Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Н. Михалёв, И. Х. Сабитов, Изометрические вложения в $\mathbb{R}^3$ кольца с локально-евклидовой метрикой с цилиндрическим типом неоднозначности, *Матем. заметки*, 2015, том 98, выпуск 3, 378–385

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10815>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 16:08:49

Изометрические вложения в $\mathbb{R}^3$ кольца с локально-евклидовой метрикой с цилиндрическим типом неоднозначности

С. Н. Михалев, И. Х. Сабитов

В статье доказывается, что заданную в круговом кольце локально-евклидовую метрику с цилиндрической неоднозначностью изометрического погружения в $\mathbb{R}^2$ можно изометрически вложить в $\mathbb{R}^3$ в виде цилиндрической поверхности.

Библиография: 4 названия.

DOI: 10.4213/mzm10815

Формулы для изометрических отображений. Пусть в концентрическом кольце $\bar{\Omega}$: $R_1^2 \leq \xi^2 + \eta^2 \leq R_0^2$ задана локально евклидова метрика

$$ds^2 = \Lambda^2(\xi, \eta)(d\xi^2 + d\eta^2). \quad (1)$$

Общеизвестно, что критерием локальной евклидовости метрики (1) является гармоничность функции $\ln \Lambda$; следовательно, функция $\Lambda(\zeta)$ аналитическая в открытом кольце Ω . Что касается ее граничного поведения, то предполагаем, что $\Lambda \in C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$, $0 < \alpha < 1$, что обеспечит, как мы увидим позже, тот же класс гладкости для голоморфной функции $z = x + iy = \Phi(\zeta)$, приводящей метрику (1) к стандартному евклидовому виду $dx^2 + dy^2$.

Обозначим граничные окружности кольца как Γ_0 : $|\zeta| = R_0$ и Γ_1 : $|\zeta| = R_1$, где $\zeta = \xi + i\eta$ и найдем общий вид искомого голоморфного отображения. Основой для этого является следующая

ЛЕММА 1. Пусть голоморфная в Ω функция $z = f(\zeta)$ имеет однозначную производную $f'(\zeta) \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$ и пусть

$$f'(\zeta) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_m \zeta^m, \quad c_m = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_0^+} \frac{f'(\zeta)}{\zeta^{m+1}} d\zeta \quad (2)$$

– разложение функции $f'(\zeta)$ в ряд Лорана в кольце $\bar{\Omega}$ (Γ_0^+ означает, что контур Γ_0 обходится против часовой стрелки). Пусть

$$H(\zeta) = f'(\zeta) - \frac{c_{-1}}{\zeta}. \quad (3)$$

Работа авторов частично поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант № 12-01-90415-Укр_a).

Тогда функцию $f(\zeta)$ можно найти по формуле

$$f(\zeta) = \overline{\Phi_0(\zeta)} - \frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} \frac{H(w)}{\bar{w} - \bar{\zeta}} du dv + c_{-1} \ln \zeta + \text{const}, \quad (4)$$

где $w = u + iv$, а голоморфная и однозначная в Ω функция $\Phi_0(\zeta)$ задается формулой

$$\Phi_0(\zeta) = - \sum_{m=2}^{+\infty} \frac{\bar{c}_{-m} \zeta^{m-1}}{(m-1)R_0^{2m-2}} - \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{R_1^{2m+2} \bar{c}_m}{(m+1)\zeta^{m+1}}. \quad (5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как

$$f'(\zeta) = H(\zeta) + \frac{c_{-1}}{\zeta},$$

нам достаточно найти голоморфную функцию $f_0(\zeta)$ с производной $f'_0(\zeta) = H(\zeta)$. По определению $H(\zeta)$ интеграл от однозначной функции $H(\zeta)$ вдоль любой окружности Γ_j , $0 \leq j \leq 1$, равен нулю, поэтому $f_0(\zeta)$ тоже будет однозначной функцией. По условию имеем

$$\frac{\partial \bar{f}_0}{\partial \bar{\zeta}} = \overline{H(\zeta)},$$

поэтому по формуле для общего решения неоднородной системы Коши–Римана (формула (4.9) из [1]) получаем

$$\bar{f}_0(\zeta) = -\frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} \frac{\overline{H(w)}}{w - \zeta} du dv + \Phi_0(\zeta), \quad \text{где} \quad \Phi_0(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial\Omega} \frac{\bar{f}_0(t)}{t - \zeta} dt. \quad (6)$$

Покажем, что на самом деле $\Phi_0(\zeta)$ можно найти, используя только известную функцию $H(\zeta)$.

