Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Е. Жуковский, А. Д. Матушкин, Универсальный k -закон нуля или единицы, *Матем. заметки*, 2016, том 99, выпуск 4, 511–525

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10805>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 15:23:00

Универсальный k -закон нуля или единицы

М. Е. Жуковский, А. Д. Матушкин

В данной работе изучаются предельные вероятности свойств первого порядка случайного графа в модели Эрдеша–Реньи $G(n, n^{-\alpha})$, где $\alpha \in (0, 1)$. Мы нашли для любого натурального $k \geq 4$ и для любого рационального числа $t/s \in (0, 1)$ интервал с правым концом t/s , на котором выполнен k -закон нуля или единицы, описывающий поведение вероятностей свойств первого порядка, выраженных формулами с ограниченной числом k кванторной глубиной. Также для рациональных чисел t/s с числителем, не превосходящим 2, мы доказали, что логарифм длины найденного нами интервала имеет тот же порядок малости (при $n \rightarrow \infty$), что и логарифм длины наибольшего интервала с правым концом t/s , на котором выполнен k -закон нуля или единицы.

Библиография: 23 названия.

DOI: 10.4213/mzm10805

1. Введение. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $p = p(n) \in (0, 1)$. Рассмотрим множество $\Omega_n = \{G = (V_n, E)\}$ всех неориентированных графов без петель и кратных ребер с множеством вершин $V_n = \{1, \dots, n\}$. Случайный граф в модели Эрдеша–Реньи (см. [1]–[8]) – это случайный элемент $G(n, p)$ со значениями в множестве Ω_n и распределением $P_{n,p}$ на $(\Omega_n, \mathcal{F}_n)$, где $\mathcal{F}_n = 2^{\Omega_n}$, определенным формулой

$$P_{n,p}(G) = p^{|E|}(1-p)^{C_n^2 - |E|}, \quad G \in \Omega_n.$$

Говорят, что случайный граф *подчиняется закону нуля или единицы* для класса свойств $\mathcal{C}$, если вероятность выполнения каждого свойства из этого класса стремится либо к 0, либо к 1.

Пожалуй, самым изученным в этом направлении является класс свойств, выражаемых формулами первого порядка (см. [9], [10]). Класс свойств первого порядка обозначим $\mathcal{L}$. В 1988 г. Спенсер и Шела (см. [11], [12]) установили, что при $p = n^{-\alpha}$, $\alpha \in (0, \infty) \setminus \mathbb{Q}$, случайный граф $G(n, p)$ подчиняется закону нуля или единицы для класса свойств первого порядка (в случае множества всех свойств первого порядка мы будем говорить просто “закон нуля или единицы”). В той же работе было доказано, что при $\alpha \in (0, 1] \cap \mathbb{Q}$ случайный граф $G(n, n^{-\alpha})$ закону нуля или единицы не подчиняется.

Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда (проект № 15-11-10021).

В данной работе мы рассмотрим класс $\mathcal{L}_k \subset \mathcal{L}$ свойств, выражаемых формулами с кванторной глубиной, ограниченной числом k (см. [9]). Будем говорить, что случайный граф *подчиняется k -закону нуля или единицы*, если он подчиняется закону нуля или единицы для класса $\mathcal{L}_k$.

Ранее было установлено, что случайный граф $G(n, n^{-\alpha})$ подчиняется k -закону нуля или единицы при α близких к нулю и при α близких к единице.

ТЕОРЕМА 1 (Жуковский, [13], [14]). Пусть $k \geq 3$ и $\alpha \in (0, 1/(k-2))$. Тогда случайный граф $G(n, n^{-\alpha})$ подчиняется k -закону нуля или единицы. Если же $\alpha = 1/(k-2)$, то случайный граф $G(n, n^{-\alpha})$ не подчиняется k -закону нуля или единицы.

Тем самым, $1/(k-2)$ – наименьшее положительное значение α , при котором нарушается k -закон нуля или единицы для $G(n, n^{-\alpha})$.

ТЕОРЕМА 2 (Жуковский, [15], [16]). Пусть β – произвольное положительное рациональное число, $\alpha = 1 - 1/(2^{k-1} + \beta)$. Пусть, кроме того, $\mathcal{Q}$ – множество положительных дробей с числителем, не превосходящим числа 2^{k-1} , $\tilde{\mathcal{Q}}$ – множество натуральных чисел, не превосходящих $2^{k-1} - 2$. Случайный граф $G(n, n^{-\alpha})$ подчиняется k -закону нуля или единицы, если $\beta \in (0, \infty) \setminus \mathcal{Q}$. Случайный граф $G(n, n^{-\alpha})$ не подчиняется k -закону нуля или единицы, если $\beta \in \tilde{\mathcal{Q}}$. Если же $\alpha \in \{1 - 1/(2^k - 1), 1 - 1/2^k\}$, то случайный граф $G(n, n^{-\alpha})$ подчиняется k -закону нуля или единицы.

Итак, $1 - 1/(2^k - 2)$ – наибольшее значение α меньше 1, при котором нарушается k -закон нуля или единицы для $G(n, n^{-\alpha})$.

Обратимся к точкам α из $(0, 1)$, в окрестностях которых не выполнен k -закон нуля или единицы. Для этого введем понятие критической точки. Рациональная точка α называется *критической для свойства A* , если не выполнено следующее свойство. Существуют такие $\varepsilon > 0$ и $\delta \in \{0, 1\}$, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{n,p}(A) = \delta \quad \text{для всех } p \in [n^{-\alpha-\varepsilon}, n^{-\alpha+\varepsilon}].$$

Спенсер (см. [17]) доказал, что существуют свойства первого порядка с бесконечным количеством критических точек в интервале $(0, 1)$. В совместной работе Спенсер и Шела (см. [11]) доказали, что множество критических точек вполне упорядочено относительно порядка $>$. Таким образом, все его предельные точки являются правосторонними пределами. Будем называть точку k -*критической*, если она является критической хотя бы для одного свойства первого порядка, кванторная глубина которого не превосходит числа k . Так как для любого натурального k выполнено $|\mathcal{L}_k| < \infty$ (см. [9]), то слева от каждой рациональной точки $t/s \in (0, 1)$ существует целый интервал, внутри которого нет ни одной k -критической точки (поэтому на этом интервале выполнен k -закон нуля или единицы). Мы нашли явно такой интервал для любых натуральных $k \geq 4$ и рациональных $t/s \in (0, 1)$, а также для рациональных чисел t/s с числителем, не превосходящим 2, мы доказали, что логарифм длины найденного нами интервала имеет тот же порядок малости, что и логарифм длины максимального такого интервала.

Дальнейшее повествование будет устроено следующим образом. В п. 3 мы сформулируем доказанные нами теоремы о левых полуокрестностях рациональных чисел, внутри которых отсутствуют k -критические точки. Пункт 2 посвящен предельным

вероятностям свойств, связанных с содержанием некоторого фиксированного подграфа в случайном графе $G(n, n^{-\alpha})$. Данные свойства понадобятся нам при доказательстве теорем п. 3.

