Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Васильева, Энтропийные числа операторов вложения весовых пространств Соболева, *Матем. заметки*, 2015, том 98, выпуск 6, 937–940

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10806>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 10:01:13

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Энтропийные числа операторов вложения весовых пространств Соболева

А. А. Васильева

В работе получены порядковые оценки энтропийных чисел оператора вложения весовых пространств Соболева в весовое пространство Лебега. Предполагается, что область определения функций ограничена и удовлетворяет условию Джона, а веса являются функциями расстояния до некоторого h -множества, содержащегося в границе области (см. подробнее ниже).

Задача об оценках энтропийных чисел оператора вложения весового пространства Соболева на шаре с весом, имеющим особенность в точке, изучалась в работах Трибеля [1] и Мит [2].

Приведем необходимые определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть X, Y – нормированные пространства, $T: X \rightarrow Y$ – линейный непрерывный оператор, $k \in \mathbb{N}$. Энтропийные числа $e_k(T)$ определяются равенством

$$e_k(T) = \inf \left\{ \varepsilon > 0 \mid \exists y_1, \dots, y_{2^{k-1}} \in Y \quad T(B_X) \subset \bigcup_{i=1}^{2^{k-1}} (y_i + \varepsilon B_Y) \right\}.$$

Обозначим через $AC[t_0, t_1]$ пространство абсолютно непрерывных функций на интервале $[t_0, t_1]$, а через $B_a(x)$ – замкнутый евклидов шар в $\mathbb{R}^d$ радиуса a с центром в точке x .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ – ограниченная область, $a > 0$. Скажем, что $\Omega \in \mathbf{FC}(a)$, если найдется точка $x_* \in \Omega$ такая, что для любого $x \in \Omega$ существуют число $T(x) > 0$ и кривая $\gamma_x: [0, T(x)] \rightarrow \Omega$ со следующими свойствами:

- 1) $\gamma_x \in AC[0, T(x)]$, $|d\gamma_x(t)/dt| = 1$ п.в.;
- 2) $\gamma_x(0) = x$, $\gamma_x(T(x)) = x_*$;
- 3) для любого $t \in [0, T(x)]$ выполнено включение $B_{at}(\gamma_x(t)) \subset \Omega$.

Скажем, что Ω удовлетворяет *условию Джона*, если $\Omega \in \mathbf{FC}(a)$ для некоторого $a > 0$.

Введем понятие h -множества в соответствии с [3]. Обозначим через $\mathbb{H}$ множество неубывающих положительных функций, определенных на $(0, 1]$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$ – непустой компакт, $h \in \mathbb{H}$. Скажем, что Γ является h -множеством, если существуют $c_* \geq 1$ и конечная счетно-аддитивная мера μ на $\mathbb{R}^d$ такие, что $\text{supp } \mu = \Gamma$ и для любых $x \in \Gamma$, $t \in (0, 1]$ выполнено $c_*^{-1}h(t) \leq \mu(B_t(x)) \leq c_*h(t)$.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ – ограниченная область, $g, v: \Omega \rightarrow (0, \infty)$ – измеримые функции. Для каждой измеримой векторнозначной функции $\psi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^l$, $\psi = (\psi_k)_{1 \leq k \leq l}$, и для каждого $p \in [1, \infty]$ положим

$$\|\psi\|_{L_p(\Omega)} = \left\| \max_{1 \leq k \leq l} |\psi_k| \right\|_{L_p(\Omega)}.$$

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-50-00005).

DOI: 10.4213/mzm10806

Пусть $\bar{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_d) \in \mathbb{Z}_+^d := (\mathbb{N} \cup \{0\})^d$, $|\bar{\beta}| = \beta_1 + \dots + \beta_d$. Для каждой обобщенной функции f на Ω обозначим $\nabla^r f = (\partial^r f / \partial x^{\bar{\beta}})_{|\bar{\beta}|=r}$ (здесь частные производные берутся в обобщенном смысле), $l_{r,d}$ – число компонент обобщенной вектор-функции $\nabla^r f$. Положим

$$W_{p,g}^r(\Omega) = \{f: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid \exists \psi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{l_{r,d}} \quad \|\psi\|_{L_p(\Omega)} \leq 1, \nabla^r f = g \cdot \psi\}$$

(соответствующую функцию ψ будем обозначать $\nabla^r f/g$), $\|f\|_{L_{q,v}(\Omega)} = \|fv\|_{L_q(\Omega)}$, $L_{q,v}(\Omega) = \{f: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid \|f\|_{q,v} < \infty\}$. Множество $W_{p,g}^r(\Omega)$ будем называть *весовым классом Соболева*. Всюду мы будем использовать обозначение $\log_2 x$.

