Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. В. Крицков, Оценка образов Фурье по системе обобщенных собственных функций оператора Шредингера с потенциалом штуммелевского типа, *Матем. заметки*, 1999, том 65, выпуск 4, 542–551

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1080>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 17:16:30

УДК 517.984.52

ОЦЕНКА ОБРАЗОВ ФУРЬЕ ПО СИСТЕМЕ ОБОБЩЕННЫХ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ОПЕРАТОРА ШРЁДИНГЕРА С ПОТЕНЦИАЛОМ ШТУММЕЛЕВСКОГО ТИПА

Л. В. Крицков

Пусть $\mathcal{A}$ – неотрицательное самосопряженное расширение в $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$) формального дифференциального оператора $-\Delta u + q(x)u$ с потенциалом $q(x)$, удовлетворяющим при $N = 1, 2, 3$ условию

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^N} \int_{|x-y| \leq 1} |q(y)|^2 dy < \infty$$

и при $N \geq 4$ условию

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^N} \int_{|x-y| \leq 1} |x-y|^{4-N} \kappa(|x-y|) |q(y)|^2 dy < \infty,$$

в котором неотрицательная функция $\kappa(r)$ такова, что $\int_0^1 (\kappa(r)r)^{-1} dr < \infty$. Для каждого $\alpha \in (0, 2]$ установлена оценка для обобщенных образов Фурье произвольной функции $f \in L_2^\alpha(\mathbb{R}^N)$ вида

$$\sum_{i=1}^m \int_0^\infty |\hat{f}_i(\lambda)|^2 (1+\lambda)^\alpha d\rho(\lambda) \leq M \|f\|_{L_2^\alpha(\mathbb{R}^N)}^2.$$

Если дополнительно $\lim_{r \rightarrow 0+0} \kappa(r) = +\infty$, то наряду с этой обоснована аналогичная оценка снизу.

Библиография: 11 названий.

Изучается самосопряженный оператор Шрёдингера $\mathcal{A}$, определяемый во всем пространстве $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$) дифференциальным выражением

$$Au = -\Delta u + q(x)u, \quad (1)$$

в котором потенциал $q(x)$ удовлетворяет условию шtumмелевского типа [1, с. 13]:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^N} \int_{|x-y| \leq 1} |q(y)|^2 dy < \infty, \quad (2)$$

Работа выполнена в рамках программы ESPRIT сотрудничества между ЕС и Россией, грант № 21042 CTIAC, и при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-15-96097.

если $N = 1, 2, 3$, и

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^N} \int_{|x-y| \leq 1} |x-y|^{4-N} \kappa(|x-y|) |q(y)|^2 dy < \infty, \quad (3)$$

если $N \geq 4$. Здесь $\kappa(r)$ – произвольная неотрицательная функция, удовлетворяющая условию

$$\int_0^1 (\kappa(r)r)^{-1} dr < \infty. \quad (4)$$

Если потенциал в (1) удовлетворяет условию (2), (3), то, как следует из [1, с. 15], самосопряженный оператор $\mathcal{A}$ может быть определен замыканием минимального оператора, порождаемого выражением (1) на множестве $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, и является ограниченным снизу. В силу инвариантности классов (2) и (3) относительно прибавления произвольной константы можно считать, что оператор $\mathcal{A}$ неотрицателен. Из [2], [3] следует, что пространство $L_2(\mathbb{R}^N)$ допускает упорядоченное спектральное представление относительно оператора $\mathcal{A}$, характеризуемое мерой $\rho(\lambda)$, кратностью $m \leq \infty$ и обобщенными собственными функциями $u_i(x, \lambda)$, $i = 1, \dots, m$, так что для каждой функции $f \in L_2(\mathbb{R}^N)$ определены ее обобщенные образы Фурье

$$\widehat{f}_i(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x) u_i(x, \lambda) dx, \quad i = 1, \dots, m.$$

В данной работе доказана следующая

ТЕОРЕМА. Пусть $\mathcal{A}$ – неотрицательный самосопряженный оператор Шрёдингера (1) с потенциалом, удовлетворяющим в $\mathbb{R}^N$ условию (2), (3). Тогда можно указать постоянную $M > 0$ такую, что для каждой функции f из класса Соболева–Ливилля $L_2^\alpha(\mathbb{R}^N)$ с произвольным порядком дифференцируемости $\alpha \in (0, 2]$ выполнена оценка

$$\sum_{i=1}^m \int_0^\infty |\widehat{f}_i(\lambda)|^2 (1 + \lambda)^\alpha d\rho(\lambda) \leq M \|f\|_{L_2^\alpha(\mathbb{R}^N)}^2. \quad (5)$$

Если функция $\kappa(r)$ в (3) удовлетворяет дополнительному условию $\kappa(r) \rightarrow +\infty$ при $r \rightarrow 0+0$, то наряду с оценкой сверху (5) выполнена аналогичная оценка снизу с некоторой постоянной $m > 0$.