2. Малые подграфы. Введем некоторые обозначения. Для произвольного графа G обозначим через $v(G)$ число его вершин, $e(G)$ – число его ребер, $a(G)$ – число его автоморфизмов. Плотность графа $e(G)/v(G)$ обозначим $\rho(G)$. Далее мы эти обозначения будем использовать и в других разделах статьи. Граф G называется *сбалансированным*, если для каждого его подграфа H выполнено неравенство $\rho(H) \leq \rho(G)$. Граф G *строго сбалансированный*, если для любого собственного подграфа $H \subset G$ справедливо строгое неравенство $\rho(H) < \rho(G)$. Сформулируем теорему (см. [2], [3], [18]) о количестве копий произвольного графа. Пусть N_G – количество копий G в случайном графе $G(n, p)$. Положим

$$\rho^{\max}(G) = \max\{\rho(H) : H \subseteq G\}.$$

ТЕОРЕМА 3 [2], [3], [18]. Пусть G – произвольный граф. Если $p = o(n^{-1/\rho^{\max}(G)})$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{n,p}(N_G > 0) = 0.$$

Если же $n^{-1/\rho^{\max}(G)} = o(p)$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{n,p}(N_G > 0) = 1.$$

Пусть теперь G – строго сбалансированный граф. Если $n^{-1/\rho(G)} = o(p)$, то для любого $\varepsilon > 0$ справедливо равенство

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P_{n,p}(|N_G - E_{n,p}N_G| \leq \varepsilon E_{n,p}N_G) = 1,$$

где $E_{n,p}$ – это математическое ожидание по мере $P_{n,p}$. Если же $p = n^{-1/\rho(G)}$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{n,p}(N_G = 0) = e^{-1/a(G)}.$$

ТЕОРЕМА 4 [19]. Пусть $\alpha = t/n$, $t, n \in \mathbb{N}$, $t < n$. Тогда существует строго сбалансированный граф с плотностью $1/\alpha$.

Так как свойство содержать фиксированный граф H можно записать с помощью формулы первого порядка с конечной кванторной глубиной, то из теорем 3 и 4 следует, что для любого рационального $\alpha \in (0, 1)$ существует k , для которого случайный граф $G(n, n^{-\alpha})$ не подчиняется k -закону нуля или единицы.

3. Новые результаты. Нашей целью будет исследовать выполнение k -закона нуля или единицы для α , находящихся в малой левой полуокрестности некоторого фиксированного рационального числа. Ранее была доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 5 (Жуковский, [20]). Если $\alpha \in (184/277, 2/3)$, то случайный граф $G(n, n^{-\alpha})$ подчиняется 4-закону нуля или единицы.

ЗАМЕЧАНИЕ. Данный результат можно улучшить, заменив интервал $(184/277, 2/3)$ на $(53/80, 2/3)$, используя методы, аналогичные примененным в [20]. Заметим также, что интервал $(184/277, 2/3)$ является левой полуокрестностью точки $2/3$. Таким образом, данная теорема является аналогом следующих более общих фактов для $k = 4$, $t/s = 2/3$.

ТЕОРЕМА 6. Пусть $t/s \in \mathbb{Q} \cap (0, 1)$, $k \geq 4$. Положим $q = ((s+1)^k - 1)/s$. Тогда внутри интервала $(tq/(sq+1), t/s)$ нет k -критических точек.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $t/s \in \mathbb{Q} \cap (0, 1)$, $k \geq 4$. Положим $q = ((s+1)^k - 1)/s$. Тогда если $\alpha \in (tq/(sq+1), t/s)$, то случайный граф $G(n, n^{-\alpha})$ подчиняется k -закону нуля или единицы.

Теорема 5 дает больший интервал для α , чем теорема 6 для $k = 4$, $t/s = 2/3$. Мы показали, что если выполнено $C_{k-2}^{[s/t]} < s+1$, то интервал, полученный в теореме 6, можно увеличить, используя методы, примененные в доказательстве теоремы 5. Таким образом, теорему 6 можно усилить, вследствие чего теорема 5 будет частным случаем такого усиленного варианта.

ТЕОРЕМА 7. Пусть $t/s \in \mathbb{Q} \cap (0, 1)$, $k \geq 4$. Положим

$$q = \frac{(s+1)^{k-2}(1 + s(C_{k-2}^{[s/t]} + 1)) - 1}{s}.$$

Тогда внутри интервала $(tq/(sq+1), t/s)$ нет k -критических точек.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $t/s \in \mathbb{Q} \cap (0, 1)$, $k \geq 4$. Положим

$$q = \frac{(s+1)^{k-2}(1 + s(C_{k-2}^{[s/t]} + 1)) - 1}{s}.$$

Тогда если $\alpha \in (tq/(sq+1), t/s)$, то случайный граф $G(n, n^{-\alpha})$ подчиняется k -закону нуля или единицы.

Легко видеть, что при $C_{k-2}^{[s/t]} < s+1$ теорема 7 дает больший интервал значений α , при которых выполнен k -закон, чем теорема 6.

Итак, ранее был доказан k -закон нуля или единицы для правой и левой окрестности 0 и 1 соответственно. При этом оставался огромный промежуток между $1/(k-2)$ и $1 - 1/(2^{k-1})$, внутри которого не было найдено интервалов, для которых выполняется k -закон нуля или единицы. С помощью теоремы 6 и теоремы 7 мы можем найти такие интервалы на любом промежутке из интервала $(0, 1)$.

Длина интервала, предъявленного в теореме 6, равна $t/(s(s+1)^k)$. Мы доказали, что для точек вида $t/s = 2/m$, $m \geq 2$, теорема 6 дает правильный порядок малости оценки логарифма длины максимального интервала с правым концом t/s , на котором нет критических точек. Более формально, для каждого $m \geq 2$, для каждого достаточно большого k мы нашли слева от точки $2/m$ такую точку α , для которой не выполнен k -закон нуля или единицы, причем величина $2/m - \alpha$ уменьшается экспоненциально с ростом k .

ТЕОРЕМА 8. Пусть $t/s = 2/m$, $m \geq 2$, $k \geq 10m - 5$. Тогда при

$$\alpha = \frac{t}{s} - \frac{1}{2^{k-10m+8}m(m-1)}$$

случайный граф $G(n, n^{-\alpha})$ не подчиняется k -закону нуля или единицы.

Доказательство теорем 6, 7 и 8 будет построено по следующей схеме: в п. 5 мы сформулируем теорему Эренфойхта, связывающую законы нуля или единицы и

существование выигрышной стратегии второго игрока в игре Эренфойхта. В п. 6 мы докажем теорему 6, в п. 7 – теорему 7, а в п. 8 – теорему 8. Пункт 4 посвящен построению конструкций, свойства которых позволяют нам доказать, что игроки с необходимой вероятностью (стремящейся к 1) смогут играть в соответствии с определенными нами в пп. 6 и 7 стратегиями.

4. Расширения. Обратимся к задаче, поставленной Спенсером в 1990 г. (см. [7], [21]). Рассмотрим такие графы $H, G, \tilde{H}, \tilde{G}$, что

$$\begin{aligned} V(H) &= \{x_1, \dots, x_k\}, & V(G) &= \{x_1, \dots, x_l\}, \\ V(\tilde{H}) &= \{\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k\}, & V(\tilde{G}) &= \{\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_l\}, \end{aligned}$$

причем $H \subset G$, $\tilde{H} \subset \tilde{G}$ (тем самым, $k < l$). Граф $\tilde{G}$ называется (G, H) -расширением графа $\tilde{H}$, когда

$$\{x_{i_1}, x_{i_2}\} \in E(G) \setminus E(H) \implies \{\tilde{x}_{i_1}, \tilde{x}_{i_2}\} \in E(\tilde{G}) \setminus E(\tilde{H}).$$

Если выполняется соотношение

$$\{x_{i_1}, x_{i_2}\} \in E(G) \setminus E(H) \iff \{\tilde{x}_{i_1}, \tilde{x}_{i_2}\} \in E(\tilde{G}) \setminus E(\tilde{H}),$$

то $\tilde{G}$ назовем *точным* (G, H) -расширением. Зафиксируем число $\alpha > 0$. Положим

$$\begin{aligned} v(G, H) &= |V(G) \setminus V(H)|, & e(G, H) &= |E(G) \setminus E(H)|, \\ f_\alpha(G, H) &= v(G, H) - \alpha e(G, H). \end{aligned}$$

Если для любого графа S такого, что $H \subset S \subseteq G$, выполнено неравенство $f_\alpha(S, H) > 0$, то пара (G, H) называется α -надежной (см. [4], [7], [21]). Введем, наконец, понятие максимальной пары.

