Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Клячко, А. К. Монгуш, Фinitно аппроксимируемые алгоритмически конечные группы, их подгруппы и прямые произведения, *Матем. заметки*, 2015, том 98, выпуск 3, 372–377

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10814>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 08:44:23

Финитно аппроксимируемые алгоритмически конечные группы, их подгруппы и прямые произведения

А. А. Клячко, А. К. Монгуш

Мы строим конечно порожденную бесконечную рекурсивно представленную финитно аппроксимируемую алгоритмически конечную группу G , отвечая тем самым на вопрос Мясникова и Осина. При этом группа G “сильно бесконечна” и “сильно алгоритмически конечна” в том смысле, что G содержит бесконечную абелеву нормальную подгруппу, а все конечные декартовы степени группы G алгоритмически конечны (т.е. ни для какого n не существует алгоритма, выписывающего бесконечное число попарно различных элементов группы G^n). Мы формулируем также несколько открытых вопросов на эту тему.

Библиография: 4 названия.

DOI: 10.4213/mzm10814

1. Введение. В работе [1] был построен первый пример конечно порожденной рекурсивно представленной бесконечной группы, которая является *алгоритмически конечной* в том смысле, что не существует алгоритма, выписывающего бесконечное количество попарно различных элементов этой группы. Группы, обладающие этими свойствами (т.е. конечно порожденные рекурсивно представленные бесконечные и алгоритмически конечные), авторы [1] предлагают называть *монстрами Дэна*.

Монстры Дэна, построенные в [1], обладают еще дополнительным свойством конечности–бесконечности – у них есть бесконечные финитно аппроксимируемые гомоморфные образы. В связи с этим в [1] был задан вопрос: *существуют ли финитно аппроксимируемые монстры Дэна?* Мы отвечаем на этот вопрос положительно,¹ но задаем другой вопрос.

ВОПРОС 1. *Верно ли, что прямое произведение двух алгоритмически конечных групп алгоритмически конечно?*

Ответа мы не знаем (и предполагаем, что он отрицательный), но построенный в нашей работе финитно аппроксимируемый монстр обладает приятным свойством: все его конечные декартовы степени алгоритмически конечны. Еще более интригующий, на наш взгляд, вопрос звучит так.

ВОПРОС 2. *Верно ли, что сплетение двух алгоритмически конечных групп алгоритмически конечно? Верно ли хотя бы, что прямое сплетение конечной группы*

¹Когда эта работа была написана, мы обнаружили, что ответ на этот вопрос содержится также в статье [2].

(например, группы из двух элементов) и алгоритмически конечной группы алгоритмически конечно?

По этому поводу мы ничего не можем сказать и не знаем даже ответа на “противоположный вопрос”.

ВОПРОС 3. *Существует ли такой монстр Дэна D , что прямое сплетение $\mathbb{Z}_2 \wr D$ алгоритмически конечно?*

Отметим однако, что построенный в этой работе монстр в некотором смысле похож на такое сплетение – он является полупрямым произведением бесконечной элементарной абелевой нормальной подгруппы и некоторого другого монстра.

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА. *Существует бесконечная конечно порожденная рекурсивно представленная финитно аппроксимируемая группа G , все конечные декартовы степени которой алгоритмически конечны, т.е. ни для какого n не существует алгоритма, выписывающего бесконечное число попарно различных элементов группы G^n . При этом группа G может быть выбрана содержащей в качестве нормальной подгруппы бесконечную прямую степень циклической группы $\mathbb{Z}_p$ (где p – произвольное фиксированное простое число), причем соответствующее расширение расщепляется:*

$$G = H \ltimes \left(\bigtimes_{i=1}^{\infty} \langle a \rangle_p \right).$$

Сам по себе вопрос о возможных подгруппах монстров Дэна заслуживает отдельного внимания. Ясно, что все конечно порожденные подгруппы монстров сами являются алгоритмически конечными, в частности, все циклические подгруппы конечны и, следовательно, например, все разрешимые конечно порожденные подгруппы также конечны.

ВОПРОС 4. *Какие группы (или какие абелевы группы) могут быть вложены в алгоритмически конечные группы? Какие могут быть вложены в качестве нормальных подгрупп?*

Основную теорему мы выводим из следующего результата об алгебрах, который имеет самостоятельный интерес.