Оценки образов Фурье позволяют исследовать абсолютную сходимость спектральных разложений, отвечающих оператору $\mathcal{A}$, в равномерной во всем пространстве $\mathbb{R}^N$ метрике. Отметим, что одномерный случай ($N = 1$) рассматривался в [4]–[7].

1. Доказательство оценки сверху. Положим $\nu = (N - 2)/2$ и обозначим через $\tau_{\alpha/2}(r)$ ядро Бесселя–Макдональда:

$$\tau_{\alpha/2}(r) = 2^{1-\alpha/2} \left(\left(\frac{2}{\pi} \right)^{\nu+1} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right)^{-1} r^{-(\nu+1)+\alpha/2} K_{(\nu+1)-\alpha/2}(r). \quad (6)$$

Тогда если $f \in L_2^\alpha(\mathbb{R}^N)$, то существует $h \in L_2(\mathbb{R}^N)$ такая, что

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \tau_{\alpha/2}(|x-y|) h(y) dy. \quad (7)$$

Из свойств модифицированных функций Бесселя [8, гл. 7] вытекает, что ядро (6) удовлетворяет следующим оценкам:

$$c_1 r^{-(2\nu+3-\alpha)/2} e^{-r} \leq \tau_{\alpha/2}(r) \leq C_1 r^{-(2\nu+3-\alpha)/2} e^{-r} \quad (8)$$

при $N \geq 1, 0 < \alpha \leq 2, r \geq 1$;

$$c_2 r^{-(2\nu+2-\alpha)} \leq \tau_{\alpha/2}(r) \leq C_2 r^{-(2\nu+2-\alpha)} \quad (9)$$

при $N \geq 1, 0 < \alpha \leq 2, N - \alpha > 0, 0 < r \leq 1$;

$$c_3 \ln \frac{e}{r} \leq \tau_{\alpha/2}(r) \leq C_3 \ln \frac{e}{r} \quad (10)$$

при $N = \alpha = 2$ или $N = \alpha = 1$ и $0 < r \leq 1$;

$$c_4 \leq \tau_{\alpha/2}(r) \leq C_4 \quad (11)$$

при $N = 1, 1 < \alpha \leq 2, 0 < r \leq 1$.

Положим

$$w_\nu(z_1, z_2) = J_\nu(z_1) Y_\nu(z_2) - J_\nu(z_2) Y_\nu(z_1), \quad (12)$$

$$W_\nu(\rho, \mu) = \frac{\pi \rho^{-\nu}}{2} \int_\rho^\infty r^{\nu+1} \tau_{\alpha/2}(r) w_\nu(\mu \rho, \mu r) dr, \quad \mu = \sqrt{\lambda}. \quad (13)$$

Для образов Фурье функции $f \in L_2^\alpha(\mathbb{R}^N)$ по системе обобщенных собственных функций оператора $\mathcal{A}$ имеет место представление (ср. с [7, формула (12)])

$$\widehat{f}_i(\lambda) = (1 + \lambda)^{-\alpha/2} \widehat{h}_i(\lambda) - \int_{\mathbb{R}^N} W_\nu(|z|, \mu) \int_{\mathbb{R}^N} h(y - z) q(y) u_i(y, \lambda) dy dz. \quad (14)$$

Обозначим второе слагаемое в правой части этого равенства через $(T_i q)(\lambda)$. Тогда из (14) вытекает, что левая часть (5) не превосходит

$$2 \sum_{i=1}^m \int_0^\infty |\widehat{h}_i(\lambda)|^2 d\rho(\lambda) + 2 \sum_{i=1}^m \int_0^\infty |(T_i q)(\lambda)|^2 (1 + \lambda)^\alpha d\rho(\lambda) \equiv S_1 + S_2. \quad (15)$$

Первое слагаемое S_1 в (15) в силу обобщенного равенства Парсеваля (упорядоченное спектральное представление пространства $L_2(\mathbb{R}^N)$ относительно $\mathcal{A}$ изометрично) есть $2 \|h\|_{L_2(\mathbb{R}^N)}^2 = 2 \|f\|_{L_2^\alpha(\mathbb{R}^N)}^2$, а для оценки второго применим следующую лемму, которую докажем в п. 3.

