Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Курта, К вопросу об отсутствии положительных решений у эллиптических уравнений, *Матем. заметки*, 1999, том 65, выпуск 4, 552–561

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1081>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 17:56:28

УДК 517.9

К ВОПРОСУ ОБ ОТСУТСТВИИ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ У ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

В. В. Курта

Основным результатом работы являются утверждения об отсутствии целых положительных решений в широких классах квазилинейных эллиптических уравнений, модельными примерами которых являются уравнения вида

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (|\nabla u|^{\alpha-2} u_{x_i}) = -|u|^{q-1} u,$$

где $\alpha > 1$ и q – некоторые фиксированные действительные числа.

Библиография: 13 названий.

Основным результатом работы являются утверждения об отсутствии целых положительных решений в широких классах квазилинейных эллиптических уравнений, модельными примерами которых являются уравнения вида

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (|\nabla u|^{\alpha-2} u_{x_i}) = -|u|^{q-1} u, \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (|u_{x_i}|^{\alpha-2} u_{x_i}) = -|u|^{q-1} u, \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{|\nabla u|^{\alpha-2} u_{x_i}}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right) = -|u|^{q-1} u, \quad (3)$$

где $\alpha > 1$ и q – некоторые фиксированные действительные числа.

Заметим, что уравнение вида

$$\Delta u = -|u|^{q-1} u \quad (4)$$

является частным случаем уравнений вида (1), (2) при $\alpha = 2$.

Утверждения об отсутствии тех или иных решений у уравнений вида (1)–(4) играют важную роль в теории и приложениях. Однако, многочисленные результаты об отсутствии целых решений в рассматриваемых классах уравнений (см., например, [1]–[6] и цитируемую там литературу), как правило, установлены только для гладких решений, зачастую обремененных еще и свойством радиальной симметрии.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-01-00097, и фонда INTAS, грант № 96-1060.

Целью данной статьи является изложение результатов, полученных автором в [7], [8] и частично анонсированных в [9], об отсутствии целых положительных локально ограниченных решений в широких классах квазилинейных эллиптических уравнений, принадлежащих лишь локально соответствующим пространствам Соболева без предположения какой-либо симметрии.

Обозначим через L дифференциальный оператор, формально определяемый равенством

$$Lu = \sum_{i=1}^n \frac{d}{dx_i} A_i(x, u, \nabla u), \quad (5)$$

где $A_i(x, \eta, \xi)$, $i = 1, \dots, n$, $n \geq 2$, – каратеодориевы на множестве $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n$ функции.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $\alpha \geq 1$ – произвольное фиксированное число. Будем говорить, что оператор L , определенный соотношением (5), *принадлежит классу $A(\alpha)$* , если существует положительная постоянная $\mathcal{K}$ такая, что для почти всех $x \in \mathbb{R}^n$, всех $\eta \in \mathbb{R}^1$ и всех $\xi, \psi \in \mathbb{R}^n$ выполнены неравенства

$$0 \leq \sum_{i=1}^n \xi_i A_i(x, \eta, \xi), \quad (6)$$

$$\left| \sum_{i=1}^n \psi_i A_i(x, \eta, \xi) \right|^\alpha \leq \mathcal{K} |\psi|^\alpha \left(\sum_{i=1}^n \xi_i A_i(x, \eta, \xi) \right)^{\alpha-1}. \quad (7)$$

Очевидно, что одним из достаточных условий выполнимости (7) является выполнимость неравенства

$$\left(\sum_{i=1}^n A_i^2(x, \eta, \xi) \right)^{\alpha/2} \leq \mathcal{K} \left(\sum_{i=1}^n \xi_i A_i(x, \eta, \xi) \right)^{\alpha-1}. \quad (8)$$

Легко проверяется, что дифференциальные операторы, стоящие слева в уравнениях (1)–(3), принадлежат классу $A(\alpha)$ при соответствующем фиксированном $\alpha > 1$.