Пусть $|\cdot|$ – норма на $\mathbb{R}^d$, $E, E' \subset \mathbb{R}^d$, $x \in \mathbb{R}^d$. Положим

$$\text{diam}_{|\cdot|} E = \sup\{|y - z| : y, z \in E\}, \quad \text{dist}_{|\cdot|}(x, E) = \inf\{|x - y| : y \in E\}.$$

Пусть $\Omega \in \mathbf{FC}(a)$ – ограниченная область, $\Gamma \subset \partial\Omega$ – h -множество. Далее, мы считаем, что $h \in \mathbb{H}$ в окрестности нуля имеет вид

$$h(t) = t^\theta |\log t|^\gamma \tau(|\log t|), \quad 0 \leq \theta < d, \quad (1)$$

где $\tau: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ – абсолютно непрерывная функция такая, что $t\tau'(t)/\tau(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$.

Пусть $1 < p \leq \infty$, $1 \leq q < \infty$, $r \in \mathbb{N}$, $\delta := r + d/q - d/p > 0$, $\beta_g, \beta_v \in \mathbb{R}$, $g(x) = \varphi_g(\text{dist}_{|\cdot|}(x, \Gamma))$, $v(x) = \varphi_v(\text{dist}_{|\cdot|}(x, \Gamma))$,

$$\varphi_g(t) = t^{-\beta_g} |\log t|^{-\alpha_g} \rho_g(|\log t|), \quad \varphi_v(t) = t^{-\beta_v} |\log t|^{-\alpha_v} \rho_v(|\log t|), \quad (2)$$

где ρ_g и ρ_v – абсолютно непрерывные функции,

$$\frac{t\rho'_g(t)}{\rho_g(t)} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0, \quad \frac{t\rho'_v(t)}{\rho_v(t)} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0.$$

Кроме того, будем предполагать, что

$$\beta_v < \frac{d-\theta}{q} \quad \text{или} \quad \beta_v = \frac{d-\theta}{q}, \quad \alpha_v > \frac{1-\gamma}{q}. \quad (3)$$

Без ограничения общности можно считать, что $\bar{\Omega} \subset (-1/2, 1/2)^d$.

Обозначим $\beta = \beta_g + \beta_v$, $\alpha = \alpha_g + \alpha_v$, $\rho(y) = \rho_g(y)\rho_v(y)$, $\mathfrak{Z} = (r, d, p, q, g, v, h, a, c_*)$, $\mathfrak{Z}_* = (\mathfrak{Z}, R)$, где c_* – константа из определения 3 и $R = \text{diam } \Omega$.

Будем использовать следующие обозначения для порядковых равенств. Пусть X, Y – множества, $f_1, f_2: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}_+$. Мы пишем $f_1(x, y) \asymp_y f_2(x, y)$, если для любого $y \in Y$ существует $c(y) \geq 1$ такое, что

$$\frac{f_2(x, y)}{c(y)} \leq f_1(x, y) \leq c(y)f_2(x, y) \quad \text{для любого } x \in X.$$

Обозначим через $\mathcal{P}_{r-1}(\mathbb{R}^d)$ пространство полиномов на $\mathbb{R}^d$ степени не выше $r-1$. Для измеримого множества $E \subset \mathbb{R}^d$ положим $\mathcal{P}_{r-1}(E) = \{f|_E : f \in \mathcal{P}_{r-1}(\mathbb{R}^d)\}$. Отметим, что $W_{p,g}^r(\Omega) \supset \mathcal{P}_{r-1}(\Omega)$.

