит только два проектора 0 и $\mathbb{I}$, будем называть AW^* -фактором, включая сюда, как частный случай, и вещественные AW^* -факторы и комплексные AW^* -факторы.

СЛЕДСТВИЕ 2. В AW^* -факторе A проектор e полуабелев тогда и только тогда, когда eAe совпадает с $\mathbb{R}e$, $\mathbb{C}e$ или $\mathbb{Q}e$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если e полуабелев, то e – атом и потому eAe содержит только два проектора 0 и e . По теореме 1 eAe совпадает с $\mathbb{R}e$, $\mathbb{C}e$ либо $\mathbb{Q}e$. Обратное вытекает из того, что $(\mathbb{R}e)_s = (\mathbb{C}e)_s = (\mathbb{Q}e)_s = \mathbb{R}e$ – коммутативна.

СЛЕДСТВИЕ 3. *Проектор e в AW^* -факторе A является полуабелевым тогда и только тогда, когда он минимален.*

Теперь мы докажем основной результат настоящей статьи.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть A – AW^* -фактор типа I. Тогда A изометрически $*$ -изоморфна алгебре $B(H)$ всех ограниченных $\mathbb{P}$ -линейных операторов на гильбертовом пространстве H над $\mathbb{P}$, где $\mathbb{P} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ или $\mathbb{Q}$. В частности, любой AW^* -фактор типа I является W^* -фактором (вещественным или комплексным).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $e \in A$ ненулевой полуабелев проектор в A . Очевидно, eA является правым идеалом в A . Покажем (следуя [11, теорема 7.3]), что правый идеал eA можно наделять структурой гильбертова пространства над $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ или $\mathbb{Q}$. Для $\xi, \eta \in eA = H$, $\xi = ea, \eta = eb$, рассмотрим $\xi\eta^* = eab^*e$. Так как $eAe = \{\lambda e, \lambda \in \mathbb{P}\}$, где $\mathbb{P} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ или $\mathbb{Q}$ (следствие 2 теоремы 1), то $\xi\eta^* = \lambda(\xi, \eta)e$, где $\lambda(\xi, \eta) \in \mathbb{P}$. Положим $\langle \xi, \eta \rangle := \lambda(\xi, \eta)$ и получим билинейную форму на $H \times H$ со значениями в $\mathbb{P}$. При этом $\langle \xi, \xi \rangle e = \xi\xi^* \geq 0$ для любого $\xi \in H$, т.е. $\langle \xi, \xi \rangle \geq 0$. Если $\langle \xi, \xi \rangle = 0$, то $\xi\xi^* = eaa^*e = 0$ и из аксиом вещественной C^* -алгебры ($\|\xi\xi^*\| = \|\xi\|^2$) следует, что $\xi = 0$. Итак, относительно введенного скалярного произведения $H = eA$ является гильбертовым пространством над $\mathbb{P}$ ($= \mathbb{R}, \mathbb{C}$ или $\mathbb{Q}$). При этом норма элемента ξ в гильбертовом пространстве H совпадает с нормой ξ в C^* -алгебре: $\|\xi\|_H^2 e = \langle \xi, \xi \rangle e = \xi\xi^* = eaa^*e = \|(ea)(ea)^*\|e = \|ea\|^2 e = \|\xi\|^2 e$, т.е. $\|\xi\|_H = \|\xi\|$.

Теперь зададим действие AW^* -фактора A на $H = eA$ следующим образом: для $x \in A$ рассмотрим представление $x \rightarrow R_x: H \rightarrow H$, где $R_x(\xi) = R_x(ea) := eax = \xi x$. Легко видеть, что R_x является $\mathbb{P}$ -линейным оператором на H :

$$\begin{aligned} R_x(\lambda\xi) &= (\lambda\xi)x = \lambda(\xi x) = \lambda R_x(\xi), \quad \lambda \in \mathbb{P}, \\ R_x(\xi + \eta) &= (\xi + \eta)x = \xi x + \eta x = R_x(\xi) + R_x(\eta). \end{aligned}$$

Далее, $R_{x+y} = R_x + R_y$, $R_{xy} = R_x R_y$, $R_{\lambda x} = \lambda R_x$, т.е. $x \rightarrow R_x$ – представление A ограниченными операторами на H . Более того, это представление точно. В самом деле, если $R_x = 0$, $x \in A$, то $eax = 0$ для всех $a \in A$, т.е. $eAx = \{0\}$. Так как A – бэровский $*$ -фактор, то из [8, § 6, следствие 2, утверждение 3] следует, что либо $e = 0$ (что невозможно), либо $x = 0$. Следовательно, $R_x = 0 \Rightarrow x = 0$. Итак, A имеет точное представление ограниченными $\mathbb{P}$ -линейными операторами на гильбертовом пространстве H , т.е. A $*$ -изоморфно вкладывается в $B(H)$ – вещественную W^* -алгебру всех ограниченных $\mathbb{P}$ -линейных операторов в гильбертовом пространстве H . В силу единственности C^* -нормы [7, § 5] это вложение является изометрическим.