Ограничения на рост дифференциальных операторов L в виде неравенств (6)–(8), введенные В. М. Миклюковым [10], [11], обладают рядом преимуществ по сравнению с традиционными

$$|A(x, \eta, \xi)| \leq \nu_1 |\xi|^{\alpha-1} \quad \text{и} \quad |(\xi \times A(x, \eta, \xi))| \geq \nu_2 |\xi|^\alpha, \quad (9)$$

где ν_1, ν_2 – произвольные положительные фиксированные постоянные. Основное из них – условия (6)–(8) менее ограничительны. Приведем соответствующие примеры.

Пусть $a(x, \eta, \xi)$ – произвольная достаточно гладкая, неотрицательная, равномерно ограниченная функция, определенная на множестве $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n$. Нетрудно проверить, что дифференциальный оператор, формально определяемый равенством

$$Nu = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (a(x, u, \nabla u) |\nabla u|^{\alpha-2} u_{x_i}),$$

принадлежит классу $A(\alpha)$ при соответствующем параметре α и не удовлетворяет, вообще говоря, условиям (9) ни при каком фиксированном $\alpha > 1$.

Может оказаться, что оператор L , определяемый соотношением (5), принадлежит нескольким классам $A(\alpha)$. Например, дифференциальный оператор L из уравнения (3) принадлежит классам $A(\alpha - 1)$ и $A(\alpha)$ при любом фиксированном $\alpha \geq 2$.

То же относится к хорошо известному оператору средней кривизны

$$Lu = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{u x_i}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right),$$

который, например, принадлежит классам $A(1)$ и $A(2)$. Заметим, кстати, что коэффициенты этого оператора не удовлетворяют соотношениям (9) при $\alpha = 1$ и $\alpha = 2$.

Остановимся более подробно на классе $A(2)$. Пусть L – оператор, формально определяемый соотношением вида

$$Lu = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x, u, \nabla u) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right), \quad (10)$$

где $a_{ij}(x, \eta, \xi)$ – равномерно ограниченные и каратеодориевы на множестве $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n$ функции такие, что $a_{ij}(x, \eta, \xi) = a_{ji}(x, \eta, \xi)$ и

$$0 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, \eta, \xi) \psi_i \psi_j$$

для почти всех $x \in \mathbb{R}^n$, всех $\eta \in \mathbb{R}^1$ и всех $\xi, \psi \in \mathbb{R}^n$.

Заметим, что частным случаем оператора L является линейный дивергентный, вообще говоря, вырождающийся эллиптический оператор второго порядка.

Покажем, что оператор L принадлежит классу $A(2)$. Для этого положим

$$A_i(x, \eta, \xi) = \sum_{j=1}^n a_{ij}(x, \eta, \xi) \xi_j, \quad i = 1, \dots, n, \quad (11)$$

и проверим, что дифференциальный оператор L , формально определяемый соотношением (5) с коэффициентами из (11), удовлетворяет условиям (6), (7) при $\alpha = 2$.

Условие (6) проверяется тривиально, поскольку в этом случае оно имеет простой вид:

$$\sum_{i=1}^n \xi_i A_i(x, \eta, \xi) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, \eta, \xi) \xi_i \xi_j.$$

Проверим выполнимость условия (7) при $\alpha = 2$. Поскольку

$$\sum_{i=1}^n \psi_i A_i(x, \eta, \xi) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, \eta, \xi) \psi_i \xi_j,$$

то, оценивая правую часть этого тождества по неравенству Коши, имеем

$$\left(\sum_{i=1}^n \psi_i A_i(x, \eta, \xi) \right)^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, \eta, \xi) \xi_i \xi_j \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, \eta, \xi) \psi_i \psi_j.$$

Используя условие ограниченности коэффициентов матрицы $\{a_{ij}(x, \eta, \xi)\}$, получаем, что

$$\left(\sum_{i=1}^n \psi_i A_i(x, \eta, \xi) \right)^2 \leq \mathcal{K} |\psi|^2 \sum_{i=1}^n \xi_i A_i(x, \eta, \xi)$$

для почти всех $x \in \mathbb{R}^n$, всех $\eta \in \mathbb{R}^1$, всех $\xi, \psi \in \mathbb{R}^n$ и некоторого неотрицательного $\mathcal{K}$.