В теоремах 1, 2, 3 условия на веса таковы, что $W_{p,g}^r(\Omega) \subset L_{q,v}(\Omega)$ и существуют $M > 0$ и линейный непрерывный оператор $P: L_{q,v}(\Omega) \rightarrow \mathcal{P}_{r-1}(\Omega)$ такие, что для любой функции $f \in W_{p,g}^r(\Omega)$ выполнено

$$\|f - Pf\|_{L_{q,v}(\Omega)} \leq M \left\| \frac{\nabla^r f}{g} \right\|_{L_p(\Omega)}. \quad (4)$$

Обозначим

$$\widehat{W}_{p,g}^r(\Omega) = \{f - Pf : f \in \text{span } W_{p,g}^r(\Omega)\}.$$

Определим на $\widehat{W}_{p,g}^r(\Omega)$ норму $\|f\|_{\widehat{W}_{p,g}^r(\Omega)} := \|\nabla^r f/g\|_{L_p(\Omega)}$. Через $I: \widehat{W}_{p,g}^r(\Omega) \rightarrow L_{q,v}(\Omega)$ обозначим оператор вложения. Из (4) следует, что он непрерывен.

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполнены условия (1)–(3); при этом $0 < \theta < d$.

1. Предположим, что $\beta - \delta < -\theta(1/q - 1/p)_+$. Положим $\alpha_0 = \alpha$ в случае $\beta_v < (d - \theta)/q$ и $\alpha_0 = \alpha - 1/q$ в случае $\beta_v = (d - \theta)/q$. Также предположим, что $\delta/d \neq (\delta - \beta)/\theta$. Обозначим $\sigma_*(n) = 1$ в случае $\delta/d < (\delta - \beta)/\theta$ и

$$\sigma_*(n) = (\log n)^{-\alpha_0 + (\beta - \delta)\gamma/\theta} \rho(\log n) \tau^{(\beta - \delta)/\theta} (\log n)$$

в случае $\delta/d > (\delta - \beta)/\theta$. Тогда

$$e_n(I: \widehat{\mathcal{W}}_{p,g}^r(\Omega) \rightarrow L_{q,v}(\Omega)) \underset{\mathfrak{Z}_*}{\asymp} n^{-\min\{\delta/d, (\delta - \beta)/\theta\} + 1/q - 1/p} \sigma_*(n).$$

2. Предположим, что $\beta - \delta = -\theta(1/q - 1/p)_+$. Тогда выполнены следующие утверждения.

(а) Пусть $p \geq q$, $\alpha_0 := \alpha - (1 - \gamma)(1/q - 1/p) > 0$ в случае $\beta_v < (d - \theta)/q$ и $\alpha_0 := \alpha - 1 - (1 - \gamma)(1/q - 1/p) > 0$ в случае $\beta_v = (d - \theta)/q$. Тогда

$$e_n(I: \widehat{\mathcal{W}}_{p,g}^r(\Omega) \rightarrow L_{q,v}(\Omega)) \underset{\mathfrak{Z}_*}{\asymp} (\log n)^{-\alpha_0} \rho(\log n) \tau^{-1/q + 1/p} (\log n).$$

(б) Пусть $p < q$, $\alpha_0 := \alpha > 0$ в случае $\beta_v < (d - \theta)/q$ и $\alpha_0 := \alpha - 1/q > 0$ в случае $\beta_v = (d - \theta)/q$. Тогда при $\alpha_0 > 1/p - 1/q$ выполнено

$$e_n(I: \widehat{\mathcal{W}}_{p,g}^r(\Omega) \rightarrow L_{q,v}(\Omega)) \underset{\mathfrak{Z}_*}{\asymp} n^{1/q - 1/p} (\log n)^{-\alpha_0 - 1/q + 1/p} \rho(\log n),$$

а при $\alpha_0 < 1/p - 1/q$ выполнено

$$e_n(I: \widehat{\mathcal{W}}_{p,g}^r(\Omega) \rightarrow L_{q,v}(\Omega)) \underset{\mathfrak{Z}_*}{\asymp} n^{-\alpha_0} \rho(n).$$

Если $\alpha_0 = 1/p - 1/q$ и $\rho \equiv 1$, то

$$e_n(I: \widehat{\mathcal{W}}_{p,g}^r(\Omega) \rightarrow L_{q,v}(\Omega)) \underset{\mathfrak{Z}_*}{\asymp} n^{1/q - 1/p}.$$

Теперь рассмотрим случай $\theta = 0$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполнены условия (1), (2); при этом $\theta = 0$, $\beta - \delta < 0$, $\beta_v < d/q$. Тогда

$$e_n(I: \widehat{\mathcal{W}}_{p,g}^r(\Omega) \rightarrow L_{q,v}(\Omega)) \underset{\mathfrak{Z}_*}{\asymp} n^{-r/d}.$$

В случае $\theta = 0$, $\beta - \delta = 0$ для простоты изложения будем считать, что

$$\rho_g(t) = |\log t|^{-\lambda_g}, \quad \rho_v = |\log t|^{-\lambda_v}, \quad \tau(t) = |\log t|^\nu.$$

Обозначим $\lambda = \lambda_g + \lambda_v$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть выполнены условия (1), (2); при этом $\theta = 0$, $\beta - \delta = 0$, $\beta_v < d/q$.