ЛЕММА. Для всех $\nu \geq -1/2$, $\rho > 0$, $\mu \geq 0$ и $0 < \alpha \leq 2$ выполнена оценка

$$|W_\nu(\rho, \mu)| \leq C_5(1 + \mu^2)^{-\alpha/2} \tau_1(\rho). \quad (16)$$

Из оценки (16) следует, что

$$S_2 \leq C_5^2 \sum_{i=1}^m \int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^N} \tau_1(|z|) \left| \int_{\mathbb{R}^N} h(y-z) q(y) u_i(y, \lambda) dy \right| dz \right)^2 d\rho(\lambda). \quad (17)$$

Разобьем область интегрирования по переменной z в правой части (17) на две: $|z| \leq 1$ и $|z| \geq 1$, – и обозначим соответствующие слагаемые через I_1 и I_2 . Для I_2 применим неравенство Коши–Буняковского, обобщенное равенство Парсеваля и учтем (8):

$$I_2 \leq O(1) \int_{|z| \geq 1} \tau_1(|z|) \int_{\mathbb{R}^N} |h(y-z)|^2 |q(y)|^2 dy dz.$$

Производя замену переменной и меняя порядок интегрирования, придем к оценке

$$I_2 \leq O(1) \|h\|_{L_2(\mathbb{R}^N)}^2 \sup_{x \in \mathbb{R}^N} \int_{|x-y| \geq 1} \tau_1(|x-y|) |q(y)|^2 dy. \quad (18)$$

Так как в силу (8) $\tau_1(r) = O(1)e^{-r}$ при $r \geq 1$, то

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^N} \int_{|x-y| \geq 1} \tau_1(|x-y|) |q(y)|^2 dy \leq O(1) \sum_{l=1}^\infty e^{-l} \sup_{x \in \mathbb{R}^N} \int_{l \leq |x-y| < l+1} |q(y)|^2 dy.$$

Шаровой слой $\{l \leq |x-y| \leq l+1\}$ можно покрыть не более, чем $\text{const} \cdot l^{N-1}$ единичными шарами, поэтому правая часть последней оценки не превосходит

$$O(1) \sup_{x \in \mathbb{R}^N} \int_{|x-y| \geq 1} |q(y)|^2 dy,$$

а из (2) и (3) следует, что эта величина конечна при любом $N \geq 1$. Тем самым, из (18) следует, что

$$I_2 \leq O(1) \|h\|_{L_2(\mathbb{R}^N)}^2. \quad (19)$$

Из оценок (9)–(11) следует, что при $N = 1, 2, 3$ $\tau_1(|z|) \in L_2$ ($|z| \leq 1$). Поэтому, применяя к I_1 сначала неравенство Коши–Буняковского, а затем обобщенное равенство Парсеваля, получим

$$I_1 \leq O(1) \int_{|z| \leq 1} \int_{\mathbb{R}^N} |h(y-z)|^2 |q(y)|^2 dy dz \leq O(1) \|h\|_{L_2(\mathbb{R}^N)}^2 \sup_{x \in \mathbb{R}^N} \int_{|x-y| \geq 1} |q(y)|^2 dy. \quad (20)$$

Кроме того, из (9) получим, что при $N \geq 4$ и $r \leq 1$

$$\tau_1(r) = O(1)r^{2-N} \equiv O(1)r^{-N/2} (\varkappa(r))^{-1/2} r^{2-N/2} (\varkappa(r))^{1/2}.$$

Тогда аналогично (20) имеем

$$\begin{aligned} I_1 &\leq O(1) \int_{|z| \leq 1} (|z|^N \varkappa(|z|))^{-1} dz \cdot \int_{|z| \leq 1} |z|^{4-N} \varkappa(|z|) \int_{\mathbb{R}^N} |h(y-z)|^2 |q(y)|^2 dy dz \\ &\leq O(1) \|h\|_{L_2(\mathbb{R}^N)}^2 \int_0^1 (\varkappa(r)r)^{-1} dr \cdot \sup_{x \in \mathbb{R}^N} \int_{|x-y| \leq 1} |x-y|^{4-N} \varkappa(|x-y|) |q(y)|^2 dy. \end{aligned} \quad (21)$$

Из оценок (19)–(21) и условий (2)–(4) следует, что $S_2 = O(1) \|f\|_{L_2^3(\mathbb{R}^N)}^2$. Оценка (5) полностью доказана.