Следовательно, дифференциальный оператор L , определенный соотношением вида (10), является элементом класса $A(2)$ и не удовлетворяет, вообще говоря, условиям (9). Аналогично обстоит дело с линейным дивергентным эллиптическим оператором, не удовлетворяющим условию равномерной эллиптичности, а именно: он является элементом класса $A(2)$ и не удовлетворяет условиям (9).

В работе изучаются уравнения вида

$$Lu = -f(u), \quad (12)$$

где оператор L принадлежит классу $A(\alpha)$ при некотором фиксированном $\alpha \geq 1$, а функция $f(u) = a|u|^{q-1}u$ при некоторых действительных $a > 0$ и q .

Определим обобщенное целое положительное (неотрицательное) суперрешение уравнения вида (12).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функцию $u(x)$ из пространства $L_{\infty, \text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ будем называть *положительной (неотрицательной)* в $\mathbb{R}^n$, если $\text{ess inf } u(x)$, взятый по любому шару в $\mathbb{R}^n$, положителен (неотрицателен).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $\alpha \geq 1$ и q – произвольные фиксированные действительные числа, оператор L принадлежит классу $A(\alpha)$. Функцию $u(x)$ будем называть *обобщенным целым положительным суперрешением* уравнения вида (12), если она принадлежит пространству $W_{\alpha, \text{loc}}^1(\mathbb{R}^n) \cap L_{\infty, \text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, положительна и для произвольной неотрицательной функции φ из пространства $\dot{W}_{\alpha}^1(\mathbb{R}^n)$ выполняется интегральное неравенство

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{i=1}^n \varphi_{x_i} A_i(x, u, \nabla u) - f(x) \varphi(x) \right) dx \geq 0. \quad (13)$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть $n > \alpha > 1$, $\alpha - 1 > q$ и оператор L принадлежит классу $A(\alpha)$. Тогда уравнение вида (12) не имеет обобщенных целых положительных суперрешений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функцию $u(x)$ из пространства $L_{\infty, \text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ будем называть *ограниченной снизу некоторой положительной константой* в $\mathbb{R}^n$, если $\text{ess inf } u(x)$, взятый по любому шару в $\mathbb{R}^n$, не меньше этой константы.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $n > \alpha > 1$, $q > \alpha - 1$ и оператор L принадлежит классу $A(\alpha)$. Тогда уравнение вида (12) не имеет ограниченных снизу положительной константой обобщенных целых суперрешений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $\alpha \geq 1$ и $q > 0$ – произвольные фиксированные действительные числа, оператор L принадлежит классу $A(\alpha)$. Функцию $u(x)$ будем называть *обобщенным целым неотрицательным суперрешением* уравнения вида (12), если она принадлежит пространству $W_{\alpha, \text{loc}}^1(\mathbb{R}^n) \cap L_{\infty, \text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, неотрицательна и для произвольной неотрицательной функции φ из пространства $\dot{W}_{\alpha}^1(\mathbb{R}^n)$ выполняется интегральное неравенство (13).

ТЕОРЕМА 3. Пусть $n > \alpha > 1$, $n(\alpha - 1)/(n - \alpha) > q > \alpha - 1$, оператор L принадлежит классу $A(\alpha)$ и $u(x)$ – обобщенное целое неотрицательное суперрешение уравнения вида (12). Тогда $u(x) = 0$ почти всюду в $\mathbb{R}^n$.

Важно отметить, что при $n > \alpha > 1$, $q > n(\alpha - 1)/(n - \alpha)$ и надлежащем с радиально-симметричная функция вида

$$u(x) = c(1 + |x|^{\alpha/(\alpha-1)})^{(1-\alpha)/(q-\alpha+1)},$$

рассмотренная при изучении аналогичных проблем Е. Митидиери и С. И. Похожаевым, является неотрицательным целым суперрешением уравнений вида (1), (3).

Заметим также, что теорема 2 является простым следствием следующего утверждения.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $n > \alpha > 1$, $q > \alpha - 1$, оператор L принадлежит классу $A(\alpha)$ и $u(x)$ – обобщенное целое положительное суперрешение уравнения вида (12). Тогда для произвольного фиксированного t из интервала $(0, \alpha - 1)$ и $\gamma = \alpha(q - t)/(q - \alpha + 1)$ величина

$$\int_{B(r)} u^{q-t} dx$$

есть $O(r^{n-\gamma})$ при $r \rightarrow \infty$.