Пусть $\tilde{H} \subset \tilde{G} \subset \Gamma$ и $T \subset K$, причем $|V(T)| \leq |V(\tilde{G})|$. Пару $(\tilde{G}, \tilde{H})$ назовем (K, T) -максимальной в Γ , если у любого такого подграфа $\tilde{T}$ графа $\tilde{G}$, что $|V(\tilde{T})| = |V(T)|$ и $\tilde{T} \cap \tilde{H} \neq \tilde{T}$, не существует такого точного (K, T) -расширения $\tilde{K}$ в $\Gamma \setminus (\tilde{G} \setminus \tilde{T})$, что каждая вершина из $V(\tilde{K}) \setminus V(\tilde{T})$ не соединена ребром ни с одной вершиной из $V(\tilde{G}) \setminus V(\tilde{T})$.

Граф $\tilde{G}$ назовем (K, T) -максимальным в Γ , если у любого такого подграфа $\tilde{T}$ графа $\tilde{G}$, что $|V(\tilde{T})| = |V(T)|$, не существует такого точного (K, T) -расширения $\tilde{K}$ в $\Gamma \setminus (\tilde{G} \setminus \tilde{T})$, что каждая вершина из $V(\tilde{K}) \setminus V(\tilde{T})$ не соединена ребром ни с одной вершиной из $V(\tilde{G}) \setminus V(\tilde{T})$.

ТЕОРЕМА 9 (Спенсер, Жуковский, [22]). Пусть $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < 1$. Пусть пара (G, H) – α_2 -надежная (граф H может быть пустым), и пусть $\mathcal{K}$ – конечное множество пар графов таких, что для любой пары $(K, T) \in \mathcal{K}$ выполнены неравенства $f_{\alpha_1}(K, T) < 0$ и $v(T) \leq v(G)$. Пусть также $p \in [n^{-\alpha_2}, n^{-\alpha_1}]$.

Тогда с вероятностью, стремящейся к единице при $n \rightarrow \infty$, выполнено следующее свойство. Для любых вершин $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k$ графа $G(n, p)$ существует такое точное (G, H) -расширение $\tilde{G}$ графа $\tilde{H} := G(n, p)|_{\{\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k\}}$ в $G(n, p)$, что пара $(\tilde{G}, \tilde{H})$ является (K, T) -максимальной в $G(n, p)$ для любой пары $(K, T) \in \mathcal{K}$.

5. Игра Эренфойхта. Основным средством в доказательстве законов нуля или единицы для свойств первого порядка случайных графов, как мы заметили выше, служит теорема Эренфойхта, доказанная в 1960 г. (см. [23]). В данном пункте мы сформулируем ее частный случай для графов. Прежде всего определим игру Эренфойхта $\text{EHR}(G, H, i)$ на двух графах G, H с количеством раундов, равным i (см., например, [4], [7]). Пусть

$$V(G) = \{x_1, \dots, x_n\}, \quad V(H) = \{y_1, \dots, y_m\}.$$

В ν -м раунде, $1 \leq \nu \leq i$, Новатор выбирает вершину из любого графа (он выбирает либо $x_{j_\nu} \in V(G)$, либо $y_{j'_\nu} \in V(H)$). Затем Консерватор выбирает вершину из оставшегося графа. Если Новатор выбирает в μ -м раунде, скажем, вершину $x_{j_\mu} \in V(G)$, $j_\mu = j_\nu$ ($\nu < \mu$), то Консерватор должен выбрать $y_{j'_\mu} \in V(H)$. Если же в этом раунде Новатор выбирает, скажем, вершину $x_{j_\mu} \in V(G)$, $j_\mu \notin \{j_1, \dots, j_{\mu-1}\}$, то и Консерватор должен выбрать такую вершину $y_{j'_\mu} \in V(H)$, что $j'_\mu \notin \{j'_1, \dots, j'_{\mu-1}\}$. Если он не может этого сделать, то игру выигрывает Новатор. К концу игры выбраны вершины $x_{j_1}, \dots, x_{j_i} \in V(G)$, а также вершины $y_{j'_1}, \dots, y_{j'_i} \in V(H)$. Некоторые из этих вершин могут совпадать. Выберем из них только различные:

$$x_{h_1}, \dots, x_{h_l}, \quad y_{h'_1}, \dots, y_{h'_l}, \quad l \leq i.$$

Консерватор побеждает тогда и только тогда, когда соответствующие подграфы изоморфны с точностью до порядка вершин:

$$G|_{\{x_{h_1}, \dots, x_{h_l}\}} \cong H|_{\{y_{h'_1}, \dots, y_{h'_l}\}}.$$

ТЕОРЕМА 10 (Эренфойхт, [23]). *Для любых двух графов G, H и любого $i \in \mathbb{N}$ Консерватор имеет выигрышную стратегию в игре $\text{EHR}(G, H, i)$ тогда и только тогда, когда для любого свойства L первого порядка, выражаемого формулой, кванторная глубина которой не превышает i , либо оба графа обладают этим свойством, либо оба не обладают.*

Несложно показать, что из этой теоремы вытекает следующее следствие о законах нуля или единицы (см., например, [22]). Пусть $\mathbb{P}_{n,p(n)} \times \mathbb{P}_{m,p(m)}$ – прямое произведение мер $\mathbb{P}_{n,p(n)}, \mathbb{P}_{m,p(m)}$.

ТЕОРЕМА 11 (Спенсер, Жуковский, [22]). *Пусть $p_1 = p_1(n), p_2 = p_2(n)$ – две функции, все значения которых лежат в отрезке $[0, 1]$, такие, что $p_1(n) \leq p_2(n)$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Тогда если равенство*

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \mathbb{P}_{n,p(n)} \times \mathbb{P}_{m,p(m)}(\{(A, B) : \text{у Консерватора есть выигрышная стратегия в игре } \text{EHR}(A, B, k)\}) = 1$$

выполнено для любой функции $p \in [p_1, p_2]$, то для любого свойства $L \in \mathcal{L}_k$ существует такое $\delta \in \{0, 1\}$, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_{n,p(n)}(L) = \delta \quad \text{для любой функции } p \in [p_1, p_2].$$

6. Доказательство теоремы 6. Пусть $t/s \in \mathbb{Q} \cap (0, 1)$. Положим

$$q = \frac{(s+1)^k - 1}{s}. \quad (1)$$

Пусть $\alpha \in (tq/(sq+1), t/s)$. Возьмем столь малое $\varepsilon > 0$, чтобы отрезок $[\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon]$ полностью лежал внутри интервала $(tq/(sq+1), t/s)$. Пусть $p \in [n^{-\alpha-\varepsilon}, n^{-\alpha+\varepsilon}]$. Для каждого $i \in \{0, \dots, k\}$ положим

$$q_i = q - \frac{(s+1)^{k-i} - 1}{s}. \quad (2)$$

Определим $\mathcal{K}_i$, $i \in \{0, \dots, k\}$, как множество всех таких (попарно неизоморфных) пар (K, T) , что $f_{\alpha-\varepsilon}(K, T) < 0$, $v(T) \leq q_i$, $v(K, T) \leq q - q_i$. Заметим, что $\mathcal{K}_0$ – множество таких пар $(K, (\emptyset, \emptyset))$, что $\rho(K, T) > 1/(\alpha - \varepsilon)$, а $\mathcal{K}_k = \emptyset$. Теперь определим множество графов $\mathcal{S}$. Граф G принадлежит $\mathcal{S}$ тогда и только тогда, когда он обладает следующими свойствами:

- 1) в графе G нет подграфов, количество вершин которых не превосходит q , а плотность больше, чем $1/(\alpha - \varepsilon)$;
- 2) пусть $\mathcal{H}$ – множество таких $(\alpha + \varepsilon)$ -надежных пар (H_1, H_2) , что $v(H_1) \leq q$; тогда для любой пары $(H_1, H_2) \in \mathcal{H}$ и для любого подграфа $G_2 \subset G$ на $v(H_2)$ вершинах в графе G найдется такое точное (H_1, H_2) -расширение G_1 подграфа G_2 , что (G_1, G_2) является (K_1, K_2) -максимальной парой в G для любой пары $(K_1, K_2) \in \mathcal{K}_i$ для любого $i \in \{1, \dots, k\}$.

