Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. А. Королёв, О горизонтальном распределении нулей функций $\operatorname{Re} \zeta(s)$ и $\operatorname{Im} \zeta(s)$, *Матем. заметки*, 2015, том 98, выпуск 6, 941–943

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10807>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 15:00:07

О горизонтальном распределении нулей функций $\operatorname{Re} \zeta(s)$ и $\operatorname{Im} \zeta(s)$

М. А. Королёв

Нули дзета-функции Римана $\zeta(s)$ являются точками пересечения кривых $\operatorname{Re} \zeta(s) = 0$ и $\operatorname{Im} \zeta(s) = 0$. По этой причине некоторый интерес в теории дзета-функции представляет изучение нулей функций $\operatorname{Re} \zeta(s)$ и $\operatorname{Im} \zeta(s)$, $s = \sigma + it$, при наличии некоторых ограничений на вещественные параметры σ и t . Задачи такого рода интересны еще и по той причине, что указанные функции не обладают некоторыми свойствами $\zeta(s)$ (наличие эйлерова произведения, функционального уравнения и т.д.), которые существенным образом используются для доказательства наиболее точных на сегодняшний день утверждений о нулях $\zeta(s)$.

В работе [1], где исследовалось “вертикальное” распределение нулей $\operatorname{Re} \zeta(s)$ и $\operatorname{Im} \zeta(s)$, для величин $N_A(T), N_B(T)$, выражающих, соответственно, число нулей функций $A(t) = \operatorname{Re} \zeta(\sigma + it)$, $B(t) = \operatorname{Im} \zeta(\sigma + it)$ на отрезке $0 \leq t \leq T$ при фиксированном σ были получены следующие соотношения:

$$N_{A,B}(T) = \frac{T}{\pi} \ln \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{\pi} + O(T^{1-c_1}), \quad c_1 = c_1(\sigma) > 0,$$

если $\sigma < 0.5$, и

$$T \ll N_{A,B}(T) \ll T \ln T,$$

если $0.5 < \sigma < 1$ (символ $N_{A,B}(T)$ обозначает любую из величин $N_A(T), N_B(T)$). Там же отмечено, что в случае функции $B(t)$ последний результат остается справедливым и при $\sigma > 1$ (см. также [2]).

В настоящей заметке приводится ряд утверждений о “горизонтальном” распределении нулей $\operatorname{Re} \zeta(s)$ и $\operatorname{Im} \zeta(s)$, т.е. о числе $N_a(t), N_b(t)$ нулей функций $a(\sigma) = \operatorname{Re} \zeta(\sigma + it)$ и $b(\sigma) = \operatorname{Im} \zeta(\sigma + it)$ на отрезке $0.5 \leq \sigma \leq 2$ при фиксированном t .

ЗАМЕЧАНИЕ. Известно (см. [3]), что вещественная часть $\zeta(s)$ не обращается в нуль при $\operatorname{Re} s \geq \alpha$, где $\alpha = 1.192347337\dots$ – корень уравнения

$$\sum_p \arcsin \frac{1}{p^\alpha} = \frac{\pi}{2}.$$

Поэтому $N_a(t)$ совпадает при любом t с числом нулей $a(\sigma)$ на отрезке $0.5 \leq \sigma \leq \alpha$.

Пусть $S(t) = \pi^{-1} \arg \zeta(0.5 + it)$ – аргумент дзета-функции Римана на критической прямой (см., например, [4]). Имеет место

ЛЕММА. При любом $t > 0$, отличном от ординаты нуля $\zeta(s)$, справедливы неравенства

$$N_a(t) > |S(t)| - 0.5, \quad N_b(t) > |S(t)| - 1.5.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство первого неравенства практически дословно повторяет рассуждения из [5]. Величина $\pi S(t)$ равна приращению произвольной фиксированной непрерывной ветви $f(s)$ функции $\arg \zeta(s)$ вдоль ломаной L , соединяющей точки $2, 2 + it$ и $0.5 + it$. Пусть, далее,

$$0.5 \leq \alpha_n < \alpha_{n-1} < \dots < \alpha_1 < 2$$

– все нули $a(\sigma)$ на отрезке $L_1 = [0.5 + it, 2 + it]$, и пусть $s_j = \alpha_j + it$, $j = 1, \dots, n$. Так как $\operatorname{Re} \zeta(s) \neq 0$ на фрагменте ломаной L , заключенном между точками 2 и s_1 , то приращение $f(s)$ вдоль него не превосходит по модулю $\pi/2$. Далее, приращение $f(s)$ при изменении

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант № 14-11-00433).