Здесь и далее, $B(r)$ – шар радиуса r с центром в начале координат.

Утверждения, аналогичные теоремам 1–3, справедливы и при $\alpha \geq n$ и являются простым следствием того, что в этом случае неотрицательные решения неравенства вида $Lu \leq 0$ с оператором L из класса $A(\alpha)$ суть тождественные постоянные. Для полноты изложения приведем эти утверждения, которые непосредственно следуют из [10], [11].

ТЕОРЕМА 5. Пусть $\alpha \geq n$ и q – произвольные действительные числа, а оператор L принадлежит классу $A(\alpha)$. Тогда уравнение вида (12) не имеет обобщенных целых положительных суперрешений.

ТЕОРЕМА 6. Пусть $\alpha \geq n$, $q > 0$, оператор L принадлежит классу $A(\alpha)$ и $u(x)$ – обобщенное целое неотрицательное суперрешение уравнения вида (12). Тогда $u(x) = 0$ почти всюду в $\mathbb{R}^n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Пусть $n > \alpha > 1$, $\alpha - 1 > q$ и оператор L принадлежит классу $A(\alpha)$. Предположим, что существует целое положительное суперрешение $u(x)$ уравнения вида (12), и получим противоречие этому предположению. Итак, пусть $u(x)$ – целое положительное суперрешение уравнения вида (12), R и r – произвольные положительные числа, $\zeta(x)$ – произвольная фиксированная функция из пространства $\dot{C}^1(B(R))$, равная 1 на $B(r)$ и такая, что $0 \leq \zeta(x) \leq 1$. Подставим в интегральное неравенство (13) в качестве пробной функции $\varphi(x) = (u(x))^{-t} \zeta^s(x)$, где положительные числа $s \geq \alpha$ и $t > \alpha - 1$ будут выбраны ниже. В результате интегрирования по частям получим

$$\begin{aligned} & -t \int_{B(R)} \sum_{i=1}^n u_{x_i} A_i(x, u, \nabla u) u^{-t-1} \zeta^s dx + s \int_{B(R)} \sum_{i=1}^n \zeta_{x_i} A_i(x, u, \nabla u) u^{-t} \zeta^{s-1} dx \\ & \equiv I_1 + I_2 \geq a \int_{B(R)} u^{q-t} \zeta^s dx. \end{aligned} \quad (14)$$

Оценим интеграл I_2 через I_1 , заметив предварительно, что первое слагаемое слева в формуле (14) неположительно. Исходя из условия (7) на коэффициенты оператора L , легко получаем неравенство

$$\begin{aligned} |I_2| &= \left| s \int_{B(R)} \sum_{i=1}^n \zeta_{x_i} A_i(x, u, \nabla u) u^{-t} \zeta^{s-1} dx \right| \\ &\leq \int_{B(R)} s \mathcal{K}^{1/\alpha} \left(\sum_{i=1}^n u_{x_i} A_i(x, u, \nabla u) \right)^{(\alpha-1)/\alpha} |\nabla \zeta| u^{-t} \zeta^{s-1} dx. \end{aligned} \quad (15)$$

Оценивая далее подынтегральное выражение в правой части соотношения (15) по неравенству Юнга

$$AB \leq \rho A^{\alpha/(\alpha-1)} + \rho^{1-\alpha} B^{\alpha} \quad (16)$$

с $\rho = t/2$,

$$\begin{aligned} A &= u^{(1+t)(1-\alpha)/\alpha} \zeta^{s(\alpha-1)/\alpha} \left(\sum_{i=1}^n u_{x_i} A_i(x, u, \nabla u) \right)^{(\alpha-1)/\alpha}, \\ B &= s \mathcal{K}^{1/\alpha} |\nabla \zeta| u^{(\alpha-1-t)/\alpha} \zeta^{s/\alpha-1}, \end{aligned}$$