В силу теорем 3 и 9 для любого $p \in [n^{-\alpha-\varepsilon}, n^{-\alpha+\varepsilon}]$ справедливо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{n,p}(\mathcal{S}) = 1.$$

Следовательно, в силу теоремы 11 для доказательства теоремы 6 достаточно найти выигрышную стратегию Консерватора в игре $\text{EHR}(G, H, k)$ для всех таких пар графов (G, H) , что $G, H \in \mathcal{S}$.

Итак, пусть $G, H \in \mathcal{S}$. Для каждого $h \in \{1, \dots, k\}$ обозначим X_h, Y_h графы, выбранные в h -м раунде Новатором и Консерватором соответственно. Положим также $X_0 = G, Y_0 = H$. Таким образом, множества $\{X_h, Y_h\}$ и $\{G, H\}$ совпадают для всех $h \in \{0, \dots, k\}$. Вершины, выбранные в первых h раундах в графе X_h , мы будем обозначать $x_h^1, \dots, x_h^h$, а в графе Y_h – $y_h^1, \dots, y_h^h$.

Определим теперь стратегию Консерватора для раундов $1, \dots, k$. Будем говорить, что Консерватор выиграл в l -м раунде, где $l \in \{0, \dots, k\}$, если существуют такие подграфы $\tilde{X}_l \subset X_l$ и $\tilde{Y}_l \subset Y_l$, что $\{x_l^1, \dots, x_l^l\} \in V(\tilde{X}_l)$, $\{y_l^1, \dots, y_l^l\} \in V(\tilde{Y}_l)$, и существует изоморфизм графов $\varphi_l: V(\tilde{X}_l) \rightarrow V(\tilde{Y}_l)$ такой, что $\varphi_l(x_l^1) = y_l^1, \dots, \varphi_l(x_l^l) = y_l^l$, а также $v(\tilde{X}_l) = v(\tilde{Y}_l) \leq q_l$, и для любой пары $(K, T) \in \mathcal{K}_l$ графы X_l и Y_l не содержат (K, T) -расширений графов $\tilde{X}_l$ и $\tilde{Y}_l$ соответственно. Заметим, что определение выигрыша Консерватора в игре $\text{EHR}(G, H, k)$ совпадает с новым определением выигрыша в k -м раунде. Заметим, кроме того, что для графов $\tilde{X}_0 = (\emptyset, \emptyset)$, $\tilde{Y}_0 = (\emptyset, \emptyset)$ в силу свойства 1) выполнено условие победы Консерватора в раунде с номером 0. Докажем, что если $1 \leq l \leq k$ и Консерватор выиграл в $(l-1)$ -м раунде, то он сможет выиграть и в l -м раунде (в смысле нашего нового определения выигрыша) и, тем самым, докажем утверждение теоремы.

Итак, пусть было сыграно $l - 1$ раундов, причем Консерватор выиграл в $(l - 1)$ -м раунде. В l -м раунде Новатор выбирает некоторую вершину x_l^l . Если $x_l^l \in V(\tilde{X}_{l-1})$ или $x_l^l \in V(\tilde{Y}_{l-1})$, то Консерватор, очевидно, выиграет в l -м раунде, выбрав вершину y_l^l , являющуюся образом x_l^l при изоморфизме φ_{l-1} или φ_{l-1}^{-1} соответственно.

Пусть $x_l^l \in V(X_{l-1}) \setminus V(\tilde{X}_{l-1})$ (в этом случае положим $\tilde{X}_l = \tilde{X}_{l-1}$, $\tilde{Y}_l = \tilde{Y}_{l-1}$) или $x_l^l \in V(Y_{l-1}) \setminus V(\tilde{Y}_{l-1})$ (в этом случае положим $\tilde{X}_l = \tilde{Y}_{l-1}$, $\tilde{Y}_l = \tilde{X}_{l-1}$).

Определим дополнительную конструкцию, которая нам потребуется в дальнейшем. Пусть $\mathcal{K} = \{(K, T), T \subset K\}$ – некоторое конечное множество пар графов. Пару $(\tilde{K}, \tilde{T})$ будем называть $\mathcal{K}$ -цепью, если существует такое $r \in \mathbb{N}$ и такой набор графов $\tilde{T} = K^0 \subset K^1 \subset \dots \subset K^r = \tilde{K}$, что для любого $j \in \{1, \dots, r\}$ граф K^j является (K, T) -расширением графа K^{j-1} для некоторой пары $(K, T) \in \mathcal{K}$.

Пусть пара $(Z, X_l|_{V(\tilde{X}_l) \cup \{x_l^l\}})$ для некоторого $Z \subset X_l$ является такой $\mathcal{K}_l$ -цепью, что граф X_l не содержит (K, T) -расширений графа Z ни при каком $(K, T) \in \mathcal{K}_l$. Докажем, что пара $(Z, \tilde{X}_l)$ является $(\alpha + \varepsilon)$ -надежной. Пусть

$$X_l|_{V(\tilde{X}_l) \cup \{x_l^l\}} = K^0 \subset K^1 \subset \dots \subset K^r = Z,$$

где для каждого $j \in \{1, \dots, r\}$ граф K^j является (K, T) -расширением графа K^{j-1} для некоторой пары $(K, T) \in \mathcal{K}_l$. Для каждого $j \in \{1, \dots, r\}$ положим

$$v_j = v(K^j) - v(K^{j-1}), \quad e_j = e(K^j) - e(K^{j-1}).$$

В силу определения множества $\mathcal{K}_l$ для любого $j \in \{1, \dots, r\}$ выполнено неравенство $f_{\alpha-\varepsilon}(K^j, K^{j-1}) < 0$. Следовательно, $e_j > v_j/(\alpha - \varepsilon) > sv_j/t$. Таким образом, $e_j \geq (sv_j + 1)/t$. Поэтому если $r \geq s + 1$, то

$$\begin{aligned} f_{\alpha-\varepsilon}(K^r, \tilde{X}_l) &\leq 1 + \sum_{j=1}^r v_j - (\alpha - \varepsilon) \sum_{j=1}^r e_j \leq 1 - \frac{(\alpha - \varepsilon)r}{t} + \left(1 - \frac{(\alpha - \varepsilon)s}{t}\right) \sum_{j=1}^r v_j \\ &< 1 - \frac{rq}{qs + 1} + \frac{r(q - q_l)}{qs + 1} = 1 - \frac{rq_l}{qs + 1} \leq 1 - \frac{(s + 1)q_l}{qs + 1} \\ &= \frac{s(q - q_l) + 1 - q_l}{qs + 1} = \frac{(s + 1)^{k-1} - q_l}{qs + 1} = 0 \end{aligned}$$