2. Доказательство оценки снизу. Выполним преобразование независимой переменной в выражении (1): $x = \varepsilon y$, где $\varepsilon \in (0, 1)$ пока произвольно. Рассмотрим дифференциальное выражение

$$A_\varepsilon v = -\Delta v + q_\varepsilon(y)v, \quad y \in \mathbb{R}^N,$$

в котором потенциал $q_\varepsilon(y)$ задается равенством $q_\varepsilon(y) = \varepsilon^2 q(\varepsilon y)$, и порожаемый этим выражением самосопряженный оператор $\mathcal{A}_\varepsilon$. Упорядоченные спектральные представления пространства $L_2(\mathbb{R}^N)$ относительно операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}_\varepsilon$ связаны, очевидно, следующим образом. Положим $\lambda_\varepsilon = \varepsilon^2 \lambda$. Выберем обобщенными собственными функциями оператора $\mathcal{A}_\varepsilon$ функции $v_i(y, \lambda_\varepsilon) = u_i(\varepsilon y, \varepsilon^{-2} \lambda_\varepsilon)$. Если обобщенный образ Фурье функции $F(y)$ относительно системы этих функций обозначить через $\tilde{F}_i(\lambda_\varepsilon)$, то обобщенный образ Фурье функции $f(x) = F(x/\varepsilon)$ будет удовлетворять равенству $\hat{f}_i(\lambda) = \varepsilon^N \tilde{F}_i(\varepsilon^2 \lambda)$. Из равенств Парсеваля следует, что для спектральных мер этих упорядоченных представлений имеет место соотношение $\rho_\varepsilon(\varepsilon^2 \lambda) = \varepsilon^N \rho(\lambda)$.

Рассмотрим произвольную функцию $f \in L_2^\alpha(\mathbb{R}^N)$ и функцию $h \in L_2(\mathbb{R}^N)$, связанную с f равенством (7). Изучим свойства обобщенных образов Фурье функции $F(y) = f(\varepsilon y)$. Пусть $h^{(\varepsilon)}(y) \in L_2(\mathbb{R}^N)$ такова, что

$$F(y) = \int_{\mathbb{R}^N} \tau_{\alpha/2}(|y - z|) h^{(\varepsilon)}(z) dz.$$

Тогда аналогично (14) получим

$$\tilde{F}_i(\lambda_\varepsilon) = (1 + \lambda_\varepsilon)^{-\alpha/2} \tilde{h}_i^{(\varepsilon)}(\lambda_\varepsilon) + (T_i^{(\varepsilon)} q_\varepsilon)(\lambda_\varepsilon), \quad (22)$$

здесь $T_i^{(\varepsilon)}$ имеет тот же смысл, что и в (14), но с заменой h на $h^{(\varepsilon)}$. На основании (22) и равенства Парсеваля придем к следующему неравенству:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^m \int_0^\infty |\tilde{F}_i(\lambda_\varepsilon)|^2 (1 + \lambda_\varepsilon)^\alpha d\rho_\varepsilon(\lambda_\varepsilon) \\ & \geq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \int_0^\infty |\tilde{h}_i^{(\varepsilon)}(\lambda_\varepsilon)|^2 d\rho_\varepsilon(\lambda_\varepsilon) - \sum_{i=1}^m \int_0^\infty |(T_i^{(\varepsilon)} q_\varepsilon)(\lambda_\varepsilon)|^2 (1 + \lambda_\varepsilon)^\alpha d\rho_\varepsilon(\lambda_\varepsilon) \\ & \equiv \frac{1}{2} \|h^{(\varepsilon)}\|_{L_2(\mathbb{R}^N)}^2 - I_3. \end{aligned} \quad (23)$$