получим соотношение

$$\begin{aligned} |I_2| &\leq \frac{t}{2} \int_{B(R)} \sum_{i=1}^n u_{x_i} A_i(x, u, \nabla u) u^{-t-1} \zeta^s dx \\ &\quad + \mathcal{K} s^{\alpha} \left(\frac{t}{2} \right)^{1-\alpha} \int_{B(R)} |\nabla \zeta|^{\alpha} u^{-t+\alpha-1} \zeta^{s-\alpha} dx. \end{aligned} \quad (17)$$

Из соотношений (14), (15), (17) следует неравенство

$$\mathcal{K} s^{\alpha} \left(\frac{t}{2} \right)^{1-\alpha} \int_{B(R)} |\nabla \zeta|^{\alpha} u^{-t+\alpha-1} \zeta^{s-\alpha} dx \geq a \int_{B(R)} u^{q-t} \zeta^s dx. \quad (18)$$

Положим в формуле (18) $s = \alpha(t-q)/(\alpha-1-q)$ так, чтобы $(s-\alpha)(t-q)/(t-\alpha+1) = s$, и оценим его левую часть по неравенству Гёльдера с показателями $(t-q)/(t-\alpha+1)$ и $(t-q)/(\alpha-1-q)$. В результате имеет место соотношение

$$\begin{aligned} &\mathcal{K} s^{\alpha} \left(\frac{t}{2} \right)^{1-\alpha} \left(\int_{B(R)} |\nabla \zeta|^{\alpha(t-q)/(\alpha-1-q)} dx \right)^{(\alpha-1-q)/(t-q)} \\ &\quad \times \left(\int_{B(R)} u^{q-t} \zeta^s dx \right)^{(t-\alpha+1)/(t-q)} \geq a \int_{B(R)} u^{q-t} \zeta^s dx. \end{aligned} \quad (19)$$

Выберем теперь в (19) параметр t из интервала $(\alpha-1, \infty)$ равным t^* так, чтобы $\gamma = \alpha(t^*-q)/(\alpha-1-q) > n$. Минимизируя левую часть в неравенстве (19) по всем допустимым функциям $\zeta(x)$ указанного вида, получим

$$\text{cap}_{\gamma}(B(r), \mathbb{R}^n \setminus B(R); \mathbb{R}^n) \left(\mathcal{K} s^{\alpha} \left(\frac{t^*}{2} \right)^{1-\alpha} \right)^{\gamma/\alpha} \geq a \int_{B(r)} u^{q-t^*} dx, \quad (20)$$

где $\text{cap}_\gamma(B(r), \mathbb{R}^n \setminus B(R); \mathbb{R}^n)$ – γ -емкость конденсатора $(B(r), \mathbb{R}^n \setminus B(R); \mathbb{R}^n)$. Из элементарных свойств вариационной емкости известно (см., например, [12, с. 177]), что γ -емкость конденсатора $(B(r), \mathbb{R}^n \setminus B(R); \mathbb{R}^n)$ есть $O(R^{n-\gamma})$ при $\gamma \neq n$, $R = 2r$ и $R \rightarrow \infty$. Значит, из соотношения (20) с учетом выбора γ и t^* получаем, что

$$\int_{\mathbb{R}^n} u^{q-t^*} dx = 0,$$

чего быть не может. Полученное противоречие является логическим следствием нашего предположения о существовании обобщенных целых положительных суперрешений уравнения (12).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Пусть $n > \alpha > 1$, $q > \alpha - 1$, оператор L принадлежит классу $A(\alpha)$ и $u(x)$ – обобщенное целое положительное суперрешение уравнения вида (12), R и r – произвольные положительные числа, $\zeta(x)$ – произвольная фиксированная функция из пространства $\dot{C}^1(B(R))$, равная 1 на $B(r)$ и такая, что $0 \leq \zeta(x) \leq 1$. Подставим в интегральное неравенство (13) в качестве пробной функции $\varphi(x) = u^{-t}(x)\zeta^s(x)$, а положительные числа $s \geq \alpha$ и $\alpha - 1 > t > 0$ будут выбраны ниже. В результате интегрирования по частям получим неравенство

$$\begin{aligned} -t \int_{B(R)} \sum_{i=1}^n u_{x_i} A_i(x, u, \nabla u) u^{-t-1} \zeta^s dx \\ + s \int_{B(R)} \sum_{i=1}^n \zeta_{x_i} A_i(x, u, \nabla u) u^{-t} \zeta^{s-1} dx \equiv I_1 + I_2 \geq a \int_{B(R)} u^{q-t} \zeta^s dx. \end{aligned} \quad (21)$$