ТЕОРЕМА О СИЛЬНО АЛГОРИТМИЧЕСКИ КОНЕЧНЫХ АЛГЕБРАХ. *Над любым конечным полем существует бесконечная конечно порожденная рекурсивно представленная финитно аппроксимируемая ассоциативная алгебра A (с единицей), все конечные декартовы степени которой алгоритмически конечны, т.е. ни для какого n не существует алгоритма, выписывающего бесконечное число попарно различных элементов алгебры A^n . При этом можно считать, что алгебра A порождается конечным множеством нильпотентных элементов.*

Наш подход к построению монстров Дэна основан на идеях работы [1], т.е. на использовании теоремы Голода–Шафаревича. Однако представленное здесь доказательство существования монстров Дэна проще, чем в [1], несмотря на то, что нам приходится специально заботиться о том, чтобы построенный монстр обладал дополнительными свойствами (финитная аппроксимируемость, впрочем, получается сама собой при нашем подходе).

2. Признак бесконечномерности. Мы будем рассматривать свободную ассоциативную алгебру $F\langle X \rangle$ (с единицей) с конечным множеством свободных поро-

дающих X над полем F . Эта алгебра состоит из многочленов от некоммутирующих переменных с коэффициентами из F . Под степенью $\deg u$ многочлена $u \in F\langle X \rangle$ мы будем всегда понимать минимальную из степеней мономов этого многочлена. Например, $\deg(xy - yx + xy^{2015}x) = 2$.

Следующий удобный признак бесконечности градуированной алгебры легко выводится из известного результата Голода–Шафаревича [3] и принадлежит, по-видимому, М. Ершову, см. [4; следствие 2.2].

ПРИЗНАК БЕСКОНЕЧНОСТИ. Если в множестве R , состоящем из однородных элементов конечно порожденной свободной ассоциативной алгебры $F\langle X \rangle$ число элементов степени n равно r_n , причем $r_0 = r_1 = 0$ и ряд

$$1 - |X|t + H_R(t) \stackrel{\text{опр}}{=} 1 - |X|t + \sum_{i=2}^\infty r_i t^i$$

сходится к отрицательному числу при некотором $t \in (0, 1)$, то факторалгебра $A = F\langle X \rangle / (R)$ бесконечномерна.

Нам понадобится также следующий очевидный факт.

ЛЕММА 1. Если поле F и множество X конечны, то для любых натуральных n и d существует лишь конечное число наборов $(u_{11}, \dots, u_{n1}), (u_{12}, \dots, u_{n2}), \dots$ длины n элементов свободной ассоциативной алгебры $F\langle X \rangle$, обладающих тем свойством, что для любых различных i и l найдется s такое, что $\deg(u_{si} - u_{sl}) < d$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Такое неравенство означает, что все наборы представляют различные элементы алгебры $(F\langle X \rangle / (X)^d)^n$, которая, очевидно, конечна. Здесь (X) – это идеал, порожденный всеми свободными порождающими и, таким образом, $(X)^d$ состоит из всех многочленов, степень которых не меньше d .

3. Построение алгебры A . Зафиксируем натуральное число α и рекурсивную всюду определенную функцию $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ (по поводу конкретного выбора α и f смотрите следующий раздел) и зафиксируем также рекурсивную нумерацию $P_1, P_2, \dots$ всех программ без входа с выходным алфавитом, состоящим из элементов некоторого конечного поля F , некоторого конечного множества X , содержащего не меньше двух элементов, и трех дополнительных символов: “+” (плюс), “,” (запятая) и “;” (точка с запятой). Выходную последовательность каждой такой программы мы будем интерпретировать как последовательность наборов элементов свободной ассоциативной алгебры $F\langle X \rangle$: элементы каждого набора разделены запятыми, а различные наборы отделяются друг от друга точками с запятой; последовательно написанные символы из $F \sqcup X$ мы интерпретируем как их произведение, лишние плюсы и запятые мы игнорируем. Например, при $F = \mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$ и $X = \{x, y\}$ последовательность

$$++xy2y+, , , 221++1+++++0xy1yuy+, , ; , ; , ; x x x 2 1 1 2 + + + y x y x y 2 2 + + +$$

мы понимаем как четыре набора (два из которых пустые, а один незаконченный):

$$(2xy^2, 2), (), (), (x^3 + yxyxy + \dots)$$

Мы будем строить алгебру A в виде $A = F\langle X \rangle / (R)$. Алгоритм построения определяющих R соотношений выглядит просто.

ОСНОВНОЙ АЛГОРИТМ. Сначала множество определяющих соотношений R состоит из одночленов x^α для всех $x \in X$. Далее на шаге k запускаем программу $N(k)$ (параллельно со всем, что уже работает) и переходим к шагу $k + 1$.