Повторим для I_3 все рассуждения, проведенные в п. 1. Получим аналогично (19)–(21) следующую оценку:

$$\begin{aligned} I_3 \leq & O(1) \|h^{(\varepsilon)}\|_{L_2(\mathbb{R}^N)}^2 \left\{ \sup_{x \in \mathbb{R}^N} \int_{|x-y| \leq 1} |q_\varepsilon(y)|^2 dy \right. \\ & \left. + \int_0^1 (\varkappa(\varepsilon r) r)^{-1} dr \cdot \sup_{x \in \mathbb{R}^N} \int_{|x-y| \leq 1} |x-y|^{4-N} \varkappa(\varepsilon |x-y|) |q_\varepsilon(y)|^2 dy \right\}, \end{aligned} \quad (24)$$

если $N \geq 4$, и ту же оценку, однако без второго слагаемого в фигурных скобках, если $N = 1, 2, 3$.

При $N = 1, 2, 3$ имеем (здесь и далее $x_1 = \varepsilon x$)

$$\int_{|x-y| \leq 1} |q_\varepsilon(y)|^2 dy \leq \varepsilon^{4-N} \int_{|x_1-y_1| \leq 1} |q(y_1)|^2 dy_1. \quad (25)$$

При $N \geq 4$ получим, во-первых,

$$\begin{aligned} \int_{|x-y| \leq 1} |q_\varepsilon(y)|^2 dy &= \varepsilon^{4-N} \int_{|x_1-y_1| \leq \varepsilon} |q(y_1)|^2 dy_1 \\ &\leq \sup_{0 < r \leq \varepsilon} (\kappa(r))^{-1} \cdot \int_{|x_1-y_1| \leq 1} |x_1 - y_1|^{4-N} \kappa(|x_1 - y_1|) |q(y_1)|^2 dy_1 \end{aligned} \quad (26)$$

и, во-вторых,

$$\begin{aligned} \int_{|x-y| \leq 1} |x - y|^{4-N} \kappa(\varepsilon|x - y|) |q_\varepsilon(y)|^2 dy \\ \leq \int_{|x_1-y_1| \leq 1} |x_1 - y_1|^{4-N} \kappa(|x_1 - y_1|) |q(y_1)|^2 dy_1. \end{aligned} \quad (27)$$

Так как

$$\sup_{0 < r \leq \varepsilon} (\kappa(r))^{-1} \rightarrow 0 \quad \text{и} \quad \int_0^1 (\kappa(\varepsilon r))^{-1} dr \rightarrow 0$$

при $\varepsilon \rightarrow 0 + 0$, в силу соотношений (25)–(27) правая часть оценки (24) есть $o(1) \times \|h^{(\varepsilon)}\|_{L_2(\mathbb{R}^N)}^2$ при $\varepsilon \rightarrow 0 + 0$. Выбирая достаточно малой величину $\varepsilon \in (0, 1)$, на основании неравенства (23) получим

$$\sum_{i=1}^m \int_0^\infty |\tilde{F}_i(\lambda_\varepsilon)|^2 (1 + \lambda_\varepsilon)^\alpha d\rho_\varepsilon(\lambda_\varepsilon) \geq \frac{1}{4} \|h^{(\varepsilon)}\|_{L_2(\mathbb{R}^N)}^2.$$

Из этой оценки стандартными рассуждениями [7] выводится требуемая оценка снизу.

3. Доказательство леммы. Прежде всего отметим, что при $\alpha = 2$ с учетом (6) и известных интегральных формул для цилиндрических функций [8, с. 104] получим $W_\nu(\rho, \mu) = (1 + \mu^2)^{-1} \tau_1(\rho)$. Тем самым, достаточно рассмотреть только $\alpha \in (0, 2)$.

Пусть сначала $0 < \mu \leq 1$. В этом случае вместо (16) достаточно доказать оценку

$$|W_\nu(\rho, \mu)| \leq C_5 \tau_1(\rho). \quad (28)$$

Проинтегрируем правую часть (13) по частям:

$$W_\nu(\rho, \mu) = \frac{\pi}{2} \mu \rho^{-\nu} \int_\rho^\infty r^\nu (J_\nu(\mu \rho) Y_{\nu-1}(\mu r) - Y_\nu(\mu \rho) J_{\nu-1}(\mu r)) \int_r^\infty \xi \tau_{\alpha/2}(\xi) d\xi dr, \quad (29)$$