Оценивая модуль интеграла I_2 так же, как и в доказательстве теоремы 1, получим

$$\begin{aligned} |I_2| \leq \frac{t}{2} \int_{B(R)} \sum_{i=1}^n u_{x_i} A_i(x, u, \nabla u) u^{-t-1} \zeta^s dx \\ + \mathcal{K} s^\alpha \left(\frac{t}{2}\right)^{1-\alpha} \int_{B(R)} |\nabla \zeta|^\alpha u^{-t+\alpha-1} \zeta^{s-\alpha} dx. \end{aligned} \quad (22)$$

Из соотношений (21), (22) следует, что

$$\mathcal{K} s^\alpha \left(\frac{t}{2}\right)^{1-\alpha} \int_{B(R)} |\nabla \zeta|^\alpha u^{-t+\alpha-1} \zeta^{s-\alpha} dx \geq a \int_{B(R)} u^{q-t} \zeta^s dx. \quad (23)$$

Положим в формуле (23) $s = \alpha(q-t)/(q-\alpha+1)$ так, чтобы $(s-\alpha)(q-t)/(\alpha-1-t) = s$, и оценим его левую часть по неравенству Гёльдера с показателями $(q-t)/(\alpha-1-t)$ и $(q-t)/(q-\alpha+1)$. В результате имеет место соотношение

$$\begin{aligned} \mathcal{K} s^\alpha \left(\frac{t}{2}\right)^{1-\alpha} \left(\int_{B(R)} |\nabla \zeta|^{\alpha(q-t)/(q-\alpha+1)} \right)^{(q-\alpha+1)/(q-t)} \\ \times \left(\int_{B(R)} u^{q-t} \zeta^s dx \right)^{(\alpha-1-t)/(q-t)} \geq a \int_{B(R)} u^{q-t} \zeta^s dx. \end{aligned} \quad (24)$$

Выберем теперь в (24) параметр t равным произвольному фиксированному t^* из интервала $(0, \alpha - 1)$ и положим $\gamma = \alpha(q - t^*)/(q - \alpha + 1)$. Минимизируя левую часть в неравенстве (24) по всем допустимым функциям $\zeta(x)$ указанного вида, получим

$$\text{cap}_\gamma(B(r), \mathbb{R}^n \setminus B(R); \mathbb{R}^n) \left(\mathcal{K} s^\alpha \left(\frac{t^*}{2} \right)^{1-\alpha} \right)^{\gamma/\alpha} \geq a \int_{B(r)} u^{q-t^*} dx. \quad (25)$$

Как отмечалось выше, γ -емкость конденсатора $(B(r), \mathbb{R}^n \setminus B(R); \mathbb{R}^n)$ есть $O(R^{n-\gamma})$ при $\gamma \neq n$, $R = 2r$ и $R \rightarrow \infty$. Следовательно, соотношение (25) влечет утверждение теоремы 4.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Пусть $n > \alpha > 1$, $n(\alpha - 1)/(n - \alpha) > q > \alpha - 1$, оператор L принадлежит классу $A(\alpha)$ и $u(x)$ – обобщенное целое неотрицательное суперрешение уравнения вида (12). Пусть R, r и ε – произвольные положительные числа, $\zeta(x)$ – произвольная фиксированная функция из пространства $\dot{C}^1(B(R))$, равная 1 на $B(r)$ и такая, что $0 \leq \zeta(x) \leq 1$. Подставим в интегральное неравенство (13) в качестве пробной функции $\varphi(x) = (u(x) + \varepsilon)^{-t} \zeta^s(x)$, а положительные числа $s \geq \alpha$ и $\alpha - 1 > t > 0$ будут выбраны ниже. В результате интегрирования по частям получим неравенство