DOI: 10.4213/mzm10807

s на каждом из отрезков $[s_{j+1}, s_j]$, $j = 1, \dots, n-1$, а также на отрезке $[0.5 + it, s_n]$, не превосходит π по абсолютной величине. Следовательно, суммарное приращение $\arg \zeta(s)$ вдоль L не превосходит по модулю $\pi n + \pi/2$, так что

$$\pi|S(t)| \leq \pi n + \frac{\pi}{2}, \quad N_a(t) = n \geq |S(t)| - 0.5.$$

Пусть, далее,

$$0.5 \leq \beta_m < \beta_{m-1} < \dots < \beta_1 \leq 2$$

– все нули $b(\sigma)$ на отрезке L_1 . С помощью вышеприведенных рассуждений заключаем, что приращение $f(s)$ на L_1 не превосходит $\pi(m+1)$. В то же время это приращение является разностью величин $\pi S(t)$ и приращения $f(s)$ вдоль вертикального отрезка $[2, 2 + it]$. Так как последнее не превышает по модулю $\pi/2$, то

$$\pi(m+1) \geq \pi|S(t)| - \frac{\pi}{2}, \quad N_b(t) = m \geq |S(t)| - 1.5.$$

Лемма доказана.

Применение леммы наряду с имеющимися утверждениями о распределении значений функции $S(t)$ приводит к следующим теоремам о нулях $a(\sigma)$, $b(\sigma)$ (всюду далее ε – сколь угодно малое фиксированное число, $0 < \varepsilon < 10^{-7}$, $T \geq T_0(\varepsilon) > 0$, а символ $N_{a,b}(t)$ обозначает любую из величин $N_a(t), N_b(t)$).

ТЕОРЕМА 1. Пусть $H = T^{27/82+\varepsilon}$. Тогда

$$\max_{|t-T| \leq H} N_{a,b}(t) \geq \frac{\varepsilon^{5/4}}{2000} \left(\frac{\ln T}{\ln \ln T} \right)^{1/3}.$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть $H = T^{27/82+\varepsilon}$, $\Phi(T) > 1$ – произвольная неограниченно возрастающая при $T \rightarrow +\infty$ функция. Тогда для всех t , $|t - T| \leq H$, за исключением значений, образующих множество с мерой $\ll H/\Phi(T) = o(H)$, справедливы неравенства

$$N_{a,b}(t) \geq \frac{\sqrt{\ln \ln t}}{\Phi(t)}.$$

Использование гипотезы Римана позволяет существенно сократить длину H исследуемого промежутка. Далее во всех утверждениях слова “если верна гипотеза Римана” опускаются.

ТЕОРЕМА 3. При любом H , $(\ln T)(\ln \ln T)^{-3/2} < H \leq T$, справедливы неравенства

$$\max_{|t-T| \leq H} N_{a,b}(t) \geq \frac{1}{100\pi} \sqrt{\frac{\ln H}{\ln \ln H}}.$$

ТЕОРЕМА 4. При любом H , $\sqrt{\ln \ln T} \leq H \leq (\ln T)(\ln \ln T)^{-3/2}$, справедливы неравенства

$$\max_{|t-T| \leq H} N_{a,b}(t) \geq \frac{1}{1000} \frac{\sqrt{\ln H}}{\ln \ln H}.$$

ТЕОРЕМА 5. Пусть $m \geq 2$ – фиксированное целое число. Тогда при любом H , где $(\ln \ln T)^{1/(2m)} \leq H \leq \sqrt{\ln \ln T}$, справедливы неравенства

$$\max_{|t-T| \leq H} N_{a,b}(t) \geq \frac{0.04\sqrt{\ln H}}{(2m \ln \ln H)^m}.$$

ТЕОРЕМА 6. Пусть $H \geq (\ln \ln \ln T)^{2+\varepsilon}$. Тогда

$$\max_{|t-T| \leq H} N_{a,b}(t) \geq \sqrt{\ln H} e^{-c_1 (\ln \ln H)^{1-0.5\varepsilon}},$$

где $c_1 = c_1(\varepsilon) > 0$ – некоторая постоянная.