и заметим, что [8, с. 103]

$$\int_r^\infty \xi \tau_{\alpha/2}(\xi) d\xi = \alpha \tau_{(\alpha+2)/2}(r). \quad (30)$$

Если $\rho \geq 1/\mu$, то требуемая оценка (28) следует из (9) и оценок цилиндрических функций при больших значениях аргумента. Если же $0 < \rho \leq 1/\mu$, то необходимо учесть, что $\tau_{(\alpha+2)/2}(r)$ (в силу оценок (8)–(11)) есть $O(1)r\tau_1(r)$ при $r \geq 1$ и любом $\nu \geq -1/2$, $O(1)$ при $r \leq 1$ и $\nu = -1/2$ или $\nu = 0$, $O(1)r^{\alpha-2\nu}$ при $r \leq 1$ и $\nu \geq 1$ и является суммируемой на $(0, 1)$ при $\nu = 1/2$. Оценка (16) при $0 < \mu \leq 1$ полностью доказана.

Пусть теперь $\mu \geq 1$. Если $\rho \geq 1$, то, интегрируя правую часть (13) иным нежели в (29) способом, получим

$$W_\nu(\rho, \mu) = \mu^{-2} \tau_{\alpha/2}(\rho) - \frac{\pi}{2\mu\rho^\nu} \int_\rho^\infty r^{\nu+1} \tau'_{\alpha/2}(r) (J_\nu(\mu\rho)Y_{\nu+1}(\mu r) - Y_\nu(\mu\rho)J_{\nu+1}(\mu r)) dr. \quad (31)$$

Требуемая оценка (28) вытекает из последнего соотношения, если принять во внимание асимптотические оценки цилиндрических функций при больших значениях аргумента и легко проверяемую (с помощью (6) и формул дифференцирования [8, с. 91]) оценку $\tau'_{\alpha/2}(r) = O(1)r^{-(2\nu+3-\alpha)/2}e^{-r}$, $r \geq 1$.

В случае $1/\mu \leq \rho \leq 1$ аналогичные рассуждения проходят, если интеграл в правой части (31) взять еще раз по частям:

$$W_\nu(\rho, \mu) = \mu^{-2} \tau_{\alpha/2}(\rho) - 2(\nu+1)\mu^{-4}\rho^{-1}\tau'_{\alpha/2}(\rho) + \frac{\pi}{2}\mu^{-2}\rho^{-\nu} \int_\rho^\infty r^\nu (r\tau''_{\alpha/2}(r) - \tau'_{\alpha/2}(r)) (J_\nu(\mu\rho)Y_{\nu+2}(\mu r) - Y_\nu(\mu\rho)J_{\nu+2}(\mu r)) dr,$$

и учесть, что $-\tau'_{\alpha/2}(\rho)$ и $\tau''_{\alpha/2}(\rho)$ положительны при $\rho > 0$.

Случай $0 < \rho \leq 1/\mu$ требует более подробного анализа.

При $\nu = -1/2$ подставим в правую часть (13) явные формулы для цилиндрических функций:

$$W_{-1/2}(\rho, \mu) = \mu^{-1} \int_\rho^\infty \tau_{\alpha/2}(r) \sin \mu(r - \rho) dr.$$

В силу формул (1.12.40) и (2.12.50) из [9, с. 52, 102] и (22) из [10, с. 76] имеем

$$\mu^{-1} \int_0^\infty \tau_{\alpha/2}(r) \sin \mu(r - \rho) dr = 2^{(\alpha-1)/2} \mu^{-1} (1 + \mu^2)^{-\alpha/2} \times \left(\cos \mu\rho \cdot \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) \left(\frac{\mu^2}{1+\mu^2}\right)^{1/2} F\left(\frac{\alpha+1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; \frac{\mu^2}{1+\mu^2}\right) - \sin \mu\rho \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right),$$

что есть $O(1)\mu^{-\alpha}$, а следовательно, и $O(1)\mu^{-\alpha}\tau_1(\rho)$ в силу (11). Требуемая оценка для интеграла

$$\mu^{-1} \int_0^\rho \tau_{\alpha/2}(r) \sin \mu(r - \rho) dr$$

вытекает непосредственно из (9)–(11).