$$\begin{aligned} & -t \int_{B(R)} \sum_{i=1}^n u_{x_i} A_i(x, u, \nabla u) (u + \varepsilon)^{-t-1} \zeta^s dx \\ & + s \int_{B(R)} \sum_{i=1}^n \zeta_{x_i} A_i(x, u, \nabla u) (u + \varepsilon)^{-t} \zeta^{s-1} dx \\ & \equiv I_1 + I_2 \geq a \int_{B(R)} u^q (u + \varepsilon)^{-t} \zeta^s dx. \end{aligned} \quad (26)$$

Как и ранее, займемся оценкой интеграла I_2 , заметив, что первое слагаемое слева в формуле (26) неположительно. В силу условия (7) на коэффициенты оператора L справедливо неравенство

$$\begin{aligned} |I_2| &= \left| s \int_{B(R)} \sum_{i=1}^n \zeta_{x_i} A_i(x, u, \nabla u) (u + \varepsilon)^{-t} \zeta^{s-1} dx \right| \\ &\leq \int_{B(R)} s \mathcal{K}^{1/\alpha} \left(\sum_{i=1}^n u_{x_i} A_i(x, u, \nabla u) \right)^{(\alpha-1)/\alpha} |\nabla \zeta| (u + \varepsilon)^{-t} \zeta^{s-1} dx. \end{aligned} \quad (27)$$

Оценивая далее подынтегральное выражение в правой части формулы (27) по неравенству Юнга (16) с $\rho = t/2$,

$$\begin{aligned} A &= (u + \varepsilon)^{(1+t)(1-\alpha)/\alpha} \zeta^{s(\alpha-1)/\alpha} \left(\sum_{i=1}^n u_{x_i} A_i(x, u, \nabla u) \right)^{(\alpha-1)/\alpha}, \\ B &= s \mathcal{K}^{1/\alpha} |\nabla \zeta| (u + \varepsilon)^{(\alpha-1-t)/\alpha} \zeta^{s/\alpha-1}, \end{aligned}$$

ПОЛУЧИМ СООТНОШЕНИЕ

$$|I_2| \leq \frac{t}{2} \int_{B(R)} \sum_{i=1}^n u_{x_i} A_i(x, u, \nabla u) (u + \varepsilon)^{-t-1} \zeta^s dx + \mathcal{K} s^\alpha \left(\frac{t}{2}\right)^{1-\alpha} \int_{B(R)} |\nabla \zeta|^\alpha (u + \varepsilon)^{-t+\alpha-1} \zeta^{s-\alpha} dx. \quad (28)$$

Из соотношений (27), (28) следует, что

$$\mathcal{K} s^\alpha \left(\frac{t}{2}\right)^{1-\alpha} \int_{B(R)} |\nabla \zeta|^\alpha (u + \varepsilon)^{-t+\alpha-1} \zeta^{s-\alpha} dx \geq a \int_{B(R)} u^q (u + \varepsilon)^{-t} \zeta^s dx.$$

Перейдем в этом неравенстве к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$. Поскольку t из интервала $(0, \alpha - 1)$, в результате предельного перехода в соответствии с теоремой Лебега (см., например, [13, с. 346]), имеет место неравенство

$$\mathcal{K} s^\alpha \left(\frac{t}{2}\right)^{1-\alpha} \int_{B(R)} |\nabla \zeta|^\alpha u^{-t+\alpha-1} \zeta^{s-\alpha} dx \geq a \int_{B(R)} u^{q-t} \zeta^s dx. \quad (29)$$

Положим в (29) $s = \alpha(q - t)/(q - \alpha + 1)$ так, чтобы $(s - \alpha)(q - t)/(\alpha - 1 - t) = s$, и оценим его левую часть по неравенству Гёльдера с показателями $(q - t)/(\alpha - 1 - t)$ и $(q - t)/(q - \alpha + 1)$. В результате имеет место неравенство

$$\begin{aligned} & \mathcal{K} s^\alpha \left(\frac{t}{2}\right)^{1-\alpha} \left(\int_{B(R)} |\nabla \zeta|^{\alpha(q-t)/(q-\alpha+1)} dx \right)^{(q-\alpha+1)/(q-t)} \\ & \times \left(\int_{B(R)} u^{q-t} \zeta^s dx \right)^{(\alpha-1-t)/(q-t)} \geq a \int_{B(R)} u^{q-t} \zeta^s dx. \end{aligned} \quad (30)$$