ТЕОРЕМА 7. Пусть $H \geq (\ln \ln \ln T)^2$. Тогда

$$\max_{|t-T| \leq H} N_{a,b}(t) \geq (\ln H)^{\gamma-\varepsilon}, \quad \gamma = \frac{1}{2 + (\pi \varrho)^{-1}} = 0.46862145 \dots,$$

где $\varrho = 2.37689234 \dots$ – наименьший положительный корень функции

$$h(\lambda) = \int_0^{+\infty} e^{-(\operatorname{ch} \sqrt{u} + \cos \sqrt{u})} \cos(\lambda u) du.$$

ТЕОРЕМА 8. Пусть $H \geq (\ln \ln \ln T)^{1+\varepsilon}$. Тогда

$$\max_{|t-T| \leq H} N_{a,b}(t) \geq e^{(\ln \ln H)^{0.5\varepsilon}}.$$

ТЕОРЕМА 9. Существуют (неэффективные) постоянные c_0 и T_0 такие, что при любых $T > T_0$ и $H \geq 0.4 \ln \ln \ln T + c_0$ выполняются неравенства

$$\max_{|t-T| \leq H} N_a(t) \geq 3, \quad \max_{|t-T| \leq H} N_b(t) \geq 2.$$

Эти утверждения немедленно следуют из соответствующих омега-теорем для функции $S(t)$: теоремы 1, 2 – из теорем III.5 и II.6 обзорных работ [4], [6], теоремы 3, 4 – из результатов работ [7], [8], теорема 5 – из теоремы работы [9]. Доказательства нижних оценок величин $|S(t)|$, необходимых для вывода теорем 6–8, практически дословно повторяют доказательства теорем 2–4 работы [10]. Наконец, неравенства теоремы 9 легко получаются из оценки

$$\max_{|t-T| \leq H} S(t) > 3,$$

следующей из теоремы 3 статьи [11], и того факта, что обе величины $N_a(t)$, $N_b(t)$ являются целочисленными.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] M. Z. Garaev, *Acta Arith.*, **108**:3 (2003), 245–251. [2] Я. Мозер, *Acta Arith.*, **34**:1 (1977), 25–35. [3] J. van de Lune, *Some Observations Concerning the Zero-Curves of the Real and Imaginary Part of Riemann's Zeta Function*, Afd. Zuiv. Wisk. ZW 201/83, Mathematical centrum, Amsterdam, 1983. [4] А. А. Карацуба, М. А. Королёв, *УМН*, **60**:3 (2005), 41–96. [5] R. J. Backlund, *Acta Math.*, **41**:1 (1916), 345–375. [6] А. А. Карацуба, М. А. Королёв, *УМН*, **61**:3 (2006), 3–92. [7] М. А. Королёв, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **69**:1 (2005), 115–124. [8] Р. Н. Бояринов, *Матем. заметки*, **89**:4 (2011), 495–502. [9] М. А. Korolev, *Upper and Lower Bounds for the Function $S(t)$ on the Short Intervals*, 2013, [arXiv:1302.0352](https://arxiv.org/abs/1302.0352). [10] М. А. Korolev, *On the Large Values of the Riemann Zeta-Function on the Critical Line – II*, 2014, [arXiv:1412.6340](https://arxiv.org/abs/1412.6340). [11] М. А. Korolev, *Acta Arith.*, **166**:4 (2014), 349–390.

М. А. Королёв

Математический институт им. В. А. Стеклова

Российской академии наук

E-mail: korolevma@mi.ras.ru

Поступило

02.06.2015