При $\nu = 0$ выполним в (13) преобразование $\int_{\rho}^{\infty} = \int_0^{\infty} - \int_0^{\rho}$ и учтем, что в силу формул (8.13.3) и (8.13.4) из [11, с. 61]

$$2\pi \int_0^{\infty} r \tau_{\alpha/2}(r) J_0(\mu r) dr = (1 + \mu^2)^{-\alpha/2}, \quad (32)$$

$$2\pi \int_0^{\infty} r \tau_{\alpha/2}(r) Y_0(\mu r) dr = \left(\pi \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right)^{-1} (1 + \mu^2)^{-\alpha/2} \\ \times \left(\Gamma'\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \left(\ln \frac{\mu^2}{1 + \mu^2} - \Phi'(0) \right) \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right), \quad (33)$$

где

$$\Phi(z) = \frac{F(\alpha/2, -z; 1 - z; \mu^2/(1 + \mu^2))}{\Gamma(1 - z)}.$$

Так как при $\mu \geq 1$ $\mu^2/(1 + \mu^2) \in [1/2, 1)$ и функция $\Phi(z)$ аналитична по z [10, с. 74, 80], то, учитывая (32), (33), асимптотические оценки для $J_0(z)$, $Y_0(z)$ и ядра $\tau_{\alpha/2}(r)$ при $\nu = 0$, получим $W_0(\rho, \mu) = O(1)\mu^{-\alpha} \ln(e/\rho) = O(1)\mu^{-\alpha} \tau_1(\rho)$.

Если при $\nu \geq 1/2$ к правой части (13) применить асимптотические оценки для цилиндрических функций, а также (8) и (9), то требуемая оценка (16) имеет место при всех $\alpha \in (0, 2)$, если $\nu \geq 3/2$, при $\alpha \in (0, 3/2)$, если $\nu = 1$, и при $\alpha \in (0, 1)$, если $\nu = 1/2$.

Пусть $\nu = 1$ и $3/2 \leq \alpha < 2$. Воспользуемся формулами (29) и (30):

$$W_1(\rho, \mu) = \frac{\pi}{2} \alpha \mu \rho^{-1} \int_{\rho}^{\infty} r (J_1(\mu \rho) Y_0(\mu r) - Y_1(\mu \rho) J_0(\mu r)) \tau_{(\alpha+2)/2}(r) dr.$$

Используя для оценки правой части этого равенства рассуждения, аналогичные проведенным при $\nu = 0$, получим $W_1(\rho, \mu) = O(1)\mu^{-\alpha} \rho^{-2} = O(1)\mu^{-\alpha} \tau_1(\rho)$.

Пусть $\nu = 1/2$ и $1 \leq \alpha < 2$. Из (12) и (13) имеем

$$W_{1/2}(\rho, \mu) = (\rho \mu)^{-1} \int_{\rho}^{\infty} r \tau_{\alpha/2}(r) \sin \mu(r - \rho) dr. \quad (34)$$

При $\alpha \in (1, 2)$ выполним в правой части последнего соотношения преобразование $\int_{\rho}^{\infty} = \int_0^{\infty} - \int_0^{\rho}$ и учтем, что в силу формул (1.12.41) и (2.12.49) из [9, с. 53, 101] и (22) из [10, с. 76]

$$\int_0^{\infty} r^{(\alpha-1)/2} K_{(3-\alpha)/2} \cos \mu r dr = 2^{(\alpha-3)/2} \Gamma\left(\frac{\alpha-1}{2}\right) (1 + \mu^2)^{(1-\alpha)/2} \\ \times F\left(-\frac{1}{2}, \frac{\alpha-1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{\mu^2}{1 + \mu^2}\right), \\ \int_0^{\infty} r^{(\alpha-1)/2} K_{(3-\alpha)/2} \sin \mu r dr = \sqrt{\pi} 2^{(\alpha-3)/2} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) \mu (1 + \mu^2)^{-\alpha/2}.$$

Из асимптотических оценок окончательно получим, что $W_{1/2}(\rho, \mu) = O(1)\mu^{-\alpha} \rho^{-1}$, если $1 < \alpha < 2$.