Программа $N(k)$ (т.е. программа N , получившая на вход натуральное число k) делает следующие действия.

ПРОГРАММА $N(k)$. 1. Запускает программу P_k (параллельно со всем, что уже работает).

2. Следит за работой программы P_k : как только программа P_k напишет точку с запятой, N делает следующее:

- а) приостанавливает работу программы P_k ;
- б) проверяет, что все наборы элементов алгебры $F\langle X \rangle$, которые программа P_k выдала до сих пор, имеют одинаковую длину n , т.е. на выходе программы P_k имеется последовательность вида

$$u_{11}, \dots, u_{n1}, u_{12}, \dots, u_{n2}, \dots, u_{1l}, \dots, u_{nl},$$

для некоторых $u_{ij} \in F\langle X \rangle$ и некоторого $n \in \mathbb{N}$; если это не так, то программа N выключает программу P_k и завершает свою работу;

- в) проверяет, существует ли $i < l$ такое, что $\deg(u_{si} - u_{sl}) \geq f(n, k)$ для всех s ; если нет, то программа N велит программе P_k продолжить работу и продолжает за ней следить; если же такое $i < l$ нашлось, то N переходит к следующему шагу;
- г) добавляет все однородные компоненты соответствующих разностей $u_{si} - u_{sl}$ (для всех $s \in \{1, \dots, n\}$) в множество соотношений R , выключает программу P_k и завершает свою работу.

Отметим, что в каждый момент времени у нас параллельно работает некоторое конечное число программ P_i (не более k на k -м шаге основного алгоритма) и столько же копий программы N (каждая копия следит за одной программой P_i). При этом каждая копия программы N

- либо работает вечно и ничего не добавляет в множество соотношений R ;
- либо завершает свою работу на шаге 2б) и в этом случае также ничего не добавляет в множество соотношений R ;
- либо завершает свою работу на шаге 2г) и в этом случае добавляет в R некоторое конечное множество однородных соотношений $w_1, w_2, \dots$ большой степени: $\deg w_i \geq f(n, k)$ (где k – номер этой копии программы N); при этом число добавленных соотношений каждой конкретной степени не превосходит n . Более точно, имеет место неравенство

$$r_i(k) \leq \begin{cases} 0, & \text{если } i < f(n(k), k), \\ n(k), & \text{если } i \geq f(n(k), k), \end{cases}$$

где $r_i(k)$ – это число соотношений степени i , которые k -я копия программы N добавляет в R , а $n(k)$ – это длина наборов, которые выписывает программа P_k (если P_k выписывает наборы разных длин или пишет что-то неправильное, или вообще ничего не пишет, то мы считаем $n(k) = \infty$).

4. Бесконечномерность алгебры A . Чтобы воспользоваться признаком бесконечномерности, надо оценить сумму ряда Голода–Шафаревича:

$$\begin{aligned} H_R(t) &\stackrel{\text{онп}}{=} \sum_{i=2}^{\infty} r_i t^i = |X|t^\alpha + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=2}^{\infty} r_i(k) t^i \right) \leq |X|t^\alpha + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=f(n(k),k)}^{\infty} n(k) t^i \right) \\ &= |X|t^\alpha + \sum_{k=1}^{\infty} \left(t^{f(n(k),k)} n(k) \frac{1}{1-t} \right) = |X|t^\alpha + \frac{1}{1-t} \sum_{k=1}^{\infty} (t^{f(n(k),k)} n(k)). \end{aligned}$$

Полагая $t = 1/2$ и учитывая, что $x < 2^x$ при $x \in \mathbb{N}$, получаем

$$H_R\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{|X|}{2^\alpha} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{n(k)}{2^{f(n(k),k)}} \right) < \frac{1}{2^{\alpha-|X|}} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{f(n(k),k)-n(k)}} \right).$$

Полагая теперь $f(n, k) = n + k + 2$ и $\alpha = |X| + 1$, получим

$$H_R\left(\frac{1}{2}\right) < \frac{1}{2} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4 \cdot 2^k} \right) = 1, \quad \text{т.е.} \quad 1 - \frac{1}{2}|X| + H_R\left(\frac{1}{2}\right) < 0 \quad \text{при} \quad |X| \geq 4$$

и по признаку из раздела 2 градуированная алгебра $A = F\langle X \rangle / (R)$ бесконечномерна. Разумеется, эта алгебра финитно аппроксимируема, так как всякая конечно порожденная градуированная алгебра над конечным полем аппроксимируется своими конечными факторалгебрами $A/(X)^n$.