Обозначим, как в [1; гл. 1],

$$Tg = -\frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} \frac{g(w)}{w - \zeta} du dv \quad (\text{у нас} \quad g(w) = \overline{H(w)}).$$

Согласно формулам (8.1) и (8.21) из той же книги [1] имеем

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} Tg = -\frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} \frac{g(w)}{(w - \zeta)^2} du dv = -\frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} \frac{\partial g / \partial w}{w - \zeta} du dv - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial\Omega} \frac{g(t)}{t - \zeta} d\bar{t}.$$

Дифференцируя (6) по ζ и используя только что приведенные формулы с учетом голоморфности функций $f_0(\zeta)$ и $H(\zeta)$, получаем, что

$$\Phi'_0(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial\Omega} \frac{\overline{H(t)}}{t - \zeta} d\bar{t}. \quad (7)$$

Вычислим интеграл в (7), подставляя в него значение $H(t)$ из (3). Заметив, что на окружности Γ_j , $j = 0, 1$, имеем $d\bar{t} = -R_j^2 dt/t^2$, и представив $\overline{H(t)}$ на Γ_j в виде

$$\overline{H(t)} = \sum_{m=-2}^{-\infty} \frac{\bar{c}_m R_j^{2m}}{t^m} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\bar{c}_m R_j^{2m}}{t^m}, \quad j = 0, 1$$

и учитывая, что точка $\zeta \in \Omega$ находится внутри окружности Γ_0 и вне окружности Γ_1 , легко найдем утверждаемый в лемме вид функции $\Phi(\zeta)$.

Применим теперь эту лемму для описания отображения $z = \Phi(\zeta)$, приводящего метрику (1) к стандартному виду $dx^2 + dy^2$. В этом случае $\ln \Lambda$ является однозначной гармонической функцией и действительной частью голоморфной функции $f(\zeta) = \ln \Phi'(\zeta)$. Тогда для этой функции

$$f(\zeta) = \ln \Lambda(\zeta) + i \arg \ln \Phi'(\zeta)$$

имеем

$$f'(\zeta) = \frac{\partial \ln \Phi'(\zeta)}{\partial \zeta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \ln \Lambda}{\partial \xi} + i \frac{\partial \arg \ln \Phi'}{\partial \xi} - i \left(\frac{\partial \ln \Lambda}{\partial \eta} + i \frac{\partial \arg \ln \Phi'}{\partial \eta} \right) \right),$$

и тогда с использованием уравнений Коши–Римана получаем

$$f'(\zeta) = (\ln \Phi'(\zeta))' = 2 \frac{\partial \ln \Lambda}{\partial \zeta}.$$

Голоморфная Функция $2\partial \ln \Lambda / \partial \zeta$ является однозначной; используя лемму, находим, что

$$\Phi'(\zeta) = b\zeta^{c-1} \exp \left(\overline{\Phi_0(\zeta)} - \frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} \frac{2\partial \ln \Lambda(w)/\partial w - c_{-1}/w}{\bar{w} - \bar{\zeta}} du dv \right), \quad (8)$$

где $\Phi_0(\zeta)$ – функция, определяемая формулой вида (5), а b – некоторая постоянная, определенная с точностью до аргумента из условия $|\Phi'(\zeta)| = \Lambda(\zeta)$ в какой-нибудь конкретной точке $\zeta \in \Omega$.

В работе [2] показано, что показатель c_{-1} является действительным числом. Если показатель c_{-1} – целое число, то $\Phi'(\zeta)$ будет в кольце Ω однозначной функцией и по лемме найдем функцию $\Phi(\zeta)$ вида $\Phi(\zeta) = \Psi(\zeta) + d_{-1} \ln(\zeta)$, где $\Psi(\zeta)$ – некоторая однозначная голоморфная функция, а d_{-1} определяется как соответствующий коэффициент в разложении $\Phi'(z)$ в ряд Лорана. Если $d_{-1} = 0$, то функция $\Phi(\zeta)$ дает изометрическое погружение л. е. метрики (1) в стандартную евклидову плоскость. Если же $d_{-1} \neq 0$, то погружения нет. Но так как функция $\Phi'(\zeta)$ в (8) определена с точностью до аргумента постоянного множителя b , можем считать, что в случае $d_{-1} \neq 0$ имеем некую каноническую форму локально изометрического отображения метрики (1) в $\mathbb{R}^2$ вида

$$\Phi(\zeta) = c \ln \zeta + \Psi(\zeta), \quad (9)$$

где $\Psi(\zeta)$ – некоторая однозначная голоморфная функция, а коэффициент $c \neq 0$ выбирается с точностью до значения своего аргумента, так что после обхода любой окружности $|\zeta| = r$, $R_1 \leq r \leq R_0$, в кольце Ω образы точек окружности в $\mathbb{R}^2$ окажутся сдвинутыми на вектор $2\pi c$ и в них касательные к образу линии $\arg \zeta = \text{const}$ будут параллельны. Этот случай соответствует цилиндрическому типу неоднозначности изометрического отображения $\Phi(\zeta)$.