в силу (1) и (2). Итак, $f_{\alpha-\varepsilon}(K^{s+1}, \tilde{X}_l) < 0$. Так как

$$v(K^{s+1}, \tilde{X}_l) \leq 1 + (s + 1)(q - q_l) = q - q_{l-1},$$

получаем противоречие с определением графа $\tilde{X}_l$. Следовательно, $r \leq s$. Заметим, что для любого подграфа $\tilde{K}^r \subseteq K^r$, содержащего $\tilde{X}_l$, выполнено неравенство $f_{\alpha-\varepsilon}(\tilde{K}^r, \tilde{X}_l) \geq 0$, иначе аналогично получим противоречие с определением графа $\tilde{X}_l$. Докажем, что выполнено более сильное неравенство $f_{\alpha+\varepsilon}(\tilde{K}^r, \tilde{X}_l) > 0$. Действительно, иначе

$$\frac{e(\tilde{K}^r, \tilde{X}_l)}{v(\tilde{K}^r, \tilde{X}_l)} \in \left[\frac{1}{\alpha + \varepsilon}, \frac{1}{\alpha - \varepsilon} \right] \subset \left(\frac{s}{t}, \frac{sq + 1}{tq} \right).$$

При этом $v(\tilde{K}^r, \tilde{X}_l) \leq q$, следовательно,

$$e(\tilde{K}^r, \tilde{X}_l) \in \left(\frac{sq}{t}, \frac{sq}{t} + \frac{1}{t} \right).$$

Но данный интервал, очевидно, не содержит целых чисел. Таким образом, пара $(K^r, \tilde{X}_l)$ действительно является $(\alpha + \varepsilon)$ -надежной. Так как

$$v(K^r) \leq q_{l-1} + 1 + \sum_{j=1}^r v_j \leq q_{l-1} + 1 + s \cdot (q - q_l) = q_l,$$

то по свойству 2) в графе Y_l существует такая вершина y_l^l (которую и выберет Консерватор) и подграф W , являющийся точным $(K^r, \tilde{X}_l)$ -расширением графа $\tilde{Y}_l$, что вершина y_l^l является образом вершины x_l^l при изоморфизме графов $\varphi_l: V(K^r) \rightarrow V(W)$ таком, что $\varphi_l|_{V(\tilde{X}_l)} = \varphi_{l-1}$ (или φ_{l-1}^{-1}). Переобозначим $\tilde{X}_l = K^r$, $\tilde{Y}_l = W$. Итак, Консерватор выиграл в l -м раунде.

Таким образом, действуя по описанной стратегии, Консерватор выиграет в k -м раунде. А значит, он выиграет в игре $\text{EHR}(G, H, k)$, что и требовалось доказать.

7. Доказательство теоремы 7. Пусть $t/s \in \mathbb{Q} \cap (0, 1)$. Положим

$$m = C_{k-2}^{[s/t]} + 1, \quad q = \frac{(s+1)^{k-2}(1+sm) - 1}{s}.$$

Пусть $\alpha \in (tq/(sq+1), t/s)$, $p = n^{-\alpha}$. Введем некоторые дополнительные обозначения. Для каждого $i \in \{0, \dots, k-2\}$ положим

$$q_i = q - \frac{(s+1)^{k-2-i}(1+sm) - 1}{s}.$$

Как и при доказательстве теоремы 6, определим $\mathcal{K}_i$ (но теперь для $i \in \{0, \dots, k-2\}$) как множество всех таких пар (K, T) , что $f_{\alpha-\varepsilon}(K, T) < 0$, $v(T) \leq q_i$, $v(K, T) \leq q - q_i$. Множество графов, обладающих свойствами 1) и 2), определяется в точности, как и при доказательстве теоремы 6 (с новыми $\mathcal{K}_i$, где $i \in \{0, \dots, k-2\}$, и q).

В силу теорем 3, 9 и 11 для доказательства теоремы 7 достаточно найти выигрышную стратегию Консерватора в игре $\text{EHR}(G, H, k)$ для всех таких пар графов (G, H) , что $G, H \in \mathcal{S}$.

Итак, пусть $G, H \in \mathcal{S}$. Как и ранее, для каждого $h \in \{1, \dots, k\}$ обозначим через X_h, Y_h графы, выбранные в h -м раунде Новатором и Консерватором соответственно. Вершины, выбранные в первых h раундах в графе X_h , мы будем обозначать $x_h^1, \dots, x_h^h$, а в графе Y_h — $y_h^1, \dots, y_h^h$.

Стратегия Консерватора для раундов $1, \dots, k-2$ в точности повторяет стратегию Консерватора для раундов $1, \dots, k$ в доказательстве теоремы 6. Как и ранее, мы говорим, что *Консерватор выиграл в l -м раунде* (но теперь $l \in \{0, \dots, k-2\}$), если существуют такие подграфы $\tilde{X}_l \subset X_l$ и $\tilde{Y}_l \subset Y_l$, что

$$\{x_l^1, \dots, x_l^l\} \in V(\tilde{X}_l), \quad \{y_l^1, \dots, y_l^l\} \in V(\tilde{Y}_l),$$

и существует изоморфизм графов $\varphi_l: V(\tilde{X}_l) \rightarrow V(\tilde{Y}_l)$ такой, что

$$\varphi_l(x_l^1) = y_l^1, \quad \dots, \quad \varphi_l(x_l^l) = y_l^l,$$

а также $v(\tilde{X}_l) = v(\tilde{Y}_l) \leq q_l$ и для любой пары $(K, T) \in \mathcal{K}_l$ графы X_l и Y_l не содержат (K, T) -расширений графов $\tilde{X}_l$ и $\tilde{Y}_l$ соответственно. Действуя по описанной в п. 6 стратегии, Консерватор выиграет в раунде с номером $k-2$.

Если в $(k-1)$ -м раунде Новатор выбирает вершину x_{k-1}^{k-1} в графе $\tilde{X}_{k-2}$ (в этом случае положим $\tilde{X}_{k-1} = \tilde{X}_{k-2}$, $\tilde{Y}_{k-1} = \tilde{Y}_{k-2}$) или в графе $\tilde{Y}_{k-2}$ (в этом случае положим $\tilde{X}_{k-1} = \tilde{Y}_{k-2}$, $\tilde{Y}_{k-1} = \tilde{X}_{k-2}$), то Консерватор выберет вершину y_{k-1}^{k-1} , являющуюся образом вершины x_{k-1}^{k-1} при изоморфизме φ_{k-2} или φ_{k-2}^{-1} соответственно. Если и в k -м раунде Новатор выберет вершину либо в графе $\tilde{X}_{k-1}$, либо в графе $\tilde{Y}_{k-1}$, то Консерватор, очевидно, победит, выбрав соответствующую вершину либо в графе $\tilde{Y}_{k-1}$, либо в графе $\tilde{X}_{k-1}$. Если же в k -м раунде Новатор выберет вершину, не принадлежащую ни графу $\tilde{X}_{k-1}$, ни графу $\tilde{Y}_{k-1}$, то пусть для определенности он выбрал вершину в графе X_{k-1} . Тогда в силу победы Консерватора в $(k-2)$ -м раунде пара $(X_{k-1}|_{V(\tilde{X}_{k-1}) \cup \{x_k^k\}}, \tilde{X}_{k-1})$ является $(\alpha + \varepsilon)$ -надежной. Следовательно, в силу свойства 2) в графе Y_{k-1} существует такая вершина y_k^k , что граф $Y_{k-1}|_{V(\tilde{Y}_{k-1}) \cup \{y_k^k\}}$ является точным $(X_{k-1}|_{V(\tilde{X}_{k-1}) \cup \{x_k^k\}}, \tilde{X}_{k-1})$ -расширением графа $\tilde{Y}_{k-1}$. Следовательно, Консерватор победит, выбрав вершину y_k^k .