5. Алгоритмическая конечность декартовых степеней алгебры A . Допустим, что существует программа P , выписывающая бесконечное число попарно различных элементов алгебры A^n . Разумеется, можно считать, что программа P имеет выходной алфавит $X \sqcup F \sqcup \{“+”, “,”, “;”\}$ и выписывает попарно различные элементы алгебры A^n в принятом у нас формате:

$$u_{11}, \dots, u_{n1}, \quad u_{12}, \dots, u_{n2}, \quad \dots, \quad \text{где} \quad u_{ij} \in F(X)$$

(всякая программа может быть преобразована к такому виду).

Программа P получит при нашей нумерации программ некоторый номер k , т.е. $P = P_k$. Тогда на k -м шаге нашего основного алгоритма будет запущена программа $N(k)$ (параллельно с другими работающими программами), которая, в свою очередь, запустит программу $P_k = P$ и будет за ней следить. Возможно два варианта.

Случай I: $\deg(u_{si} - u_{sl}) \geq f(n, k)$ для некоторых различных i и l и всех s . Будем считать, что $i < l$ и l минимальное возможное с этими свойствами. Тогда после написания l -й точки с запятой программа $P = P_k$ будет приостановлена на шаге 2а) работы программы-надсмотрщика $N(k)$. Далее, на шаге 2б) и 2в) проверки завершатся успешно, а на шаге 2г) в множество определяющих соотношений R будут добавлены все однородные компоненты разностей $u_{si} - u_{sl}$ (для всех $s \in \{1, \dots, n\}$). Это означает, что наборы $(u_{1i}, \dots, u_{ni})$ и $(u_{1l}, \dots, u_{nl})$, выписанные программой P , представляют один и тот же элемент алгебры A^n , противоречие.

Случай II: для любых различных i и l найдется s такое, что $\deg(u_{si} - u_{sl}) < f(n, k)$. Этого не может быть по лемме 1.

Теорема о сильно алгоритмически конечных алгебрах доказана.

6. Доказательство основной теоремы. Возьмем алгебру A над полем вычетов $\mathbb{Z}_p$ с конечным множеством порождающих X , существование которой утвержда-

ется в теореме о сильно алгоритмически конечных алгебрах, и рассмотрим множество матриц

$$G = \begin{pmatrix} H & A \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где H – подгруппа мультипликативной группы алгебры A , порожденная элементами вида $1 + x$, где $x \in X$ (эти элементы обратимы, так как элементы множества X нильпотентны). Ясно, что G – это группа:

$$\begin{pmatrix} h & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h' & a' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} hh' & a + ha' \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

причем G является полупрямым произведением

$$\begin{aligned} &\text{нормальной подгруппы } \begin{pmatrix} 1 & A \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \simeq \bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}_p \\ &\text{и ненормальной подгруппы } \begin{pmatrix} H & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \simeq H. \end{aligned}$$

Группа G конечно порождена ($(|X| + 1)$ -порождена); она порождается матрицами

$$\begin{pmatrix} 1 + X & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

так как элементы $1 + X$ очевидным образом порождают алгебру A как кольцо. Все декартовы степени G^n алгоритмически конечны, так как все декартовы степени алгебры A алгоритмически конечны. Понятно также, что рекурсивная представленность группы G вытекает из рекурсивной представленности алгебры A . Финитная аппроксимируемость группы G также немедленно вытекает из финитной аппроксимируемости алгебры A , так как группа обратимых матриц (и алгебра всех матриц) над финитно аппроксимируемой алгеброй финитно аппроксимируема.

Основная теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A. Myasnikov, D. Osin, “Algorithmically finite groups”, *J. Pure Appl. Algebra*, **215**:11 (2011), 2789–2796, arXiv: 1012.1653.
- [2] B. Khoussainov, A. Miasnikov, “Finitely presented expansions of groups, semigroups, and algebras”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **366**:3 (2014), 1455–1474.
- [3] Е. С. Голод, И. Р. Шафаревич, “О башне полей классов”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **28**:2 (1964), 261–272.
- [4] M. Ershov, “Golod–Shafarevich groups: a survey”, *Int. J. Algebra Comput.*, **22**:5 (2012), 1230001, arXiv: 1206.0490.

А. А. Клячко

Московский государственный университет
имени М.В.Ломоносова

E-mail: klyachko@math.msu.su

Поступило

15.03.2014

А. К. Монгуш

Московский государственный университет
имени М.В.Ломоносова

E-mail: ayranamongush@gmail.com