Если же показатель c_{-1} не является целым числом, то функция $\Phi'(\zeta)$ многозначна. С тем же характером многозначности будет и функция $\Phi(\zeta)$. Действительно, ищем $\Phi(\zeta)$ в виде $\Phi(\zeta) = \zeta^{c-1} \Phi_0(\zeta)$ и для определения однозначной функции $\Phi_0(\zeta)$ получаем уравнение

$$\zeta \Phi'_0(\zeta) + c_{-1} \Phi_0(\zeta) = \zeta \Psi_0(\zeta), \quad (10)$$

где однозначная функция $\Psi_0(\zeta)$ определена через известную функцию $\Phi'(\zeta)$ соотношением $\Phi'(\zeta) = \zeta^{c-1}\Psi_0(\zeta)$. Представляя функцию $\Psi_0(\zeta)$ ее рядом Лорана

$$\Psi_0(\zeta) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_m \zeta^m,$$

мы из уравнения (10) можем найти единственным образом коэффициенты Лорана искомой функции $\Phi_0(\zeta) = \sum_{-\infty}^{+\infty} b_m \zeta^m$ по равенствам

$$(m + c_{-1})b_m = a_{m-1}, \quad -\infty < m < +\infty$$

(условие $c_{-1} \notin \mathbb{Z}$ гарантирует отличие от нуля коэффициентов при всех b_m). Случай нецелого c_{-1} соответствует коническому типу неоднозначности изометрического отображения л. е. метрики в $\mathbb{R}^2$.

Вложение кольца в случае цилиндрической неоднозначности. Рассмотрим случай цилиндрической неоднозначности отображения $z = \Phi(\zeta)$ кольца $\bar{\Omega}$: $R_1 \leq |\zeta| \leq R_0$ в $\mathbb{R}^2$, т.е. будем считать, что отображение имеет вид (9), где $\Psi(\zeta)$ – однозначная голоморфная функция.

Поворотом осей x, y можно добиться, чтобы в новых осях (оставим за ними прежние обозначения x, y) отображение $z = \Phi(\zeta)$ имело вид

$$z = \Phi(\zeta) = iB \ln \zeta + \Psi(\zeta)$$

с действительным коэффициентом $B \neq 0$.

Наряду с отображением $\Phi: \zeta \mapsto (x, y)$ мы будем рассматривать, следуя [3], отображение $F: \zeta \mapsto (X, Y, Z)$, задаваемое формулами

$$\begin{aligned} X &= B \cos \frac{x(\zeta)}{B}, \\ Y &= y(\zeta), \\ Z &= B \sin \frac{x(\zeta)}{B} \end{aligned} \tag{11}$$

и являющееся, очевидно, уже однозначным. Это отображение $F: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$, как указано в [3], дает изометрическое погружение кольца $\bar{\Omega}$ в $\mathbb{R}^3$ в виде области (возможно, многолистной) на круговом цилиндре $X^2 + Z^2 = B^2$. Мы хотим, используя это погружение, построить вложение области $\bar{\Omega}$ в $\mathbb{R}^3$.

Граница $\partial\bar{\Omega}$ состоит из двух концентрических окружностей, образом каждой из которых при отображении Φ является некоторая гладкая, возможно, имеющая самопересечения, кривая на плоскости (x, y) , периодическая в направлении оси Ox с периодом $2\pi B$, а при отображении F на цилиндр каждая из двух кривых становится замкнутой (здесь также могут быть самопересечения).

Мы будем предполагать, что множество $\Phi(\partial\bar{\Omega})$ удовлетворяет следующему условию: какова бы ни была прямая l , параллельная оси Oy , эта прямая либо не касается кривых из $\Phi(\partial\bar{\Omega})$, либо касается в единственной точке плоскости, причем в такой точке у каждой из касающихся там прямой l дуг кривизна не равна 0. Данное условие можно переформулировать для множества $F(\partial\bar{\Omega})$ на цилиндре, надо только говорить не о прямых, параллельных оси, а об образующих цилиндра. Общее число точек касания будет, очевидно, конечным.