Пусть в $(k-1)$ -м раунде Новатор выбирает вершину, принадлежащую либо графу $X_{k-2} \setminus \tilde{X}_{k-2}$ (положим $\tilde{X}_{k-1} = \tilde{X}_{k-2}$, $\tilde{Y}_{k-1} = \tilde{Y}_{k-2}$), либо графу $Y_{k-2} \setminus \tilde{Y}_{k-2}$ (положим $\tilde{Y}_{k-1} = \tilde{X}_{k-2}$, $\tilde{X}_{k-1} = \tilde{Y}_{k-2}$). Для каждого $[s/t]$ -элементного подмножества множества $\{x_{k-1}^1, x_{k-1}^2, \dots, x_{k-1}^{k-2}\}$ выберем в графе $X_{k-1} \setminus \tilde{X}_{k-1}$ ровно одну вершину z (если она существует), соединенную ребром со всеми вершинами из данного $[s/t]$ -элементного подмножества и с вершиной x_{k-1}^{k-1} . Объединим все выбранные таким образом вершины вместе с вершиной x_{k-1}^{k-1} в множество V . Так как

$$|V| \leq C_{k-2}^{[s/t]} + 1 = m,$$

то в силу определения графа $\tilde{X}_{k-1}$ пара $(X_{k-1}|_{V(\tilde{X}_{k-1}) \cup V}, \tilde{X}_{k-1})$ является $(\alpha + \varepsilon)$ -надежной. Следовательно, в силу свойства 2) в графе Y_{k-1} существует такая вершина y_{k-1}^{k-1} и граф W , являющийся точным $(X_{k-1}|_{V(\tilde{X}_{k-1}) \cup V}, \tilde{X}_{k-1})$ -расширением графа $\tilde{Y}_{k-1}$, что при изоморфизме графов $X_{k-1}|_{V(\tilde{X}_{k-1}) \cup V}$ и W вершины $x_{k-1}^1, x_{k-1}^2, \dots, x_{k-1}^{k-1}$ переходят в вершины $y_{k-1}^1, y_{k-1}^2, \dots, y_{k-1}^{k-1}$ соответственно.

Если в k -м раунде Новатор выберет вершину либо в графе $\tilde{X}_{k-1}$, либо в графе $\tilde{Y}_{k-1}$, то Консерватор, очевидно, победит, выбрав нужную вершину либо в графе $\tilde{Y}_{k-1}$, либо в графе $\tilde{X}_{k-1}$ соответственно. Если же в k -м раунде Новатор выберет вершину, не принадлежащую ни графу $\tilde{X}_{k-1}$, ни графу $\tilde{Y}_{k-1}$, то пусть для определенности он выбрал вершину в графе X_{k-1} . Тогда в силу определения графа $\tilde{X}_{k-1}$ вершина x_k^k соединена ребром с не более чем $[s/t]$ вершинами из графа $\tilde{X}_{k-1}$, следовательно, она соединена ребром либо с не более чем $[s/t]$ вершинами из множества $\{x_{k-1}^1, x_{k-1}^2, \dots, x_{k-1}^{k-1}\}$, либо с вершиной x_{k-1}^{k-1} и с $[s/t]$ вершинами из множества $\{x_{k-1}^1, x_{k-1}^2, \dots, x_{k-1}^{k-2}\}$; иначе

$$\begin{aligned} f_{\alpha-\varepsilon}(X_{k-1}|_{V(\tilde{X}_{k-1}) \cup \{x_k^k\}}, \tilde{X}_{k-1}) &\leq 1 - (\alpha - \varepsilon) \left(\left\lceil \frac{s}{t} \right\rceil + 1 \right) < 1 - \frac{([s/t] + 1)tq}{sq + 1} \\ &\leq 1 - \frac{(s/t + 1/t)tq}{sq + 1} < 0, \end{aligned}$$

что противоречит определению графа $\tilde{X}_{k-1}$. Во втором случае Консерватор сможет выбрать нужную вершину y_k^k и выиграть по построению. В первом же случае в силу

свойства 2) в графе Y_{k-1} существует такая вершина y_k^k , что $Y_{k-1} \setminus \{y_k^1, y_k^2, \dots, y_k^k\}$ является точным $(X_{k-1} \setminus \{x_k^1, x_k^2, \dots, x_k^k\}, X_{k-1} \setminus \{x_k^1, x_k^2, \dots, x_k^{k-1}\})$ -расширением $Y_{k-1} \setminus \{y_k^1, y_k^2, \dots, y_k^{k-1}\}$. Следовательно, Консерватор победит, выбрав вершину y_k^k .

8. Доказательство теоремы 8. Пусть G – произвольный граф, $u, v \in V(G)$, $u \neq v$. Будем говорить, что G является m -цепью с концами u и v , если выполнено следующее условие. Для некоторого $d \in \mathbb{N}$ существуют такие подграфы $W, c_1, \dots, c_d \subset G$, что W – цепь длины d (длиной цепи называется количество ребер в ней) с концами u, v и ребрами $e_1, \dots, e_d$, для любого $i \in \{1, 2, \dots, d\}$ c_i – клика (полный граф) на m вершинах, содержащая ребро e_i , и, кроме того, $G = c_1 \cup \dots \cup c_d$ и любые две клики c_i, c_j , $i, j \in \{1, \dots, d\}$, $i \neq j$, пересекаются по не более чем одной вершине. Наименьшее из всех чисел d , для которых выполнены эти условия, будем называть *длиной m -цепи G* . Будем называть m -цепь длины d *простой*, если в качестве W можно взять простую цепь длины d . Заметим, что если m -цепь длины d является простой, то любая клика c_i , $i \in \{1, \dots, d\}$, из ее определения имеет общие вершины лишь с “соседними” кликами c_{i-1} и c_{i+1} (здесь и далее мы считаем, что $c_0 = c_d, c_{d+1} = c_1$). Заметим, наконец, что у любой m -цепи G с концами u, v существует индуцированный подграф, который является простой m -цепью с концами u, v (чтобы доказать существование такого подграфа достаточно в качестве графа W , определяющего этот подграф, выбрать цепь наименьшей длины с концами u, v в G).

Будем говорить, что граф G является m -циклом, если выполнено следующее условие. Для некоторого $d \in \mathbb{N}$ существуют такие подграфы $C, c_1, \dots, c_d \subset G$, что C – простой цикл длины d (длиной простого цикла называется количество ребер в нем) с ребрами $e_1, \dots, e_d$, для любого $i \in \{1, \dots, d\}$ c_i – клика на m вершинах, содержащая ребро e_i , и, кроме того, $G = c_1 \cup \dots \cup c_d$ и любая клика c_i , $i \in \{1, \dots, d\}$, пересекается только с “соседними” кликами c_{i-1}, c_{i+1} и только по одной вершине (здесь и далее мы считаем, что $c_0 = c_d, c_{d+1} = c_1$). Число d , для которого выполнены эти условия, будем называть *длиной m -цикла G* . Вершины графа C в определении m -цикла мы будем называть его *узловыми вершинами*. Заметим, что число вершин в m -цикле длины d есть $d(m-1)$. Мы будем обозначать M_d некоторый граф, являющийся m -циклом длины d .