Покажем, что при этом все одномерные проекторы из $B(H)$ лежат в A . В самом деле если $\xi = ea \in H$, $\xi \neq 0$, то одномерным проектором на подпространство, порожденное ξ , является, как известно, отображение

$$P_\xi(\eta) = \langle \eta, \xi \rangle \xi = \langle \eta, \xi \rangle e\xi = \eta\xi^*\xi = R_{\xi^*\xi}\eta,$$

т.е. одномерные проекторы в $B(H)$ – это суть операторы вида $R_{\xi^*\xi}$, $\xi^*\xi \in A$, т.е. $P_\xi \in A$. Теперь покажем, следуя идее [2, лемма 1], что любой проектор из $B(H)$ лежит в A . Если p – произвольный проектор в $B(H)$, то его можно представить как $\sup p_i$, где p_i –

одномерные проекторы из $B(H)$, которые лежат в A . Так как решетка проекторов в вещественной AW^* -алгебре (как и в любой бэровской $*$ -алгебре [8, § 4, утверждение 1]) полна, то существует $q = \sup p_i$ в A . Так как $A \subseteq B(H)$, то, очевидно, $q \geq p$. Если $q - p \neq 0$, то $q - p$ является ненулевым проектором в $B(H)$ и потому существует одномерный проектор $p' \leq q - p$, который лежит в A , меньше q и ортогонален всем p_i , а потому ортогонален и $q = \sup p_i$; противоречие. Следовательно, $q = p \in A$. Итак, A содержит все проекторы из $B(H)$. Так как в $B(H)$ (как и в любой вещественной W^* -алгебре) любой самосопряженный оператор есть предел по C^* -норме вещественных линейных комбинаций проекторов, и A замкнута по C^* -норме, то A содержит любой самосопряженный оператор из $B(H)$, т.е. $A_s = B(H)_s$. Если AW^* -фактор A является комплексным, т.е. $\mathbb{P} = \mathbb{C}$, то H является комплексным гильбертовым пространством и, очевидно, $B(H) = B(H)_s + iB(H)_s = A_s + iA_s = A$.

Если A является вещественным AW^* -фактором, то $\mathbb{P} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{Q}$ и потому $B(H)$ является вещественным W^* -фактором. В силу [12, теорема 3] всякий косоэрмитов элемент из $B(H)$ (кроме случая когда $B(H) = \mathbb{Q}$ – в этом случае можно применить теорему 1) есть конечная сумма коммутаторов косоэрмитовых элементов, т.е. $B(H)_k \subset [B(H)_s, B(H)_s] = [A_s, A_s] \subset A$. Следовательно, $A = B(H)$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Всякий вещественный AW^* -фактор типа I является вещественным W^* -фактором и изоморфен $B(H)$, где H – вещественное или кватернионное гильбертово пространство.*

СЛЕДСТВИЕ 2 (см. [6, задача 1]). *Для вещественного AW^* -фактора типа I комплексификация $A_c = A + iA$ всегда является AW^* -фактором.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Kaplansky I. Projections on Banach algebras // Ann. Math. 1951. V. 53. P. 235–249.
- [2] Kaplansky I. Algebras of type I // Ann. Math. 1952. V. 56. P. 460–472.
- [3] Dixmier J. Sur certains espaces considérés par M. H. Stone // Summa Brasil. Math. 1951. V. 2. P. 151–182.
- [4] Takenouchi O. A non- W^* , AW^* -factor // Lect. Notes Math. 1978. V. 650. P. 135–139.
- [5] Dyer J. Concerning AW^* -algebras // Notices Amer. Math. Soc. 1970. V. 17. P. 788.
- [6] Albeverio S., Ayupov Sh. A., Abduvaitov A. H. On Real AW^* -algebras // Preprint № 37, SFB 611. Bonn, 2002.
- [7] Li B. R. Real Operator Algebras. Singapore–New-Jersey–London–Hong-Kong: World Scientific, 2002.
- [8] Berberian S. K. Baer $*$ -Rings. Berlin–Heidelberg–New-York: Springer-Verlag, 1972.
- [9] Putnam C. R. On normal operators in Hilbert spaces // Amer. J. Math. 1950. V. 73. P. 357–362.
- [10] Sakai S. Operator Algebras in Dynamical Systems. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. V. 41. Cambridge: Cambridge University Press, 1991.
- [11] Kaplansky I. Normed algebras // Duke Math. J. 1949. V. 16. P. 399–418.
- [12] Ayupov Sh. A., Azamov N. A. Commutators and Lie isomorphisms of skew elements in prime operator algebras // Comm. Algebra. 1996. V. 24. № 4. P. 1501–1520.