Для явного построения искомого изометрического вложения кольца $\bar{\Omega}$ в пространство $\mathbb{R}^3$ нужно использовать почти без изменений конструкцию, приведенную в [3] и [4] (в этих работах для n -связной области D_n , изначально погруженной в $\mathbb{R}^2$, предъявлялось ее вложение в $\mathbb{R}^3$ в виде области на некоторой поверхности, соответственно, цилиндрической и конической). Мы ограничимся лишь общим описанием этой конструкции (отсылая за подробностями к указанным работам), но укажем на изменения, которые должны быть внесены в это построение (исходя из специфики задачи, решаемой в данной работе).

Проведем в Ω через каждую точку $\zeta_0 \in \Omega$ геодезическую $\gamma(\zeta_0)$ под углом $\theta = \pi/2 - \arg \Phi'(\zeta_0)$ к оси $O\xi$. Угол θ выбран так, чтобы геодезическая $\gamma(\zeta_0)$ при отображении $z = \Phi(\zeta)$ перешла в отрезок прямой $x = \text{const} = \text{Re } \Phi(\zeta_0) = x(\zeta_0)$, а при отображении $F(\zeta)$ – в отрезок образующей цилиндра. Вдоль каждой такой геодезической отображение Φ однолистно, как и отображение F ; вся область Ω “расслаивается” на геодезические семейства γ .

Особое значение имеют геодезические $\gamma(\zeta_0)$, касающиеся $\partial\bar{\Omega}$ – мы будем называть их *межевыми*. Точки их касания с $\partial\bar{\Omega}$ соответствуют точкам локального экстремума на $\partial\bar{\Omega}$ функции $x(\zeta)$ (будем называть их *экстремальными* точками). Межевые геодезические разбивают Ω на конечное число областей Ω_j . Каждая область $\omega_j = \Phi(\Omega_j)$ расслаивается на отрезки прямых $x = \text{const}$, вдоль каждого из которых отображение Φ однолистно, откуда следует, что на каждой замкнутой области Ω_j отображение Φ однолистно в целом.

На границе каждой области Ω_j есть ровно две экстремальные точки – соединим их простой жордановой дугой в Ω_j . Эти экстремальные точки с соединяющими их дугами составят некоторый граф G , который планарен, так как расположен без пересечения ребер в кольце $\bar{\Omega}$, и топологически устроен следующим образом: вершины только индексов 1 и/или 3; некоторые ребра могут быть двойными. В [3] и [4] граф не мог иметь петель; в нашей же нынешней задаче петли могут возникнуть (вершина, инцидентная петле, имеет индекс три: из нее исходит еще одно простое ребро, а из двух концов ребра–петли – “засчитываются оба”; см. пример 2 в конце статьи).

Еще одна ситуация, которая может иметь место в рассматриваемой задаче (но не в задачах из [3] и [4]): граф G может быть пустым. Так происходит, когда все образующие цилиндра пересекают $F(\bar{\Omega})$ трансверсально. Это означает, что отображение F из (11) уже является вложением, и доказывать нечего. Пример: простейшее отображение $z = \Phi(\zeta) = iB \ln \zeta$ (т.е. когда $\Psi(\zeta) \equiv 0$).

Следующий шаг: для данного абстрактного графа G подбирается некоторая его специальная реализация на плоскости в виде графа G_1 : необходимо, чтобы реализация была вложением (разные ребра могут иметь общие точки только в вершинах графа), а ребра являлись достаточно гладкими кривыми. Кроме того, необходимо, чтобы некоторые пары ребер, исходящих из одной вершины стыковались в этой вершине также с достаточной степенью гладкости, а длина каждого ребра графа была равна длине проекции соответствующей этому ребру области $\omega_j = \Phi(\Omega_j)$ на ось Ox . Алгоритм построения такого графа в нашем случае почти полностью повторяет алгоритм, приведенный в [3] и [4]: он также опирается на известную теорему о том, что всякий планарный граф без петель и кратных ребер может быть вложен в плоскости в виде графа с ребрами–отрезками прямых. В [3] и [4] непосредственному применению этой теоремы изначально “мешает” возможное наличие двойных

ребер; вопрос решается переходом к рассмотрению графа, устроенного аналогично исходному, но без двойных ребер, затем вложением этого графа и последующим гладким “раздвоением” тех ребер, которые изначально были двойными (конечность графа позволяет это сделать без нарушения вложенности). В нашем же случае, как уже говорилось, кроме двойных ребер граф может иметь и петли. Предварительно “убрав” дублирующие ребра и петли из графа, и вложив требуемым образом этот “упрощенный” граф в плоскость, а потом модифицировав его – восстановив двойные ребра и петли с сохранением вложенности и гладкости¹ – мы снова получим искомое вложение графа G в виде плоского графа G_1 с нужными свойствами.