Обозначим $k_1 = k - 10m + 8$. Из условия теоремы имеем $k_1 \geq 3$. Пусть $l_1, l_2 \in [4, 2^{k_1}]$ – два натуральных числа. Рассмотрим граф G_{l_1, l_2} , являющийся объединением двух копий M и M' графов M_{l_1}, M_{l_2} соответственно, пересекающихся ровно по одной вершине, которая является узловой вершиной обоих графов. Плотность графа G равна

$$\frac{|E(G)|}{|V(G)|} = \frac{(l_1 + l_2) \cdot (m(m-1))/2}{(l_1 + l_2)(m-1) - 1} = \frac{1}{2/m - 2/((l_1 + l_2)m(m-1))} \geq \frac{1}{\alpha},$$

причем равенство достигается тогда и только тогда, когда $l_1 = l_2 = 2^{k_1}$. Докажем, что граф G является строго сбалансированным. Обозначим подграфы $C, c_1, \dots$ из определения m -циклов M и M' через $C_1, c_1^1, \dots, c_{l_1}^1$ и $C_2, c_1^2, \dots, c_{l_2}^2$ соответственно. Предположим, что G не строго сбалансирован. Тогда существует такой подграф $H \subset G$, что $\rho(H) \geq \rho(G)$. Можно считать, что H связан, так как его плотность не превосходит максимальной из плотностей его компонент связности. Можно также считать, что для каждой из клик c_i^j , $i \in \{1, \dots, l_j\}$, $j \in \{1, 2\}$, хотя бы одна вершина которой входит в H , либо все ее ребра входят в H , либо все они в H не входят, иначе

добавив “недостающие” ребра, получим граф, плотность которого больше, чем $\rho(G)$. Действительно, предположим, что клика c_i^j содержится в H “частично”, а именно в H входит v ее вершин и $v(v-1)/2$ ребер, где $v \in [2, m-1]$. Тогда, дополнив граф H оставшейся частью клики c_i^j , мы получим граф с плотностью

$$\frac{e(H) + (m(m-1))/2 - v(v-1)/2}{v(H) + (m-v)} > \rho(G),$$

так как

$$\frac{m(m-1)/2 - v(v-1)/2}{m-v} = \frac{m+v-1}{2} \geq \frac{m+1}{2} > \rho(G)$$

при $m \geq 2$. Можно также считать, что если H содержит ровно одну вершину некоторой клики c_i^j , то он содержит не более одной вершины соседних с ней клик c_{i-1}^j и c_{i+1}^j ; иначе, удалив соседнюю клику (без одной вершины клики c_i^j), мы уменьшим число вершин на $m-1$, а число ребер – на $m(m-1)/2$, следовательно, плотность графа увеличится. Таким образом, можем считать, что H – это один из m -циклов M или M' . Но в таком случае $\rho(H) = m/2 < \rho(G)$. Получили противоречие.

Поскольку $G_{2^{k_1}, 2^{k_1}}$ – строго сбалансированный граф с плотностью $1/\alpha$, по теореме 3 имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{n,p}(N_G > 0) = 1 - e^{-1/\alpha(G)} \notin \{0, 1\}. \quad (3)$$

Будем говорить, что два свойства A, B асимптотически эквивалентны, если пределы $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{n,p}(A)$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{n,p}(B)$ существуют и равны. Далее мы приведем пример свойства A из класса $\mathcal{L}_k$, асимптотически эквивалентного свойству $\{N_G > 0\}$.

Пусть формула $\text{NI}(u_1, \dots, u_h)$ выражает свойство, заключающееся в том, что вершины $u_1, \dots, u_h$ попарно различны:

$$\text{NI}(u_1, \dots, u_h) = \left(\bigwedge_{1 \leq i < j \leq h} (\neg(u_i = u_j)) \right).$$

Определим формулу $K(x_1, \dots, x_m)$, выражающую свойство “вершины $x_1, \dots, x_m$ образуют клику размера m ”:

$$K(x_1, \dots, x_m) = \left(\text{NI}(x_1, \dots, x_m) \wedge \left(\bigwedge_{1 \leq i < j \leq m} (x_i \sim x_j) \right) \right).$$

Далее, рассмотрим формулу $\text{МК}(x_1, \dots, x_m)$, выражающую свойство “вершины $x_1, \dots, x_m$ образуют клику размера m , и любая клика графа либо совпадает с этой, либо пересекает ее по не более чем одной вершине”:

$$\begin{aligned} \text{МК}(x_1, \dots, x_m) \\ = (K(x_1, \dots, x_m) \wedge [\forall y_1 \dots \forall y_m (K(y_1, \dots, y_m) \Rightarrow \phi(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_m))]), \end{aligned}$$

где формула

$$\phi(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_m) = \left(\left(\bigvee_{\sigma \in \Sigma} \bigwedge_{i=1}^m (x_i = y_{\sigma(i)}) \right) \vee \left(\bigvee_{i=1}^m \bigwedge_{1 \leq \hat{i} \leq m, \hat{i} \neq i} \bigwedge_{j=1}^m (x_{\hat{i}} \neq y_j) \right) \right)$$

выражает свойство “множества $\{x_1, \dots, x_m\}, \{y_1, \dots, y_m\}$ либо совпадают, либо пересекаются по не более чем одной вершине” (здесь Σ – множество всех перестановок

последовательности $1, \dots, m$). Определим, наконец, для произвольного натурального числа l формулу $D_l(x_1, x_2)$, из истинности которой следует существование m -цепи длины l с концами x_1 и x_2 , никакая вершина которой не проходит через заданное множество вершин $u_1, \dots, u_h$:

$$D_1(x_1, x_2, u_1, \dots, u_h) = (\exists x_3 \dots \exists x_m : (\text{МК}(x_1, \dots, x_m) \wedge \text{НИ}(x_1, \dots, x_m, u_1, \dots, u_h))),$$

при $l > 1$

$$D_l(x_1, x_2, u_1, \dots, u_h) = (\exists y : (D_{\lfloor l/2 \rfloor}(x_1, y) \wedge D_{\lceil l/2 \rceil}(y, x_2) \wedge \text{НИ}(x_1, x_2, y, u_1, \dots, u_h))).$$

Заметим, что если в графе существует m -цепь G длины l с концами x_1 и x_2 , никакая вершина которой не проходит через заданное множество вершин $u_1, \dots, u_h$, но не является истинной формула $D_l(x_1, x_2, u_1, \dots, u_h)$, то существует клика на m вершинах, пересекающая граф G по хотя бы одному ребру, но не содержащаяся в нем целиком. Из определения формулы $D_l(x_1, x_2, u_1, \dots, u_h)$ легко видеть, что ее кванторная глубина равна $\lceil \log_2 l \rceil + 2m - 2$.

Определим, наконец, искомое свойство A . Положим $l = 2^{k_1-1} - 2$. Возьмем

$$A = \left(\exists x \exists y \exists y' \exists v_1^1 \dots \exists v_1^{m-1} \dots \exists v_4^1 \dots \exists v_4^{m-1} \exists u_1^1 \dots \exists u_1^{m-1} \dots \exists u_4^1 \dots \exists u_4^{m-1} \right. \\ \left[(\text{НИ}(x, y, y', v_i^j, u_i^j, i \in \{1, 2, 3, 4\}, j \in \{1, \dots, m-1\})) \right. \\ \wedge \left(\bigwedge_{i=1}^2 (\text{МК}(y, u_i^1, \dots, u_i^{m-1}) \wedge \text{МК}(y', u_{i+2}^1, \dots, u_{i+2}^{m-1})) \right) \\ \left. \wedge \left(\bigwedge_{i=1}^4 (\text{МК}(x, v_i^1, \dots, v_i^{m-1}) \wedge D_l(v_i^{m-1}, u_i^{m-1}, x, y, y', v_i^j, u_i^j, (i, j) \in J)) \right) \right] \Big),$$

где

$$J = (\{1, 2, 3, 4\} \setminus \{i\} \times \{1, \dots, m-1\}) \cup (\{i\} \times \{1, \dots, m-2\}).$$

Из определения свойства A легко видеть, что его кванторная глубина равна

$$3 + 8m - 8 + \lceil \log_2(2^{k_1-1} - 2) \rceil + 2m - 2 \leq 10m - 7 + k_1 - 1 = k_1 + 10m - 8 = k.$$

Следовательно, $A \in \mathcal{L}_k$.