1. Пусть $\alpha - (1 - \gamma)(1/q - 1/p)_+ > 0$. Предположим, что $\alpha/(1 - \gamma) \neq \delta/d$. Положим $\sigma_*(n) = 1$ в случае $\delta/d < \alpha/(1 - \gamma)$ и $\sigma_*(n) = (\log n)^{-\lambda - \alpha\nu/(1 - \gamma)}$ в случае $\delta/d > \alpha/(1 - \gamma)$. Тогда

$$e_n(I: \widehat{\mathcal{W}}_{p,g}^r(\Omega) \rightarrow L_{q,v}(\Omega)) \underset{\mathfrak{Z}_*}{\asymp} n^{-\min\{\delta/d, \alpha/(1 - \gamma)\} + 1/q - 1/p} \sigma_*(n).$$

2. Пусть $\alpha - (1 - \gamma)(1/q - 1/p)_+ = 0$, $\lambda > (1 - \nu)(1/q - 1/p)_+$. Тогда выполнены следующие утверждения.

(а) Пусть $p \geq q$. Тогда

$$e_n(I: \widehat{\mathcal{W}}_{p,g}^r(\Omega) \rightarrow L_{q,v}(\Omega)) \underset{\mathfrak{Z}_*}{\asymp} (\log n)^{-\lambda + (1 - \nu)(1/q - 1/p)}.$$

(b) Пусть $p < q$. Тогда в случае $\lambda > 1/p - 1/q$

$$e_n(I: \widehat{\mathcal{W}}_{p,g}^r(\Omega) \rightarrow L_{q,v}(\Omega)) \underset{\widetilde{3}_*}{\asymp} n^{1/q-1/p} (\log n)^{-\lambda+1/p-1/q},$$

а в случае $\lambda \leq 1/p - 1/q$ выполнено

$$e_n(I: \widehat{\mathcal{W}}_{p,g}^r(\Omega) \rightarrow L_{q,v}(\Omega)) \underset{\widetilde{3}_*}{\asymp} n^{-\lambda}.$$

Если множество Γ одноточечно, то оценки получаются с помощью формул из теоремы 3 с $\gamma = 0$, $\tau \equiv 1$. Доказательство в этом случае такое же, как у теоремы 3. Эти оценки являются усилением и обобщением результата Трибеля в [1], где рассматривался случай $p = q$.

В доказательстве теорем 1–3 используются оценки энтропийных чисел оператора вложения пространства ℓ_p^m в пространство ℓ_q^m [4], [5], оценки энтропийных чисел диагональных операторов [6], [7] и лемма 2.8 из работы [8] (см. также предложение 4.1 в [9]). При этом доказывается общий результат об оценках сверху энтропийных чисел операторов вложения функциональных пространств на множествах с древоподобной структурой.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Н. Triebel, *J. Approx. Theory*, **164**:1 (2012), 31–46. [2] T. Mieth, *J. Approx. Theory*, **192** (2015), 250–272. [3] M. Bricchi, *Georgian Math. J.*, **9**:1 (2002), 13–32. [4] C. Schütt, *J. Approx. Theory*, **40**:2 (1984), 121–128. [5] D. E. Edmunds, Н. Triebel, *Function Spaces, Entropy Numbers, Differential Operators*, Cambridge Tracts in Math., **120**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1996. [6] Th. Kühn, H.-G. Leopold, W. Sickel, L. Skrzypczak, *Math. Z.*, **255**:1 (2007), 1–15. [7] T. Kühn, *J. Approx. Theory*, **153**:1 (2008), 40–52. [8] M. A. Lifshits, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **364**:4 (2012), 1797–1813. [9] M. Lifshits, W. Linde, *Studia Math.*, **206**:1 (2011), 75–96.

А. А. Васильева

Математический институт им. В.А. Стеклова
Российской академии наук
E-mail: vasilyeva_nastya@inbox.ru

Поступило

02.06.2015