После этого требуемое вложение области $\bar{\Omega}$ в $\mathbb{R}^3$ получается в виде цилиндрической поверхности, направляющей которой является найденный плоский граф G_1 . Для этого (см. [3] и [4]) достаточно определить вложение каждой области Ω_j следующими соотношениями:

$$X = X_j(s), \quad s = x(\zeta) - c_1^j, \quad Y = y(\zeta), \quad Z = Z_j(s),$$

где предполагается, что при отображении Φ области Ω_j переменная x пробегает промежуток $[c_1^j, c_2^j]$, а $X = X_j(s)$, $Z = Z_j(s)$ – параметризация соответствующего ребра графа G_1 относительно его евклидовой длины s (отметим, что при этом каждому фиксированному значению s соответствует целый континуум точек ζ области Ω_j (эти точки формируют геодезическую, для которой $x = x(\zeta) = \text{const}$), а значение $Y = y(\zeta)$ у каждой из этих точек свое).

ПРИМЕР 1. Рассмотрим в кольце $2 \leq \xi^2 + \eta^2 \leq 4$ метрику

$$ds^2 = \frac{(1 + \xi)^2 + \eta^2}{\xi^2 + \eta^2} (d\xi^2 + d\eta^2). \quad (12)$$

Соответствующее отображение $z = \Phi(\zeta)$ имеет вид $z = i \ln \zeta + i\zeta$.

Рис. 1

На рис. 1 изображены исходное кольцо $\bar{\Omega}$ и его образ в $\mathbb{R}^2$ при заданном отображении Φ (точнее, фрагмент (аналог фундаментальной области) этого образа: отображение является многозначной функцией, и образ – неограниченное множество).

¹Например, на рисунке 2 двойное ребро вложено в виде отрезка AB и дуги C с концами в точках A и B , а пример вложения петли дан на правом чертеже рисунка 3.

Кроме того, на каждом из двух чертежей изображены соответствующие межевые геодезические, заштрихованы две из четырех получающихся областей Ω_j и выделены экстремальные точки – будущие вершины графа G .

Рис. 2

Погружение кольца $\overline{\Omega}$ в цилиндр $X^2 + Z^2 = 1$, получаемое по методу из [3], изображено на левом чертеже рис. 2. На том же рисунке правее: получаемые в результате применения нашего метода граф G_1 на плоскости OXZ (у него 4 ребра, три из которых – отрезки, лежащие на оси OX) и искомое изометрическое вложение кольца $\overline{\Omega}$ в $\mathbb{R}^3$ в виде цилиндрической поверхности с параллельными оси OY образующими.

Рис. 3

ПРИМЕР 2. Цель этого примера – проиллюстрировать высказанное ранее замечание, состоящее в том, что граф G_1 может иметь петли (поэтому мы, в частности, не станем заботиться о точном описании метрики, как это было сделано в примере 1). Пусть метрика в исходном кольце $\overline{\Omega}$ такова, что его образ при изометрическом отображении Φ в цилиндр имеет вид “кольца с выступом” (см. левый чертеж на рис. 3). В этом случае получается всего две экстремальные точки и одна межевая геодезическая, а граф (см. правый чертеж на рис. 3) имеет два ребра, одно из которых и

является петлей. Отметим, что хотя служащее отправной точкой в нашем общем построении погружение в цилиндр в данном случае уже само является вложением, приведенная конструкция, конечно, также применима (и дает вложение, отличное от исходного).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] И. Н. Векуа, *Обобщенные аналитические функции*, ФИЗМАТЛИТ, М., 1959.
- [2] И. Х. Сабитов, “Изометрические погружения и вложения локально евклидовых метрик в $\mathbb{R}^2$ ”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **63**:6 (1999), 147–166.
- [3] И. Х. Сабитов, “Изометрическое погружение локально-евклидовых метрик в $\mathbb{R}^3$ ”, *Сиб. матем. журн.*, **26**:3 (1985), 156–167.
- [4] С. Н. Михалев, И. Х. Сабитов, “Изометрические вложения локально-евклидовых метрик в $\mathbb{R}^3$ в виде конических поверхностей”, *Матем. заметки*, **95**:2 (2014), 234–247.

С. Н. Михалев

Московский государственный университет
имени М.В.Ломоносова
E-mail: mikhalev@bk.ru

Поступило

25.02.2014

Исправленный вариант

19.03.2015

И. Х. Сабитов

Московский государственный университет
имени М.В.Ломоносова
E-mail: isabitov@mail.ru