При $\alpha = 1$ перепишем (34) с учетом (6) в виде

$$\begin{aligned} W_{1/2}(\rho, \mu) &= \int_{\rho}^{\infty} r^{-1} \sin \mu(\rho - r) dr + \int_0^{\rho} (K_1(r) - r^{-1}) \sin \mu(r - \rho) dr \\ &\quad + \cos \mu \rho \int_0^{\infty} (K_1(r) - r^{-1}) \sin \mu r dr - \sin \mu \rho \int_0^{\infty} (K_1(r) - r^{-1}) \cos \mu r dr \\ &\equiv I_1 + I_2 + I_3 \cos \mu \rho - I_4 \sin \mu \rho. \end{aligned}$$

Так как [8, с. 149] $I_1 = \sin \mu \rho \operatorname{Ci}(\mu \rho) - \cos \mu \rho \operatorname{si}(\mu \rho)$, в силу оценок для интегральных синуса и косинуса [8, с. 150] имеем (здесь и далее γ_0 – постоянная Эйлера) $|I_1| \leq |\sin \mu \rho|(\gamma_0 + \ln \mu \rho + O(1)) + |\cos \mu \rho|(\pi/2 + O(1)) = O(1)$.

Из асимптотики $K_1(z)$ при $z \geq 1$ [8, с. 17] вытекает, что $K_1(z) - z^{-1} = O(z \ln(e/z))$, $z \leq 1$. Поэтому при $\rho \leq 1$ $I_2 = O(1)$.

Далее в силу (2.2.3) и (1.12.48) из [9, с. 65, 101] $I_3 = (\pi/2)(\mu(1 + \mu^2)^{-1/2} - 1) = O(1)$.

Наконец, $I_4 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} I(\varepsilon)$, где

$$I(\varepsilon) = \int_0^{\infty} (K_{1-\varepsilon}(r) - r^{\varepsilon-1}) \cos \mu r dr.$$

Последний интеграл в силу формул (1.3.1) и (1.12.39) из [9, с. 19, 52] равен

$$\begin{aligned} &\pi((\mu + (1 + \mu^2)^{1/2})^{1-\varepsilon} + (\mu + (1 + \mu^2)^{1/2})^{\varepsilon-1} \\ &\quad - (\Gamma(1 - \varepsilon))^{-1} 2\mu^{-\varepsilon} (1 + \mu^2)^{1/2}) \left(4 \sin \frac{\pi \varepsilon}{2} (1 + \mu^2)^{1/2}\right)^{-1}. \end{aligned}$$

Применяя правило Лопиталя, приходим к равенству

$$I_4 = \gamma_0 + \ln \frac{\mu}{\mu + (1 + \mu^2)^{1/2}} + ((1 + \mu^2)^{1/2}(\mu + (1 + \mu^2)^{1/2}))^{-1} \ln(\mu + (1 + \mu^2)^{1/2}),$$

откуда $I_4 = O(1)$ при $\mu \geq 1$.

Автор выражает благодарность В. А. Ильину и В. С. Серову за внимание к результатам настоящей работы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Цикон Х., Фрезе Р., Кирш В., Саймон Б. Операторы Шрёдингера с приложениями к квантовой механике и глобальной геометрии. М., 1990.
- [2] Simon B. Schrödinger semigroups // Bull. Amer. Math. Soc. 1982. V. 7. № 3. P. 447–526.
- [3] Крицков Л. В. Аналитическое описание упорядоченного спектрального представления пространства $L_2(\mathbb{R}^N)$ относительно оператора Шрёдингера с потенциалом класса Като // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31. № 12. С. 2038–2045.
- [4] Ильин В. А., Антониу И. Равномерная на всей прямой оценка отклонения от разлагаемой функции ее спектрального разложения, отвечающего оператору Шрёдингера с ограниченным и измеримым потенциалом // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31. № 10. С. 1649–1657.
- [5] Ильин В. А., Крицков Л. В. Равномерная на всей прямой $\mathbb{R}$ оценка скорости сходимости спектрального разложения, отвечающего оператору Шрёдингера с суммируемым потенциалом // Дифференц. уравнения. 1996. Т. 32. № 1. С. 32–36.
- [6] Денисов С. А. Равномерная на всей прямой $\mathbb{R}$ оценка скорости сходимости спектрального разложения, отвечающего оператору Шрёдингера с потенциалом из класса Като // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33. № 6. С. 754–761.
- [7] Крицков Л. В. Оценка снизу образов Фурье по системе фундаментальных функций одномерного оператора Шрёдингера с суммируемым потенциалом // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33. № 10. С. 1321–1328.
- [8] Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 2. М., 1966.
- [9] Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. Т. 1. М., 1969.
- [10] Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 1. М., 1965.
- [11] Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. Т. 2. М., 1970.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступило
09.12.97