Рассмотрим множество $\tilde{\Omega}_n \subset \Omega_n$ всех графов, в которых не существует подграфов H с $v(H) \leq m2^{k_1+1}$ и $\rho(H) > 1/\alpha$. В силу теоремы 3 имеем $P_{n,p}(\tilde{\Omega}_n) = 1$. Пусть $\mathcal{G} \in \tilde{\Omega}_n$ и $\mathcal{G}$ содержит подграф X , изоморфный графу $G_{2^{k_1}, 2^{k_1}}$. Пусть, кроме того, $\mathcal{K}$ – множество всех таких пар (K, T) , что K – полный граф на m вершинах, а $v(T) \geq 2$. Для того чтобы доказать, что граф $\mathcal{G}$ обладает свойством A , достаточно установить, что в $\mathcal{G}$ нет (K, T) -расширений подграфов графа X ни для какой пары $(K, T) \in \mathcal{K}$. Предположим, что хотя бы одно такое расширение Y имеется. Тогда $\rho(Y \cup X) > 1/\alpha$, так как $\rho(X) = 1/\alpha$ и

$$f_\alpha(Y, X) \leq v(Y, X) - \alpha \frac{v(Y, X)(2m - v(Y, X) - 1)}{2} \leq v(Y, X) \left(1 - \alpha \frac{m+1}{2} \right) < 0.$$

Кроме того,

$$v(Y) \leq 2(m-1)2^{k_1} - 1 + m - 2 < m2^{k_1+1}.$$

Тем самым, получили противоречие с принадлежностью графа $\mathcal{G}$ множеству $\tilde{\Omega}_n$, и, следовательно, граф $\mathcal{G}$ обладает свойством A .

Предположим теперь, что $\mathcal{G} \in \tilde{\Omega}_n$ и $\mathcal{G}$ обладает свойством A . Тогда в графе $\mathcal{G}$ найдутся такие попарно различные вершины

$$x, \quad y, \quad y', \quad v_i^j, \quad u_i^j, \quad i \in \{1, 2, 3, 4\}, \quad j \in \{1, \dots, m-1\},$$

что существуют m -цепи C_i , $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, длины l с концами v_i^{m-1}, u_i^{m-1} (обозначим графы $W, c_1, \dots, c_l$ из определения этих m -цепей $W_i, c_1^i, \dots, c_l^i$), наборы вершин $x, v_i^1, \dots, v_i^{m-1}$, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, а также $y, u_i^1, \dots, u_i^{m-1}$, $i \in \{1, 2\}$, и $y', u_i^1, \dots, u_i^{m-1}$, $i \in \{3, 4\}$, образуют клики, причем графы C_i , $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, пересекают эти клики только по концевым вершинам цепей W_i . Как было замечено выше, в каждом из графов C_i , $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, содержится подграф $\tilde{C}_i$, являющийся простой m -цепью с концами v_i^{m-1}, u_i^{m-1} . Если $\mathcal{G}$ не содержит подграфа, изоморфного графу X , то либо хотя бы одна из цепей $\tilde{C}_i$, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, имеет длину меньше, чем $2^{k_1-1} - 2$, либо хотя бы два графа из $\tilde{C}_i$, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, пересекаются по вершинам. Очевидно, в обоих случаях в графе $\mathcal{G}$ существует подграф, изоморфный графу G_{l_1, l_2} , где $l_1, l_2 \in [4, 2^{k_1}]$, причем хотя бы одно из l_1, l_2 строго меньше чем 2^{k_1} . Но

$$\rho(G_{l_1, l_2}) > \frac{1}{\alpha}, \quad v(G_{l_1, l_2}) < (m-1)2^{k_1+1}.$$

Получили противоречие. Следовательно, граф $\mathcal{G}$ содержит подграф, изоморфный $G_{2^{k_1}, 2^{k_1}}$. Таким образом, в силу (3)

$$P_{n,p}(A) \sim P_{n,p}(\tilde{\Omega}_n \cap A) = P_{n,p}(\tilde{\Omega}_n \cap \{N_G > 0\}) \sim P_{n,p}(N_G > 0) \sim 1 - e^{-1/\alpha(G)}.$$

Следовательно, поскольку кванторная глубина свойства A не превосходит k , для $\alpha = 2/m - 1/(2^{k_1}m(m-1))$ случайный граф $G(n, n^{-\alpha})$ не подчиняется k -закону нуля или единицы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] М. Е. Жуковский, А. М. Райгородский, “Случайные графы: модели и предельные характеристики”, *УМН*, **70**:1 (2015), 35–88.
- [2] P. Erdős, A. Rényi, “On the evolution of random graphs”, *Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl.*, **5** (1960), 17–61.
- [3] B. Bollobás, “Threshold functions for small subgraphs”, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **90**:2 (1981), 197–206.
- [4] S. Janson, T. Łuczak, A. Rucinski, *Random Graphs*, Wiley-Interscience, New York, 2000.
- [5] B. Bollobás, *Random Graphs*, Cambridge Stud. in Adv. Math., **73**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2001.
- [6] В. Ф. Колчин, *Случайные графы*, Теория вероятностей и математическая статистика, Физматлит, М., 2000.
- [7] Н. Алон, Дж. Спенсер, *Вероятностный метод*, Бином. Лаборатория знаний, М., 2007.
- [8] А. М. Райгородский, *Модели случайных графов*, МЦНМО, М., 2011.

- [9] Н. К. Верещагин, А. Шень, *Языки и исчисления*, МЦНМО, М., 2000.
- [10] В. А. Успенский, Н. К. Верещагин, В. Е. Плиско, *Вводный курс математической логики*, Физматлит, М., 1997.
- [11] S. Shelah, J. Spencer, “Zero-one laws for sparse random graphs”, *J. Amer. Math. Soc.*, **1**:1 (1988), 97–115.
- [12] J. H. Spencer, *The Strange Logic of Random Graphs*, Algorithms Combin., **22**, Springer-Verlag, Berlin, 2001.
- [13] М. Zhukovskii, “Zero-one k -law”, *Discrete Math.*, **312**:10 (2012), 1670–1688.
- [14] М. Е. Жуковский, “Законы нуля или единицы для формул первого порядка с ограниченной кванторной глубиной”, *Докл. РАН*, **436**:1 (2011), 14–18.
- [15] М. Е. Жуковский, “Расширение k -закона нуля или единицы”, *Докл. РАН*, **454**:1 (2014), 23–26.
- [16] М. Е. Жуковский, “О наибольшей критической точке в k -заcone нуля или единицы”, *Матем. сб.*, **206**:4 (2015), 13–34.
- [17] J. H. Spencer, “Infinite spectra in the first order theory of graphs”, *Combinatorica*, **10**:1 (1990), 95–102.
- [18] A. Ruciński, A. Vince, “Balanced graphs and the problem of subgraphs of a random graph”, *Congr. Numer.*, **49** (1985), 181–190.
- [19] A. Ruciński, A. Vince, “Strongly balanced graphs and random graphs”, *J. Graph Theory*, **10**:2 (1986), 251–264.
- [20] М. Е. Жуковский, “О 4-заcone нуля или единицы для случайного графа Эрдеша–Реньи”, *Матем. заметки*, **97**:2 (2015), 203–216.
- [21] J. H. Spencer, “Counting extensions”, *J. Combin. Theory Ser. A*, **55**:2 (1990), 247–255.
- [22] J. H. Spencer, М. Е. Zhukovskii, “Spectra for random graphs of fixed quantifier depth”, *Discrete Math.*, 2015 (to appear).
- [23] A. Ehrenfeucht, “An application of games to the completeness problem for formalized theories”, *Fund. Math.*, **49** (1961), 129–141.

М. Е. Жуковский

Московский физико-технический институт
(государственный университет),
г. Долгопрудный Московской обл.
E-mail: zhukmax@gmail.com

Поступило

02.06.2015

А. Д. Матушкин

Московский физико-технический институт
(государственный университет),
г. Долгопрудный Московской обл.
E-mail: 1alexmatushkin1@gmail.com