Выберем теперь в (30) параметр t из интервала $(0, \alpha - 1)$ равным t^* так, чтобы $\gamma = \alpha(q - t^*)/(q - \alpha + 1) > n$. Минимизируя левую часть в неравенстве (30) по всем допустимым функциям $\zeta(x)$ указанного вида, получим соотношение

$$\text{cap}_\gamma(B(r), \mathbb{R}^n \setminus B(R); \mathbb{R}^n) \left(\mathcal{K} s^\alpha \left(\frac{t^*}{2}\right)^{1-\alpha} \right)^{\gamma/\alpha} \geq a \int_{B(r)} u^{q-t^*} dx. \quad (31)$$

Как уже отмечалось, γ -емкость конденсатора $(B(r), \mathbb{R}^n \setminus B(R); \mathbb{R}^n)$ есть $O(R^{n-\gamma})$ при $\gamma \neq n$, $R = 2r$ и $R \rightarrow \infty$. Следовательно, из (31) получаем, что

$$\int_{\mathbb{R}^n} u^{q-t^*} dx = 0$$

и, значит, $u(x) = 0$ почти всюду в $\mathbb{R}^n$.

Автор выражает благодарность член-корреспонденту РАН С. И. Похожаеву за полезное обсуждение результатов.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Gidas B., Spruck J. Global and local behaviour of positive solutions of nonlinear elliptic equations // Comm. Pure Appl. Math. 1981. V. 34. P. 525–598.
- [2] Ni W.-M., Serrin J. Non-existence theorems for quasilinear partial differential equations // Rend. Circ. Mat. Palermo (2). 1985. V. 5. P. 171–185.
- [3] Bidaut-Veron M. F. Global and local behaviour of solutions of quasilinear equations of Emden-Fowler type // Arch. Rational Mech. Anal. 1989. V. 107. P. 293–324.
- [4] Clement Ph., Monasevich R., Mitidieri E. Positive solutions of quasilinear systems via blow-up // Comm. Partial Differential Equations. 1993. V. 18. P. 2071–2106.
- [5] Berestycki H., Capuzzo Dolcetta J., Nirenberg L. Superlinear indefinite elliptic problems and nonlinear Liouville theorems // Topol. Methods Nonlinear Anal. 1995. V. 4. P. 59–78.
- [6] Mitidieri E. Nonexistence of positive solutions of semilinear elliptic systems in $\mathbb{R}^n$ // Differential Integral Equations. 1996. V. 9. P. 465–479.
- [7] Курта В. В. Некоторые вопросы качественной теории нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка. Дисс. ... д.ф.-м.н. М., 1994.
- [8] Курта В. В. Некоторые вопросы качественной теории нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка. Автореферат дисс. ... д.ф.-м.н. М., 1995.
- [9] Курта В. В. К вопросу об отсутствии целых положительных решений у полулинейных эллиптических уравнений // УМН. 1995. Т. 50. № 4. С. 127.
- [10] Миклюков В. М. Об одном новом подходе к теореме Бернштейна и близким вопросам уравнений типа минимальной поверхности // Матем. сб. 1979. Т. 108(150). № 2. С. 268–289.
- [11] Миклюков В. М. Емкость и обобщенный принцип максимума для квазилинейных уравнений эллиптического типа // Докл. АН СССР. 1980. Т. 250. № 6. С. 1318–1320.
- [12] Гольдштейн В. М., Решетняк Ю. Г. Введение в теорию функций с обобщенными производными и квазиконформные отображения. М.: Наука, 1983.
- [13] Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1989.

Институт прикладной математики и механики НАН Украины,
г. Донецк
E-mail: kurta@iamm.ac.donetsk.ua

Поступило
25.12.97